
GUSTAV E. STECHERT
810 Broadway
NEW-YORK.



Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Erster Band.
1890—91.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für 1890—91, Bericht über die auf der Versammlung in Halle a. S. 1891 gehaltenen Vorträge, sowie einen ausführlichen

Bericht über die
Fortschritte der projectiven Invariantentheorie
im letzten Vierteljahrhundert,

von Dr. **W. Franz Meyer,**
Prof. der Mathematik a. d. Kgl. Bergakademie Clausthal.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Cantor in Halle a. S. — **W. Dyck** in München — **E. Lampe** in Berlin.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1892.



Inhalt.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Bericht über die wissenschaftlichen Sitzungen

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Verbindung mit der ersten Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, abgehalten auf der Versammlung zu Halle, 22—26. September 1891.

III. Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie.

Chronik
der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung.



Wir eröffnen die Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit dem Abdruck des Einladungsschreibens, mit welchem die auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Bremen 1890 ins Leben getretene Vereinigung die Fachgenossen zum Beitritt aufgefordert hat. Zusammen mit dem in der Anlage dieses Schreibens abgedruckten „Heidelberger Aufruf“ und den „Bremer Beschlüssen“ bezeichnen sie die Entstehungsgeschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, welche nunmehr auf der Versammlung in Halle eine feste Organisation gewonnen hat.

Mögen die in unseren Statuten, wie in jenen ersten Aufforderungsschreiben zum Ausdruck gelangten Wünsche und Ziele in unserer Vereinigung allezeit Vertretung und Förderung finden!

December 1890.

Der Wunsch, einen engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenhang unter den deutschen Mathematikern herzustellen, besteht seit vielen Jahren, und es sind wiederholt Versuche gemacht worden, eine Form für die Verwirklichung dieses Wunsches zu finden. Anfangs der dreissiger Jahre tagte in Berlin eine Mathematiker-Versammlung, an welcher unter Anderen C. G. J. Jacobi, Minding und die beiden Brüder Ohm teilnahmen; in den Osterferien des Jahres 1873 fand eine solche in Göttingen statt. Zu einer dauernden Einrichtung haben beide Versammlungen nicht geführt. Bezeugt dies auch die Schwierigkeit, eine solche Organisation zu schaffen, so liegen doch keine triftigen Gründe vor, sich durch die bisher missglückten Versuche von einem Vorhaben abschrecken zu lassen, dessen

Zweck es ist: in gemeinsamer zielbewusster Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben des deutschen Volkes nach Gebühr zu heben, ihren

Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem collegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, entschlossen sich am 21. September 1889 zu Heidelberg zwanzig auf der dortigen Naturforscherversammlung vereinigte Mathematiker zu einem Aufruf an die deutschen Fachgenossen, welchen wir als Anlage I im Wortlaute unten folgen lassen.

Dieses Rundschreiben, welches nach Möglichkeit allgemein zur Versendung gelangt ist, wurde in zustimmendem Sinne von mehreren Fachgenossen beantwortet, unter denen wir besonders die Herren Brill, Kiepert, F. Klein, Kronecker, Lampe, Lüroth, Schubert, Weierstrass zu nennen haben.

Die auf der Naturforscherversammlung dieses Jahres in Bremen zusammengekommenen Mathematiker sind der in dem Heidelberger Aufruf gegebenen Anregung gefolgt und nach eingehenden Beratungen am 18. September 1890 zu einer

„Vereinigung deutscher Mathematiker“

zusammengetreten.

Die Bildung der Vereinigung erfolgte, unter vorläufigem Verzicht auf geschriebene Satzungen, durch Unterzeichnung eines Schriftstückes, in welchem die leitenden Gesichtspunkte und Grundsätze in Form von Beschlüssen ausgesprochen worden sind. Wir geben diese „Bremer Beschlüsse“ unten als Anlage II, versehen mit den Unterschriften der Zustimmenden der in Bremen versammelten Abteilung; zur Orientirung mögen aber einige Punkte hier noch besonders hervorgehoben werden.

Die „Vereinigung deutscher Mathematiker“ hat sich an die „Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte“ äusserlich so angeschlossen, dass die fünf Mitglieder ihres Vorstandes gleichzeitig Mitglieder der „G. d. N. u. Ae.“ sein müssen; hier bilden sie den nach § 16 der Statuten dieser Gesellschaft zu wählenden Vorstand der ersten Abteilung für das laufende Geschäftsjahr.

Die nächstliegende Aufgabe dieses Vorstandes besteht in der eingehenden Vorbereitung und zweckmässigen Ausgestaltung der wissenschaftlichen Verhandlungen in der Abteilung für Mathematik und Astronomie der „G. d. N. u. Ae.“

Die „Vereinigung deutscher Mathematiker“ setzt sich auch die thatkräftige Förderung des in Berlin bei Reimer erscheinenden „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik“ zur Aufgabe.

Bei der am 18. September erfolgten Wahl des Vorstandes der Vereinigung wurden gewählt die Herren:

G. Cantor (Halle), zugleich als Vorsitzender, W. Dyck (München) Schriftführer, E. Lampe (Berlin), Th. Reye (Strassburg), H. Schubert (Hamburg).

Wir erlauben uns, alle deutschen Fachgenossen, welche den Zweck der „Vereinigung deutscher Mathematiker“ billigen, hiermit aufzufordern, sich derselben anzuschliessen, und ihren Beitritt dadurch zu erklären, dass sie den Mitgliederbeitrag von zwei Mark für das laufende Geschäftsjahr an Herrn W. Dyck, München, Hildegardstrasse $1^1/_2$, einsenden.

Von den laufenden Angelegenheiten der „Vereinigung deutscher Mathe-

matiker" werden alle ihre Mitglieder rechtzeitig durch den Vorstand in Kenntnis gesetzt werden, insbesondere wird derselbe im Januar 1891 ein erstes Mitgliederverzeichnis zur Versendung gelangen lassen.

Im Auftrag der in Bremen constituirten
„Vereinigung deutscher Mathematiker."
Der Vorstand:
G. Cantor. W. Dyck. E. Lampe. Th. Reye. H. Schubert.

Anlage I.

„Heidelberger Aufruf."

Heidelberg, den 21. September 1889.

Hochgeehrter Herr!

Auf der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Heidelberg gelangte in der mathematisch-astronomischen Section der Wunsch nach einer engeren Vereinigung der deutschen Mathematiker zum Ausdruck. Die Unterzeichneten glauben, auf diesen Zweck gerichtete Beratungen am besten dadurch einleiten zu können, dass sie mit gegenwärtigem Circular die übrigen Fachgenossen ersuchen, sich möglichst zahlreich an der nächstjährigen Naturforscherversammlung zu Bremen zu beteiligen, um dort der Frage näher zu treten, in welcher Weise eine auf jenes Ziel gerichtete Organisation verwirklicht werden könnte.

L. Burmester (München),
G. Cantor (Halle),
M. Cantor (Heidelberg),
W. Dyck (München),
L. Heffter (Giessen),
C. Köhler (Heidelberg),
L. Königsberger (Heidelberg),
M. Krause (Dresden),
E. Netto (Giessen),
M. Nöther (Erlangen),
E. Papperitz (Dresden),
A. Pringsheim (München),
C. Reuschle (Stuttgart),
Th. Reye (Strassburg),
H. Schapira (Heidelberg),
A. Schönflies (Göttingen),
E. Schröder (Karlsruhe),
A. Voss (München),
H. Weber (Marburg),
M. Wolf (Heidelberg).

Anlage II.

„Bremer Beschlüsse."

Bremen, am 18. September 1890.

I. Abteilung
für Mathematik und Astronomie
der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte.

Die in der mathematisch-astronomischen Abteilung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte am 18. September versammelten Herren be-

schliessen, auf Grund der in Heidelberg gegebenen Anregung zur Herbeiführung einer engeren Vereinigung der deutschen Mathematiker, was folgt:

1) Es soll der Plan einer Vereinigung der deutschen Mathematiker im Anschluss an die Organisation der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zur Verwirklichung gebracht werden.

2) Die mathematisch-astronomische Abteilung der Gesellschaft soll dementsprechend einen erweiterten Kreis ihrer Bethätigung erhalten, welcher die gesamten wissenschaftlichen Interessen der Mathematik umfasst.

Es sollen die Verhandlungen der Jahres-Versammlung wissenschaftlich in eingehenderer Weise als bisher vorbereitet und der Abteilung bleibende Aufgaben zugewiesen werden.

In erster Richtung scheinen beispielsweise eine Eröffnungsrede, sowie ausführliche Referate über gemeinsam interessirende Gebiete der Mathematik besonders wünschenswert. In letzterer Hinsicht wird unter Anderem eine enge Bezugnahme zu dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ in Aussicht genommen werden können.

3) Die Abteilung beauftragt mit den hieraus sich ergebenden Aufgaben den nach § 16 der Statuten der Gesellschaft alljährlich zu wählenden Abteilungsvorstand, dessen Mitglieder der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte als Mitglieder angehören müssen, eventuell bei Annahme der Wahl die Mitgliedschaft erwerben.

4) Dieser Vorstand soll alle Vollmacht haben, im Einzelnen die im Vorstehenden ausgedrückten Absichten der Abteilung in geeigneter Weise zur Ausführung zu bringen, und kann sich, wenn erforderlich, durch Cooptation verstärken.

5) Die Abteilung spricht den Wunsch aus, dass der von ihr zu wählende Ausschuss mit dem Vorstande der Gesellschaft in eine geregelte geschäftliche Beziehung tritt. Es soll über die Form derselben in der (morgigen) dritten allgemeinen Sitzung eine Verhandlung eingeleitet werden, etwa mit dem Vorschlage an die Gesellschaft, es möge der Vorstand derselben sich durch einen Central-Ausschuss ergänzen, bestehend aus je einem Delegirten jeder Abteilung.

> (Bemerkung.) Der hier ausgesprochene Wunsch wurde (durch Herrn F. Klein) in der erwähnten allgemeinen Sitzung zur Sprache gebracht und fand dort vielseitige Zustimmung; es wird Beschlussfassung darüber auf die Tagesordnung der nächstjährigen, Hallenser Versammlung gesetzt werden (vgl. Verhandlungen der „G. d. N. u. Ae.“ zu Bremen, I. Teil, pag. XXXI).

6) Für erwachsende Auslagen stellen die Zustimmenden einen Beitrag von je 2 Mark zu Handen des zu wählenden Vorstandes.

7) Der von der Abteilung zu wählende Vorstand hat den deutschen Fachgenossen durch einen Bericht von den gegenwärtigen Verhandlungen und Beschlüssen Kenntnis zu geben.

Die unterzeichneten Teilnehmer der mathematisch-astronomischen Abteilung der 63. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte erklären ihre Zustimmung zu den obigen Beschlüssen.

F. S. Archenhold (Charlottenburg),
H. Burkhardt (Göttingen),
G. Cantor (Halle),
W. Dyck (München),
P. Gordan (Erlangen),
L. Heffter (Giessen),
L. Henneberg (Darmstadt),
D. Hilbert (Königsberg),
R. Hoppe (Berlin),
E. Jürgens (Aachen),
H. Kasten (Bremen),
L. Kiepert (Hannover),
F. Klein (Göttingen),
F. Klemm (Bremen),
E. Lampe (Berlin),
A. Mayer (Leipzig),
Fr. Meyer (Clausthal),
G. Meyer (Bremen),
H. Minkowski (Bonn),
R. Müller (Braunschweig),
E. Papperitz (Dresden),
A. Ritter (Aachen),
C. Rodenberg (Hannover),
C. Runge (Hannover),
C. Schilling (Bremen),
E. Schröder (Karlsruhe),
H. Schubert (Hamburg),
E. Study (Marburg),
R. Sturm (Münster),
H. Weber (Marburg),
H. Wellmann (Bremen),
H. Wiener (Halle),
E. Wiltheiss (Halle).

Die zahlreichen Beitrittserklärungen, die auf diese Einladung hin von Seiten der Lehrer an Hoch- und Mittelschulen erfolgten, bewiesen die Zustimmung, welche die Zwecke und Ziele der Vereinigung allseitig fanden.

Das erste im März 1891 ausgegebene Mitgliederverzeichnis weist 160 Namen auf.

Für die im Herbst 1891 zu Halle angesetzte Versammlung konnte ein reiches Programm von wissenschaftlichen Vorträgen auf die Tagesordnung gesetzt werden.

Herr L. Kronecker sollte einen Eröffnungsvortrag halten, in dem er einmal die Erwartungen, die sich an die Vereinigung knüpfen können, bezeichnen wollte, und der weiter eine Gedächtnisrede auf Eisenstein beabsichtigte. Leider traf Kronecker im August ein schwerer Schicksalsschlag durch den Tod seiner Gattin; so war es ihm unmöglich, nach Halle zu kommen; in einem Schreiben an Herrn G. Cantor aber gab er seinen Anteil an der Versammlung und in kurzen Umrissen den Plan seines Vortrages kund. — Nun beabsichtigte er, in breiter Ausführung diesen Vortrag der Vereinigung als die Einleitung des ersten Jahresberichtes zu überlassen — es sollte nicht dazu kommen. Am 29. Dezember 1891 wurde die wissenschaftliche Welt durch die Nachricht von dem Tode Kronecker's erschüttert. Die Influenza und eine dazutretende Lungenentzündung hatten in wenigen Tagen seinem reichen, fruchtbringenden Leben ein Ende gemacht. Wir verzichten hier, näher einzugehen auf die Grösse und Bedeutung dieses Verlustes für die Wissenschaft. Eine auf der kommenden Versammlung in Nürnberg zu haltende Gedächtnisrede

soll von Kronecker's Wirken handeln. Hier geben wir Ausdruck den Gefühlen aufrichtigen Dankes, welchen unsere junge Vereinigung, deren Plänen und Zielen er von Anfang an ein warmes Interesse entgegenbrachte, ihm schuldet. An der Spitze der Vorträge der Versammlung in Halle aber stehe, als ein Vermächtnis an unsere Vereinigung, der erwähnte Brief. —

Von den in Halle gehaltenen Vorträgen sei hier besonders der umfangreiche Bericht des Herrn Franz Meyer hervorgehoben: „Ueber die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert". Er verwirklicht den schon in Heidelberg ausgesprochenen Wunsch, eine Hauptaufgabe der Vereinigung in ausführlichen Referaten über gemeinsam interessirende Gebiete der Mathematik zu suchen. Der dritte Teil des gegenwärtigen Berichtes umfasst das weiter ausgeführte Referat, für dessen opferwillige, den Interessen des Ganzen dienende Abfassung namens der Vereinigung an dieser Stelle dem Verfasser der gebührende Dank ausgesprochen sei.

Ueber die weiteren in Halle gehaltenen Vorträge ist im zweiten Teil durch die Verfasser kurzer Bericht erstattet. Die Herren C. Neumann und R. Dedekind waren am persönlichen Erscheinen verhindert; über ihre Vorträge wurde von Seiten Herrn G. Cantor's referirt.

Bezüglich der geschäftlichen Sitzungen verweisen wir auf das am Schlusse des Berichts abgedruckte Protokoll, welchem auch die Statuten und die Geschäftsordnung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, wie sie in Halle beschlossen wurden, beigedruckt sind.

Wir haben die traurige Pflicht, unsere Mitteilungen mit den Nekrologen zweier Mitglieder zu schliessen, welche unsere junge Vereinigung im verflossenen Jahre verloren hat.

Herr Benno Klein, Professor a. d. Universität Marburg starb am 26. März 1891 zu Schöneberg bei Berlin. Ihm widmete G. Cantor in seiner Eröffnungsrede in Halle Worte des Andenkens und der Anerkennung. Der nachfolgende Nekrolog ist dem Jahresbericht der Universität Marburg entnommen.

Herr Paul Günther, Privatdocent an der Universität Berlin erlag am 27. September 1891 zu Berlin einem schweren Leiden. Die ihm gewidmeten Zeilen rühren von der Hand seines Freundes K. Hensel her.

Des Todes von Leopold Kronecker haben wir schon oben gedacht. Der Anfang des neuen Jahres fügte zu diesem Verluste den von Heinrich Schröter, der am 3. Januar gleichfalls vorzeitig aus einer reichen wissenschaftlichen Thätigkeit abberufen wurde. Seinem Andenken soll, wie dem von Kronecker, auf der Versammlung in Nürnberg eine Gedächtnisrede gewidmet werden.

Endlich verschied am 2. Februar 1892 im 62. Lebensjahre Herr Heinrich Gretschel, Bergrat und Professor der Mathematik an der Bergakademie zu Freiberg in Sachsen. Ein Nekrolog wird im nächsten Jahresbericht gegeben werden.

Benno Klein.

Benno Klein ist am 5. October 1846 in Stolp in Pommern geboren, wo sein Vater Rabbiner war. Er besuchte das dortige Gymnasium, bis die Eltern im Jahre 1859 nach Glogau übersiedelten. Dort besuchte er das Gymnasium weiter bis zum Jahre 1863 und verliess es ein halbes Jahr vor dem Abiturientenexamen um auf Wunsch der Eltern sich dem Kaufmannsstande zu widmen. Er fühlte sich aber in diesem Berufe so unglücklich und unbefriedigt, dass er noch spät den Entschluss fasste, zu studiren. Von 1871 an bereitete er sich mit Hilfe von Freunden zur Maturitätsprüfung vor, die er zu Ostern 1872 am Gymnasium zu Guben bestand.

Er betrieb nun eifrig das Studium der Mathematik und Physik zunächst in Berlin, dann in Marburg und zuletzt in Strassburg, wo er im Juli 1876 zum Doctor promovirt wurde. Da er sich noch nicht hinreichend reif fühlte, um die akademische Lehrthätigkeit zu beginnen, so kehrte er nach Berlin zurück, wo er bis zum Jahre 1881 privaten Studien oblag. Im Jahre 1881 habilitirte er sich in Marburg und wurde hier am 13. Dez. 1890 zum ausserordentlichen Professor ernannt. Seit dem Jahre 1874 hatte Klein mit einem Augenleiden zu kämpfen, das der Anfang und Vorbote einer tieferen Erkrankung war, der er am 26. März 1891 erlegen ist. Trotz der Schwierigkeiten, die ihm aus diesem Leiden erwuchsen, und die ihm den Gebrauch von fremder Hilfe nötig machten, war Klein in der Wissenschaft und als Lehrer unausgesetzt und mit Erfolg thätig.

Schriften von B. Klein.

Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene. Inaugural-Dissertation, Berlin 1876.

Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Habilitationsschrift, Marburg, Elwert, 1881.

Ueber das Doppelverhältnis von vier Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung. Schlömilch Z. Bd. 28. 1883.

Ueber den Fundamentalsatz der Geometrie der Lage. Sitzber. d. Marb. Ges. v. 1. Febr. 1887, 4. Sept. 1887, 27. Jan. 1888.

Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. Teil I, Annali di Matematica, ser. II[a] tomo XVIII (1890). Teil II, ebenda, tomo XIX (1891). Teil III, ebenda, tomo XIX (1891).

Paul Günther.

Paul Günther ist am 2. April 1867 in Bernburg geboren, wo sein Vater Gymnasialdirector war. Nachdem er in seiner Vaterstadt das Gymnasium absolvirt hatte, kam er im Frühjahr 1884 nach Berlin, wo er hauptsächlich unter Leitung von Kronecker, Weierstrass und Fuchs studirte; auch von Hamburger hat er viele wissenschaftliche und persönliche Anregung empfangen. Im Jahre 1889 promovirte er auf Grund seiner im Journal für Mathematik Bd. 105 veröffentlichten Arbeit „Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten".

Seine weiteren (ebenfalls im Journal f. die reine und angew. Math. veröffentlichten Arbeiten) sind:

Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen (Bd. 106, 1890).

Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Bd. 107, 1891).

Zur Theorie der elliptischen Functionen (Bd. 108 und Bd. 109, 1891).

Ueber die eindeutigen Functionen von zwei durch eine algebraische Gleichung verbundenen Veränderlichen (Bd. 109, 1892).

Ueber das Additionstheorem der elliptischen Functionen (Bd. 109, 1892).

Die letzten Aufsätze sind erst nach dem Tode des Verfassers erschienen.

Im Sommer 1890 habilitirte sich Günther an der Berliner Universität, konnte jedoch nur im darauffolgenden Wintersemester lesen; denn schon im Frühjahr 1891 erkrankte er an einer Drüsengeschwulst so bedenklich, dass seine Freunde schnell ihre zuerst gehegten Hoffnungen auf baldige Besserung seines Zustandes schwinden sahen. Er suchte in Tölz, dann in Cudowa Heilung, kehrte jedoch im September in einem so hoffnungslosen Zustande zurück, dass auch ein operativer Eingriff nicht mehr gewagt werden konnte. Am 27. September 1891 starb er.

Die Wissenschaft verliert in Günther einen vielseitig und reich begabten jungen Gelehrten, der zu den schönsten Hoffnungen berechtigte; seine Freunde betrauern den Verlust eines lauteren, rein empfindenden und geistig hochstehenden Menschen.

Bericht
über die geschäftlichen Sitzungen der Versammlung zu Halle mit Rechnungsablage des Vorstandes.

1. In der Sitzung vom 24. September legt der Schriftführer, Herr Dyck, das neu gegründete Archiv der Vereinigung vor und erstattet den Kassenbericht über das verflossene Vereinsjahr, der hier folgt:

Kassenbericht.

Einnahmen	M.	Pf.	Ausgaben	M.	Pf.
Rest von der Bremer Versammlung . . .	1	10	Drucksachen	57	30
Beiträge von 179 Mitgliedern (darunter ein Beitrag für $2^1/_2$ Jahre)	364	—	Verzeichnisanfertigung und Schreibarbeiten .	60	—
			Buchbinder	16	86
			Papier und Utensilien	11	70
			Adressbücher	10	70
			Postporto	44	38
	365	10		200	94

Kassenbestand pro 1892: M. 164.16.

W. Dyck als Kassenführer; K. Rohn, G. Hettner als Revisoren.

2. In den Sitzungen vom 24. und 26. September werden die vom Vorstande ausgearbeiteten Statuten, die Geschäftsordnung und notwendige Uebergangsbestimmungen beraten, welche in der beschlossenen Fassung unten folgen.

3. Schon im Vorjahre hat der Vorstand der Vereinigung einleitende Schritte gethan betreffs der auf die Tagesordnung der Versammlung im Herbst 1892 (zu Nürnberg) zu setzenden Referate. Die hiefür entworfenen Pläne werden eingehend besprochen, und von Seiten der Versammlung der Wunsch ausgedrückt, es sollen nach Möglichkeit in Aussicht genommen werden:

a. Referate und Uebersichten über moderne Arbeiten aus den Gebieten der angewandten Mathematik, die sich einmal auf technische Mechanik, dann auf Astronomie und auf moderne physikalische Fragen beziehen.

b. Aus dem Gebiete der reinen Mathematik, Referate über die Theorie der algebraischen Functionen und der Modulsysteme.

c. Mit der Nürnberger Versammlung soll ferner eine umfassende Ausstellung von mathematischen und mathematisch-physikalischen Modellen und Apparaten verbunden werden.

4. Die vorgenommene Neuwahl des Vorstandes ergiebt als Vorstandsmitglieder folgende Herren: G. Cantor, W. Dyck, P. Gordan, L. Kronecker, E. Lampe, H. Schubert.

Der Vorstand wählt von diesen für 1892 die Herren: G. Cantor zum Vorsitzenden, W. Dyck zum Schriftführer, sowie die Herren G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe als Redactionscommission für den Jahresbericht.

Statuten
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891 gefassten Beschlüssen.)

§ 1.

Zweck der Vereinigung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung stellt sich die Aufgabe, in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

§ 2.

Jahres-Versammlung.

Die Vereinigung hält alljährlich eine Versammlung ab, in Gemeinschaft mit der „I. Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte“.

§ 3.

Vorstand der Vereinigung.

In der Jahresversammlung wählen die dort anwesenden Mitglieder der Vereinigung einen Vorstand von sechs Mitgliedern. Derselbe darf sich nötigenfalls durch Cooptation auf sechs ergänzen.

Die Wahl der Vorstandsmitglieder geschieht je auf drei Jahre.

Dabei scheiden alljährlich zwei Mitglieder aus und werden durch Neuwahl ersetzt. Das Ausscheiden geschieht in der Reihenfolge des Eintritts. Die Ausscheidenden können erst nach zwei Jahren wieder gewählt werden — nur der Schriftführer (§ 5) ist sofort wieder wählbar. Der Amtsantritt fällt auf den 1. Januar.

§ 4.

Aufgaben des Vorstandes. Jahresbericht.

Der Vorstand ist beauftragt mit der Vertretung der gesamten Interessen der Vereinigung.

Im Einzelnen hat er die Aufgabe, die Jahresversammlung vorzubereiten durch Aufstellung eines ausführlichen Programms, in welches womöglich Referate über die Entwickelung einzelner Gebiete der Wissenschaft aufzunehmen sind.

Weiter veröffentlicht der Vorstand den Jahresbericht der Vereinigung über den wissenschaftlichen Teil der Verhandlungen. Derselbe ist den Mitgliedern zu ermässigtem Preise zugänglich zu machen; die Liste der Mitglieder und die Jahresrechnung sind ihm beizudrucken.

§ 5.

Geschäftsführung im Vorstande.

Der Vorstand wählt jährlich aus seiner Mitte:

a) den Vorsitzenden, in jährlichem obligatorischen Wechsel. Derselbe

leitet die Sitzungen des Vorstandes und die geschäftlichen Sitzungen der Vereinigung;

b) den Schriftführer, gleichzeitig mit der Führung der Kasse und des Archivs der Vereinigung beauftragt;

c) die engere Commission für die Redaction des Jahresberichtes.

§ 6.

Mitgliedschaft.

Die Mitgliedschaft zur Vereinigung wird erworben durch Anmeldung bei dem Schriftführer. Mit ihr ist die Verpflichtung zur Zahlung eines Jahresbeitrages von zwei Mark für das laufende Kalenderjahr verbunden. Der jährliche Beitrag kann durch eine einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Geschäftsordnung
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891 gefassten Beschlüssen.)

§ 1.

Die Redaction des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ übernimmt der Vorstand, welcher mit der speziellen Ausführung die in § 5 der Statuten erwähnte engere Commission beauftragt.

Alle auf den Jahresbericht bezüglichen Zusendungen sind an den Schriftführer der Vereinigung zu richten.

§ 2.

Im Jahresberichte sind zu unterscheiden:

a) Die Mitteilungen über die in der Jahresversammlung gehaltenen Spezialvorträge.

b) Die grösseren wissenschaftlichen Referate.

a) Die ersteren dürfen den Raum von zwei Druckseiten für einen Vortrag nicht überschreiten; sie sind noch auf der Jahresversammlung selbst der Redactionscommission einzuhändigen.

b) Der Umfang der wissenschaftlichen Referate ist innerhalb der mit dem Verleger einzuhaltenden Verträge nicht beschränkt. Für die Einsendung der Manuscripte dieser Referate wird ein Zeitraum von sechs Wochen nach Schluss der Versammlung festgesetzt.

§ 3.

Das vom Verleger für die Publication des Berichtes gezahlte Honorar fliesst in die Kasse der Vereinigung. Die wissenschaftlichen Referate (§ 2b) werden den betreffenden Berichterstattern gemäss dem vom Verleger pro Bogen gezahlten Betrage honorirt. Jeder Referent und ebenso die Autoren der übrigen Mitteilungen erhalten ausserdem 25 Separatabzüge ihres Berichtes. Weitere Separatabzüge können sich dieselben auf ihre Kosten, nach Vereinbarung mit dem Verleger, machen lassen.

Uebergangsbestimmungen.

(Nach den Festsetzungen der Geschäftssitzung vom 24. September 1891 mit den Ergänzungen vom 26. September.)

1. Wahl des Vorstandes für die nächsten beiden Jahre.

In den nächsten beiden Jahren wird das Ausscheiden je zweier Mitglieder des Vorstandes durch das Los geregelt.

Nachdem die am 24. September 1891 vorgenommene Vorstandswahl einmal die Herren:

Cantor, Dyck, Lampe, Schubert

des bisherigen Vorstandes und weiter die Herren

Gordan, Kronecker

als Neueintretende ergeben hat, sind die letzteren beiden als auf drei Jahre gewählt zu betrachten.

Im Jahre 1892 bestimmt das Los unter den vier erstgenannten die beiden durch Neuwahl zu Ersetzenden. Im Jahre 1893 scheiden die letzten beiden Mitglieder des bisherigen Vorstandes aus.

2. Veröffentlichung des Jahresberichtes.

Der Vorstand wird ermächtigt, betreffs der Herausgabe des Jahresberichtes mit einem Verleger einen Vertrag abzuschliessen auf Grund der in den Statuten und der Geschäftsordnung enthaltenen Bestimmungen. Und zwar sollen die Verhandlungen zunächst mit der Verlagsbuchhandlung von G. Reimer in Berlin, dem Verleger des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, geführt werden.

Zusätze
zu den vorstehenden geschäftlichen Mitteilungen.

1. Nachdem durch den Tod von L. Kronecker die Vorstandsmitglieder sich auf 5 reducirten, beschlossen diese einstimmig, von dem Rechte der Cooptation Gebrauch machend, Herrn Th. Reye zum Wiedereintritt in den Vorstand aufzufordern. Wir sind Herrn Reye Dank schuldig, dass er unserem Ansuchen willfahren hat.

2. Von den vorstehend abgedruckten Uebergangsbestimmungen ist die erste, auf die Vorstandswahlen der nächsten beiden Jahre bezügliche, durch einen in Nürnberg zu fassenden Beschluss entsprechend abzuändern.

3. Bezüglich der Herausgabe des Jahresberichts wurde der Vertrag mit Herrn Ernst Reimer, dem Inhaber der Verlagsbuchhandlung Georg Reimer in Berlin, in der ersten Hälfte des Monats Mai 1892 abgeschlossen.

Mitglieder-Verzeichnis

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

nach dem Stande vom 1. Juni 1891.

Archenhold, F. S., Charlottenburg.
Bacharach, J., Reallehrer an der Realschule, Erlangen.
Bauer, G., Professor an der Universität, München.
Beck, A., Professor am Polytechnicum, Riga.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
Böger, R., Oberlehrer an der höheren Bürgerschule, Hamburg.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, München.
Braunmühl, A. v., Professor an der technischen Hochschule, München.
Brill, A., Professor an der Universität, Tübingen.
10. Brunn, H., Privatdocent an der Universität, München.
Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig.
Buka, F., Professor am Realgymnasium, Charlottenburg, und an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Burkhardt, H., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
Burmester, L., Professor an der technischen Hochschule, München.
Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg.
Cantor, G., Professor an der Universität, Halle.
Cantor, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
Carajianides, A., Göttingen.
Czuber, E., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
20. Dantscher v. Kollesberg, Professor an der Universität, Graz.
Dingeldey, F., Privatdocent an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München.
Dörgens, R., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Dyck, W., Professor an der technischen Hochschule, München.
Dziobek, O., Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Eberhard, V., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.

Engel, F., Professor an der Universität, Leipzig.
Färber, C., Lehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin.
30. Finger, J., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Fink, K., Professor an der Realschule, Tübingen.
Finsterwalder, S., Professor an der technischen Hochschule, München.
Franklin, F., Professor an der Johns Hopkins Universität, Baltimore.
Franz, J., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Fricke, R., Privatdocent an der Universität, Kiel.
Frobenius, G., Professor am Polytechnicum, Zürich.
Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin.
Fuhrmann, A., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Gerhardt, K. J., Gymnasial-Director a. D., Halle a. S.
40. Gierster, J., Studienlehrer am Wilhelms-Gymnasium, München.
Götting, E., Lehrer am Gymnasium, Göttingen.
Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen.
Graefe, F., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Grassmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Halle a. S.
Günther, S., Professor an der technischen Hochschule, München.
Gutzmer, A., Berlin.
Häntzschel, E., Oberlehrer an der dritten höheren Bürgerschule, Berlin.
Hamburger, M., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
50. Hauck, G., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hecht, Professor, Studienlehrer am Melanchthon Gymnasium, Nürnberg.
Heffter, L., Professor an der Universität, Giessen.
Helm, G., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin.
Henneberg, L., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin.
Hermes, J., Oberlehrer am Progymnasium, Königsberg i. Pr.
Hertzer, H., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Herz, N., Wien.
60. Hess, E., Professor an der Universität, Marburg.
Hettner, G., Professor an der Universität, Berlin.
Hilbert, D., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Hölder, O., Professor an der Universität, Tübingen.
Holländer, E., Lehrer an der Realschule, Mülheim a. d. Ruhr.
Hoppe, R., Professor an der Universität, Berlin.
Horn, J., Privatdocent an der Universität, Freiburg i. B.
Hurwitz, A., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg.
Jürgens, E., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
70. Junker, F., Professorats-Candidat, Schorndorf (Württemberg).

Kasten, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Keck, L., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Kepinski, S., Göttingen.
Kiepert, L., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Killing, W., Professor am Lyceum Hosianum, Braunsberg.
Klein, F., Professor an der Universität, Göttingen.
Klein, G., Professor am Realgymnasium, München.
Klemm, F., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat.
80. Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin.
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg.
Königsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg.
Köpke, A., o. Lehrer an der Realschule, Ottensen.
Kötter, E., Privatdocent an der Universität, Berlin.
Kötter, F., Docent an der Berg-Akademie, Berlin.
Kohn, G., Privatdocent an der Universität, Wien.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
Kraft, F., Privatdocent am eidgen. Polytechnicum, Zürich.
Krause, M., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
90. Krazer, L., Professor an der Universität, Strassburg i. E.
Kullrich, Adjunct am Joachimsthaler Gymnasium, Charlottenburg.
Lampe, E., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Lerch, M., Privatdocent an der Universität, Prag.
Ligowski, W., Professor an der Marine-Akademie, Kiel.
Lommel, E., Professor an der Universität, München.
London, F., Privatdocent an der Universität, Breslau.
Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B.
Mangoldt, H. v., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Maurer, L., Privatdocent an der Universität, Strassburg.
100. Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig.
Mehmke, R., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Meyer, A., Professor an der Universität, Zürich.
Meyer, F., Professor an der Berg-Akademie, Clausthal.
Meyer, G., Lehrer an der Realschule, Bremen.
Meyer, G. F., Professor am Realgymnasium, München.
Minkowski, H., Privatdocent an der Universität, Bonn.
Müller, F., Professor am Luisen-Gymnasium, Berlin.
Müller, R., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig.
Müller, R., Lehrer an der Königl. Realschule, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
110. Neumann, C., Professor an der Universität, Leipzig.
Netto, E., Professor an der Universität, Giessen.
Nöther, M., Professor an der Universität, Erlangen.
Papperitz, E., Professor an der Berg-Akademie, Freiberg i. S.
Pasch, M., Professor an der Universität, Giessen.

Pelz, C., Professor an der technischen Hochschule, Graz.
Peschka, A. v., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Piltz, A., Privatdocent an der Universität, Jena.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel.
Pockels, F., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
120. Pringsheim, A., Professor an der Universität, München.
Prym, F., Professor an der Universität, Würzburg.
Reinhardt, C., Oberlehrer an der Fürstenschule, Meissen.
Reuschle, C., Professor an der technischen Hochschule, Stuttgart.
Reye, Th., Professor an der Universität, Strassburg i. E.
Richarz, Privatdocent an der Universität, Bonn.
Richter, Lehrer am Gymnasium, Quedlinburg.
Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Ritter, A., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Ritter, E., Cassel.
130. Rodenberg, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Rogel, F., Lehrer an der Staats-Gewerbeschule, Brünn.
Rohn, K., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau.
Rosenow, H., Rector an der 9. höheren Bürgerschule, Berlin.
Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg.
Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich.
Runge, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Schapira, H., Professor an der Universität, Heidelberg.
140. Scheffers, G., Privatdocent an der Universität, Leipzig.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig.
Schell, W., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Schilling, C., Professor an der Navigationsschule, Bremen.
Schlegel, V., Oberlehrer an der Gewerbeschule, Hagen i. W.
Schlesinger, L., Privatdocent an der Universität, Berlin.
Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden.
Schmidt, M., Professor an der technischen Hochschule, München.
Schönflies, A., Professor an der Universität, Göttingen.
Schottky, F., Professor am Polytechnicum, Zürich.
150. Schröder, E., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg.
Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg.
Schultz, E., Lehrer am Realgymnasium, Stettin.
Schumacher, H., Reallehrer an der Realschule, Neustadt a. H.
Schumacher, R., Reallehrer an der Realschule, Augsburg.
Schur, F., Professor an der Universität, Dorpat.
Schur, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Schwering, K., Director am Gymnasium, Düren.
Seelhoff, P., Professor an der Navigationsschule, Bremen.
160. Seeliger, H., Professor an der Universität, München.

Seidel, Ph. L. von, Professor an der Universität, München.
Servus, H., o. Lehrer an dem Friedrichs-Realgymnasium, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Siebert, A., Lehrer an der Hauptcadetten-Anstalt, Gross-Lichterfelde.
Sievert, H., Studienlehrer am neuen Gymnasium, Nürnberg.
Simon, H., Assistent an der Universitätsbibliothek, Berlin.
Simon, M., Professor am Lyceum, Strassburg i. E.
Sinram, H. Th., Hamburg.
Sprung, A., Professor am Meteor. Inst., Berlin.
Stäckel, P., Privatdocent an der Universität, Halle.
170. Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen.
Staude, O., Professor an der Universität, Rostock.
Stern, M. A., Professor a. D. der Universität Göttingen, Zürich.
Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck.
Study, E., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena.
Valentin, G., Custos an der Königl. Bibliothek, Berlin.
Van Vleck, E. B., Göttingen.
180. Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel.
Voss, A., Professor an der Universität, Würzburg.
Walder, E., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle.
Weber, H., Professor an der Universität, Göttingen.
Weierstrass, C., Professor an der Universität, Berlin.
Weiler, A., Privatdocent am Polytechnicum, Zürich.
Weingarten, J., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forst-Akademie, Tharand.
190. Wellmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Weltzien, C., ord. Lehrer an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin.
Westermann, H., Oberlehrer an der Vorschule der technischen Hochschule, Riga.
Weyer, G. D., Professor an der Universität, Kiel.
Weyr, Em., Professor an der Universität, Wien.
Wiener, Chr., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Wiener, H., Privatdocent an der Universität, Halle.
Wiltheiss, E., Professor an der Universität, Halle.
Wirtinger, W., Privatdocent an der Universität, Wien.
Wölffing, E., Professorats-Candidat, Stuttgart.
200. Wolf, M., Privatdocent an der Universität, Heidelberg.
Worpitzky, J., Professor am Friedrichs-Werderschen Gymnasium und an der Kriegsakademie, Berlin.

Zillmer, Grosslichterfelde.

Ziwet, A., Assistant Professor, University of Michigan, Annarbor, Mch. U. S. A.

Zorawski, K., Göttingen.

Züge, Oberlehrer am Gymnasium, Lingen a. d. Ems.

Verstorbene Mitglieder.

H. Gretschel, Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S.

P. Günther, Privatdocent an der Universität, Berlin.

B. Klein, Professor an der Universität, Marburg.

L. Kronecker, Professor an der Universität, Berlin.

H. Schröter, Professor an der Universität, Breslau.

Bericht
über die wissenschaftlichen Sitzungen
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

in Verbindung mit der ersten Abteilung
für Mathematik und Astronomie
der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte
abgehalten auf der Versammlung zu Halle
22.—26. September 1891.

Auszug
aus einem Briefe von L. Kronecker
an Herrn Prof. G. Cantor*).

Jugenheim a. d. Bergstrasse, 18. IX. 91.

Geehrtester Freund und College!

Gleich nach dem schweren, schweren Schlage, der das Glück meines Lebens zerstört hat, habe ich Ihnen geschrieben, dass ich nun natürlich nicht im Stande bin, am 21. d. M. den übernommenen Eröffnungsvortrag in der Abteilung für Mathematik und Astronomie zu halten. Aber ich will Ihnen heute doch noch ein Paar Worte über dasjenige Thema sagen, was ich in dem Vortrage zu behandeln gedachte.

Einleiten wollte ich den Vortrag mit einigen Bemerkungen über das, was meiner Meinung nach von der „Vereinigung deutscher Mathematiker" erwartet werden kann. Denn, nachdem ich den ehrenvollen Antrag, den Sie mir gestellt haben, angenommen habe, glaubte ich, dem reinen Fachvortrage die Darlegung meiner Ansichten über Mathematiker-Vereinigungen gerade deshalb vorausschicken zu sollen, weil deren Bedeutung notwendig eine ganz andere sein muss, als die der Vereinigungen anderer Fachgenossen. Während andere Disciplinen mancherlei Arbeiten erfordern, die den Bearbeitern „aufgegeben" werden können, und auch solche, die geradezu von vereinten Kräften geleistet werden müssen (die Astronomie bietet ja hierfür viele Beispiele), während es also in fast allen anderen naturwissenschaftlichen Disciplinen vorkommt, dass, „wenn die Könige bauen, die Kärrner zu thun haben", muss bei uns jeder Forscher König und Kärrner zugleich sein. Darum geben wir Mathematiker eigentlich das Beispiel einer echten Gelehrtenrepublik, in welcher jeder einzelne seine volle Forscherselbständigkeit bewahrt. Ich mag auch deshalb bei uns nicht den Ausdruck „Schüler" gern; wir wollen und brauchen keine Schule, sondern wir gehen nur in den Wegen fort, die uns ein

---

*) Vergl. Chronik S. 7—8.

Lehrer oder Vorgänger geebnet und gewiesen hat, wenn wir meinen, auf diesen Wegen weitere Ziele erreichen zu können. „Wir wollen und brauchen keine Schule“, weil in unserer absolut klaren Wissenschaft jede neue Entdeckung die bisherige Schulweisheit wertlos machen kann. Das hat uns ja die Geschichte unserer Wissenschaft oft genug gezeigt. Wir können deshalb aber auch durchaus nichts Förderliches von einer in der Weise „gemeinsamen Arbeit“ erwarten, die — wie die andern Disciplinen — sich mit speciellen Thematen beschäftigt. Im Gegenteil, solcherlei Arbeit kann nur den Fortschritt der Mathematik hindern. Der Mathematiker muss frei von jeglichem Vorurteil sich gedanklich in seiner Forschungssphäre heimisch machen, darin frei Umschau halten und Entdeckungen nachgehen; — eine Gesellschaft, etwa gar geführt von einem noch so trefflichen Lehrer, wird niemals im Stande sein, das Gebiet unserer Kenntnis merklich zu erweitern. So sehr ich hiernach „Vereinigung von Mathematikern“ zu speciellen Arbeitszwecken perhorresciren möchte, so sehr möchte ich einer allgemein freien Vereinigung das Wort reden. Deren Erfolg kann freilich nicht genau präcisirt werden, und auch an der Wortfassung der „Zwecke“ in Ihrer Publication vom December 1890 würde ich manches modificirt wünschen. Aber es kommt wenig darauf an. Die Hauptsache ist die Gelegenheit zur Einleitung persönlicher Verbindungen, zur mündlichen Discussion, zum lebendigen Austausch der in der Forschung gemachten Erfahrungen, zur gegenseitigen Mitteilung der auf Grund von Untersuchungen erlangten Ansichten. Niemand wird ja Wert und Bedeutung der mündlichen Vorträge in der Mathematik auf den Hochschulen unterschätzen, wie sehr auch die Studirenden daneben auf das Studium der Lehrbücher, Originalwerke und Abhandlungen zu verweisen sind; denn in diesen fehlt es z. B. stets an den Angaben, welche Irrwege und „Holzwege“ zu vermeiden sind. Nun hört ja der Mathematiker nicht zu studiren auf, wenn seine Studentenzeit abgelaufen ist; aber er ist dann ausschliesslich auf die litterarische Belehrung angewiesen, falls ihm nicht besonders glückliche Umstände noch die Fortsetzung mündlicher Belehrung durch persönlichen wissenschaftlichen Verkehr gestatten. Das Glück eines solchen habe ich in reichlichem Masse genossen und weiss es also aus Erfahrung zu schätzen; die etwa 20 Jahre von 1856 bis nahe 1876, in denen wir drei, Kummer, Weierstrass und ich, des engsten und lebhaftesten wissenschaftlichen Verkehrs uns erfreuten, haben nicht bloss uns selbst, sondern auch vielen andern, die ab und zu an unserem Verkehr teilnahmen, reiche Früchte und den Segen wahrer geistiger Erbauung gebracht. Ich sehe den

Hauptzweck der „Vereinigung deutscher Mathematiker“ darin, dass sie nach solchem Muster persönlichen wissenschaftlichen Verkehr ermöglicht. Wie verschieden wir drei Berliner Mathematiker auch in unseren Arbeitsrichtungen, ja selbst zum Teil in unseren Ansichten über Begründung und Zielpunkte gewesen und geblieben sind, der gegenseitige Einfluss war stets heilsam und wohlthuend.

Doch genug davon! Sie ersehen ja aus Vorstehendem den ungefähren Inhalt der einleitenden Bemerkungen, die ich meinem Eröffnungsvortrage vorausschicken wollte. Der Vortrag selbst sollte kurzweg den Titel haben „Ueber Eisenstein“ oder auch „Zum Gedächtnis von Eisenstein“. Ich wollte darin nur ganz kurz über die Zeit berichten, in der ich mit ihm persönlich bekannt war, auch einige Briefe wissenschaftlichen Inhalts, die ich von ihm besitze, mitteilen und danach — wie etwa in einer Gedenkrede — über seine Arbeiten sprechen. Dabei mussten dann ausser den rein arithmetischen und analytisch-arithmetischen noch ganz besonders seine rein analytischen Untersuchungen über elliptische Functionen hervorgehoben werden, welche dem Bewusstsein der Jetztzeit ganz abhanden gekommen sind, auf welche ich aber bei meinen neuesten Arbeiten habe zurückkommen müssen. Jetzt in diesen meinen Arbeiten haben sich die eigentlichen Ursachen der „Unebenheiten“ gefunden, welche Eisenstein in seiner Theorie — wie sich deutlich erkennen lässt — unangenehm aufgefallen sind. Auch hierauf wollte ich näher eingehen. Ich hoffe, die Ausarbeitung des ganzen Vortrags, für den ich bis jetzt nur einige vorläufige Aufzeichnungen gemacht habe, noch durchführen zu können. Falls dies geschieht, kann der Vortrag vielleicht, wenn es Ihnen und der mathematischen Abteilung, welcher Sie präsidiren, angemessen erscheint, mit den wirklich gehaltenen Vorträgen (unter Hinzufügung einer geeigneten Vorbemerkung) gedruckt werden. Auch stelle ich Ihnen anheim, aus diesem Briefe, soviel Sie davon für geeignet halten, der mathematischen Abteilung auszugsweise mitzuteilen. Jedenfalls bitte ich, meine collegialischen Grüsse in einer der Verhandlungen auszurichten und dabei meinem tiefen Bedauern Ausdruck zu geben, dass ich durch mein Unglück am persönlichen Erscheinen verhindert bin. . . .

Einfacher Beweis eines F. Neumann'schen Satzes*)

von

C. Neumann (Leipzig).

Es sei ein Magnet gegeben von beliebiger Gestalt und Beschaffenheit. Wir stellen uns die Aufgabe, im Innern und an der Oberfläche des Magneten ein System elektrischer Ströme zu construiren, welches auf jedweden ausserhalb des Magneten befindlichen Magnetpol genau dieselbe Wirkung ausübt, wie der Magnet selber.

Zuvörderst mag eine gewisse Umgestaltung des Biot-Savart'schen Gesetzes ausgeführt werden. Bezeichnen x, y, z den Ort, und dx, dy, dz die Componenten eines linearen Stromelementes von der Stromstärke J, so werden nach jenem Gesetz die Componenten X, Y, Z der von diesem Element auf einen Magnetpol (x_1, y_1, z_1) ausgeübten Kraft die Werte haben:

$$(1)\quad \begin{cases} X = AJ\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dy - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,dz\right), \\[2ex] Y = AJ\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dz - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dx\right), \\[2ex] Z = AJ\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,dx - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dy\right), \end{cases}$$

wo $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ ist, und wo A eine Constante vorstellt, deren Wert verschieden ist je nach dem zu Grunde gelegten Mass-System. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Magnetpol (x_1, y_1, z_1) die magnetische Masse Eins hat, und dass das angewendete Coordinatensystem ein positives ist.

An Stelle von r mögen nun drei Functionen f, g, h eingeführt werden, die zu r in der Beziehung stehen:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial h}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

---

*) In Verhinderung des Verfassers durch Herrn G. Cantor vorgelegt.

Derartige Functionen existiren unendlich viele, so z. B. folgende:

$$(3)\qquad f=0,\quad g=-\frac{\xi\zeta}{(\eta^2+\zeta^2)r},\quad h=+\frac{\xi\eta}{(\eta^2+\zeta^2)r},$$

wo ξ, η, ζ zur Abkürzung stehen für $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$. Bei dieser besondern Wahl der Functionen f, g, h haben, wie man aus (2) ersieht, die Ableitungen derselben nach x die Werte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},\quad \frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y};$$

so dass also die erste der Formeln (1) auch so darstellbar ist:

$$X = AJ\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial x}dy+\frac{\partial h}{\partial x}dz\right),$$

oder auch so:

$$(4)\qquad X = -\frac{\partial}{\partial x_1}\{AJ(f dx+g dy+h dz)\}.$$

In analoger Weise sind offenbar auch die zweite und dritte der Formeln (1) darstellbar; nur sind dabei statt der speciellen Functionen f, g, h (3) jedesmal andere specielle Functionen f, g, h anzuwenden.

Nimmt man statt des bisher betrachteten linearen Stromelementes irgend ein körperliches Stromelement vom Volumen $d\tau$ und mit den Strömungscomponenten u, v, w, so erhält man an Stelle der Formel (4) folgende Formel:

$$(4a)\qquad X = -\frac{\partial}{\partial x_1}\{A(fu+gv+hw)d\tau\}.$$

Desgleichen ergiebt sich für ein flächenhaftes Stromelement die Formel:

$$(4b)\qquad X = -\frac{\partial}{\partial x_1}\{A(f\bar{u}+g\bar{v}+h\bar{w})d\sigma\},$$

wo $d\sigma$ die Fläche des Elementes und $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die in demselben enthaltenen Flächenströmungen vorstellen.

Dies vorausgeschickt, gehen wir jetzt über zu unserer Aufgabe. Das Potential des gegebenen Magneten auf einen äusseren Magnetpol (x_1, y_1, z_1) hat bekanntlich den Wert:

$$(5)\qquad \Omega = \int\left(a\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+b\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+c\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumenelemente $d\tau$ des Magneten. Dabei sind a, b, c gegebene Functionen von x, y, z. Und zwar repräsentiren a, b, c die magnetischen Momente in demjenigen Punkte (x, y, z), in welchem das Element $d\tau$ sich befindet. Ueberdies bezeichnet r den Abstand dieses Punktes vom Pole (x_1, y_1, z_1).

Substituirt man in (5) die Ausdrücke (2), so folgt:

$$\Omega = -\int\left[\left(c\frac{\partial f}{\partial y} - b\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau,$$

d. i.

$$\Omega = -\int\left[\left(\frac{\partial cf}{\partial y} - \frac{\partial bf}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau + \int\left[f\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau,$$

d. i.

$$(6) \qquad \Omega = +\int[f(c\beta - b\gamma) + \cdots]\, d\sigma + \int\left[f\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) + \cdots\right] d\tau.$$

In dieser letzten Formel ist das erste Integral ausgedehnt über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Magneten. Dabei bezeichnen α, β, γ die Richtungscosinus der auf $d\sigma$ errichteten inneren Normale.

Wir führen jetzt sechs neue Functionen ein: u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, definirt durch die Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} A\bar{u} = c\beta - b\gamma, & Au = \dfrac{\partial c}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial z}, \\ A\bar{v} = a\gamma - c\alpha, & Av = \dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial c}{\partial x}, \\ A\bar{w} = b\alpha - a\beta, & Aw = \dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial y}. \end{cases}$$

Alsdann geht die Formel (6) über in:

$$(8) \qquad \Omega = A\int(f\bar{u} + g\bar{v} + h\bar{w})\, d\sigma + A\int(fu + gv + hw)\, d\tau.$$

Hieraus ergiebt sich z. B. für die x-Componente der von dem Magneten auf den Pol (x_1, y_1, z_1) ausgeübten Kraft der Wert:

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{A\int(f\bar{u} + g\bar{v} + h\bar{w})\, d\sigma + A\int(fu + gv + hw)\, d\tau\right\}.$$

Und hieraus ergiebt sich in Anbetracht der Formeln (4a, b), dass diese x-Componente genau ebenso gross ist, wie die x-Componente derjenigen Wirkung, welche das durch u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ dargestellte Stromsystem auf jenen Pol (x_1, y_1, z_1) ausüben würde.

Die Formeln (7) repräsentiren daher die Lösung der gestellten Aufgabe. D. h. sie repräsentiren dasjenige Stromsystem u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, welches den gegebenen Magneten, was seine Einwirkung auf äussere Magnetpole betrifft, zu ersetzen im Stande ist.

Der durch die Formeln (7) ausgesprochene Satz dürfte wohl zum ersten Mal von meinem Vater aufgestellt sein. Man vergl. F. Neumann's Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von Von der Mühll, Leipzig, 1884, Seite 178, 179. Die dortigen Formeln (3), (4) bieten, den hier abgeleiteten Formeln (7) gegenüber, gewisse kleine Unterschiede dar, welche sich daraus erklären, dass die Constante A dort $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt ist, ferner daraus, dass statt des positiven ein negatives Coordinatensystem benutzt ist, endlich daraus, dass dort statt der inneren Normale (α, β, γ) die äussere Normale n eingeführt ist.

Die dort gegebene Ableitung des Satzes ist eine recht mühsame und beschwerliche. Allerdings könnte gegen die hier gegebene einfachere Ableitung ein Einwand erhoben werden, wenn auch nicht auf Grund des Biot-Savart'schen, so doch auf Grund des Ampère'schen Gesetzes. Nach der Ampère'schen Vorstellung sind nämlich Magnetpole nichts anderes als Solenoidpole. Und nach dem Ampère'schen Gesetz hat die von einem Stromelement auf einen solchen Magnetpol oder Solenoidpol ausgeübte Kraft allerdings die in (1) angegebenen Componenten X, Y, Z; — nur befindet sich der Angriffspunkt dieser Kraft nicht im Pole selber, sondern in einem Punkte, der dem Stromelement unendlich nahe liegt, und der mit jenem Pole durch einen starren Arm verbunden zu denken ist.

Oder man kann auch so sagen: Die Wirkung des Stromelementes auf den Magnet- oder Solenoid-Pol wird, bei Zugrundelegung des Ampère'schen Gesetzes, dargestellt sein erstens durch die den Pol selber erfassende Kraft:

$$(p) \qquad X, Y, Z$$

und zweitens durch ein den Pol erfassendes Drehungsmoment Δ, dessen Componenten die Werte haben:

$$(q) \qquad \Delta_x = \eta Z - \zeta Y, \quad \Delta_y = \zeta X - \xi Z, \quad \Delta_z = \xi Y - \eta X,$$

wo alle Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie bisher; so dass z. B. ξ, η, ζ Abbreviaturen sind für $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$.

Was nun das in (7) angegebene Stromsystem u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$

betrifft, so ist im Vorhergehenden nachgewiesen, dass die von diesem Stromsystem auf den Pol ausgeübten Kräfte (p) zusammengenommen eine Wirkung ergeben, die identisch ist mit der vom Magneten selber auf den Pol ausgeübten.

Es bleibt also nur noch zu zeigen übrig, dass die vom Stromsystem u, v, w, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ auf jenen Pol ausgeübten Drehungsmomente (q) zusammengenommen ein Drehungsmoment ergeben, welches $= 0$ ist.

Nun ist nach (1):

$$X = -AJ\frac{\zeta dy - \eta dz}{r^3},$$

$$Y = -AJ\frac{\xi dz - \zeta dx}{r^3},$$

$$Z = -AJ\frac{\eta dx - \xi dy}{r^3},$$

woraus z. B. folgt:

$$\Delta_x = \eta Z - \zeta Y = AJ\frac{\xi(\eta dy + \zeta dz) - (\eta^2 + \zeta^2)dx}{r^3},$$

d. i.

$$\Delta_x = AJ\left(\frac{\xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz)}{r^3} - \frac{dx}{r}\right).$$

Bezeichnet man also die Summe der von den Strömen u, v, w und $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ ausgeübten Δ_x respective mit D_x und $\overline{D}_x$, so ergiebt sich sofort:

$$D_x = A\int\left(\frac{\xi(\xi u + \eta v + \zeta w)}{r^3} - \frac{u}{r}\right)d\tau,$$

$$\overline{D}_x = A\int\left(\frac{\xi(\xi\overline{u} + \eta\overline{v} + \zeta\overline{w})}{r^3} - \frac{\overline{u}}{r}\right)d\sigma,$$

das eine Integral ausgedehnt über alle Volumenelemente $d\tau$ des Magneten, das andere über all' seine Oberflächenelemente $d\sigma$. Führt man nun neben D_x, $\overline{D}_x$, und mit diesen Grössen in analogem Sinn, die Bezeichnungen D_y, $\overline{D}_y$ und D_z, $\overline{D}_z$ ein, so wird zu zeigen sein, dass

$$D_x + \overline{D}_x = 0,$$

$$D_y + \overline{D}_y = 0,$$

$$D_z + \overline{D}_z = 0$$

ist. Uebrigens wird nur die erste dieser Formeln zu beweisen sein;

denn der Beweis der beiden andern wird sich alsdann in analoger Art führen lassen.

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(I)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\xi^2}{r^3} - \dfrac{1}{r} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\xi\eta}{r^3} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, \\ \mathfrak{C} = \dfrac{\xi\zeta}{r^3} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \end{cases}$$

so gewinnen die Ausdrücke der Momente D_x und $\overline{D}_x$ die einfachere Gestalt:

$$D_x = A\int(\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)d\tau,$$

$$\overline{D}_x = A\int(\mathfrak{A}\overline{u} + \mathfrak{B}\overline{v} + \mathfrak{C}\overline{w})d\sigma.$$

Hieraus folgt, wenn man für u, v, w, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ die Werte (7) einsetzt, sofort:

$$(II)\qquad D_x = \int\left[\left(\mathfrak{C}\frac{\partial b}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial c}{\partial x}\right) + \cdots\right]d\tau,$$

$$(III)\qquad \overline{D}_x = \int[(\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)\alpha + \cdots]d\sigma.$$

Die Formel (II) ist aber, in Anbetracht der aus (I) entspringenden Relationen:

$$\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}, \quad \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y},$$

und so darstellbar:

$$D_x = \int\left[\frac{\partial(\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)}{\partial x} + \cdots\right]d\tau.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(IV)\qquad D_x = -\int[(\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)\alpha + \cdots]d\sigma.$$

Endlich folgt aus (III) und (IV): $D_x + \overline{D}_x = 0$. — Q. e. d.

Bemerkung. — Die Wirkung eines einzelnen Stromelementes auf einen Magnetpol entspricht dem Biot-Savart'schen Gesetz, und besitzt daher kein Potential. Trotzdem aber wird ein solches Potential existiren, falls man nur voraussetzt, dass das Element einem geschlossenen linearen Strom angehört. — Um diese Behauptung zu rechtferti-

gen, gehen wir aus von dem bekannten Satz, dass das Potential V eines geschlossenen linearen Stromes J auf einen Magnetpol (von der magnetischen Masse Eins) den Wert hat:

$$V = AJ\varepsilon K = AJ\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der Stromfläche. Hier bezeichnet ν die auf $d\sigma$ errichtete positive Normale und r den Abstand des Elementes $d\sigma$ vom Pol. Ueberdies präsentirt εK die sogenannte reducirte Kegelöffnung. [Vgl. mein Werk: die elektrischen Kräfte, Leipzig, 1873 Seite 256 u. 242.] Dieser Wert des Potentials V ist offenbar auch so darstellbar:

$$V = AJ\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\gamma\right)d\sigma,$$

wo x, y, z die Coordinaten von $d\sigma$, und α, β, γ die Richtungscosinus der Normale ν bezeichnen. — Hieraus folgt nun mittelst der Substitution (2.):

$$V = AJ\int\left[\left(\beta\frac{\partial f}{\partial z} - \gamma\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\gamma\frac{\partial g}{\partial x} - \alpha\frac{\partial g}{\partial z}\right) + \left(\alpha\frac{\partial h}{\partial y} - \beta\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]d\sigma,$$

oder durch Anwendung eines bekannten Satzes [vgl. das citirte Werk, Seite 90, Nr. (22)]:

$$K = AJ\int(f\,dx + g\,dy + h\,dz),$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente dx, dy, dz der gegebenen in sich zurücklaufenden Stromcurve.

Obwohl also die Wirkung eines *einzelnen Stromelementes* auf einen Magnetpol im allgemeinen *kein* Potential besitzt, so wird trotzdem, wie die letzte Formel zeigt, ein solches Potential *angebbar*, und durch

$$AJ(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

dargestellt sein, falls man nur voraussetzt, dass das Element einem *geschlossenen linearen* Strom angehört. Dabei bezeichnen f, g, h drei den Bedingungen (2) entsprechende, im übrigen aber beliebig zu wählende Functionen.

Ueber Gleichungen mit rationalen Coefficienten*).

Von

R. Dedekind (Braunschweig).

Dass solche Sätze über Gleichungen, die für jeden endlichen Grad gelten, nicht ohne weiteres für Gleichungen von unendlich hohem Grade in Anspruch zu nehmen sind, wird zu unserer Zeit wohl von fast allen Mathematikern anerkannt. Da aber die Entscheidung über eine solche Frage bisweilen nicht leicht zu finden ist, so erlaube ich mir im folgenden einen besonderen, nicht unwichtigen Fall zu behandeln. In der Lehre von denjenigen Gleichungen, welche einen endlichen Grad und lauter rationale Coefficienten haben, wird der bekannte Satz bewiesen:

1. Hat die irreducible Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine Wurzel gemein mit der Gleichung $\psi(x) = 0$, so ist jede Wurzel der ersteren Gleichung auch eine Wurzel der letzteren.

Dieser Satz verliert aber, wenn die Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade ist, seine allgemeine Gültigkeit, und zwar selbst für solche Gleichungen, deren linke Seite $\psi(x)$ eine für alle Werthe von x convergirende Potenzenreihe mit rationalen Coefficienten ist. Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem Satze:

2. Ist α irgend eine reelle Zahl, so giebt es eine solche Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem oder auch endlichem Grade, welche α als einzige reelle Wurzel besitzt.

Ist nämlich dies bewiesen, so folgt daraus jedesmal ein offenbarer Widerspruch mit dem Satze 1., wenn man für α eine Wurzel einer irreducible Gleichung $\varphi(x) = 0$ (z. B. $x^2 - 2 = 0$) wählt, die mindestens zwei reelle Wurzeln α, β hat. Es kommt also nur noch darauf an, den Satz 2. zu beweisen, und hierbei darf man sich auf den Fall einer positiven Zahl α beschränken, weil auf diesen der entgegengesetzte Fall durch Verwandlung von x in $-x$ zurückgeführt wird; im Falle $\alpha = 0$ kann man natürlich $\psi(x) = x$ nehmen.

Aus jeder positiven Zahl α entsteht — in ähnlicher Weise und mit derselben Bestimmtheit, wie bei der Entwicklung in einen gemeinen Kettenbruch — immer eine Reihe von ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und eine Reihe von zugehörigen Resten, d. h. solchen Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, welche alle der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

genügen, nach folgender Regel: zunächst setze man

*) In Verhinderung des Verfassers durch Herrn G. Cantor vorgelegt.

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \varepsilon_1,$$

wodurch a_1 als die grösste in $\frac{1}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl, also auch ε_1 als Rest bestimmt ist; für jeden grösseren Index n aber setze man

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

wodurch auch alle folgenden Zahlen a als grösste Ganze und alle Reste ε vollständig bestimmt sind; zugleich leuchtet ein, dass von den Zahlen a keine negativ ist. Dann besitzt die vollkommen definirte Function

$$\psi(x) = -1 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^3}{1.2} + a_3 \frac{x^5}{1.2.3} + \cdots + a_n \frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} + \cdots$$

alle im Satze 2. angegebenen Eigenschaften. In der That:

1) Die Coefficienten von $\psi(x)$ sind sämtlich rationale Zahlen.

2) Da $\varepsilon_{n-1} < 1$, also $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$, so ist das allgemeine Glied der Reihe $\psi(x)$ absolut kleiner als

$$\frac{x}{\alpha^2} \cdot \frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

woraus bekanntlich folgt, dass die Reihe $\psi(x)$ (wie die Exponentialreihe) für jeden Wert von x convergirt.

3) Aus den Definitionen der Zahlen a und ε folgt, dass die aus (n+1) Gliedern bestehende Summe

$$-1 + a_1 \frac{\alpha}{1} + a_2 \frac{\alpha^3}{1.2} + a_3 \frac{\alpha^5}{1.2.3} + \cdots + a_n \frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)} = -\varepsilon_n \frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

ist, und da die rechte Seite mit unendlich wachsendem n unendlich klein wird, so folgt $\psi(\alpha) = 0$, d. h. α ist eine Wurzel der Gleichung $\psi(x) = 0$.

4) Da von den Zahlen a keine negativ, wohl aber mindestens eine positiv ist (wie aus $\psi(\alpha) = 0$ hervorgeht), da ferner, abgesehen von dem constanten Gliede -1, die Variable x in der Reihe $\psi(x)$ nur in Potenzen mit ungeraden Exponenten auftritt, so wird gleichzeitig mit x auch $\psi(x)$ das ganze reelle Gebiet von $-\infty$ bis $+\infty$ stets wachsend durchlaufen und folglich auch nur für den einzigen Wert $x = \alpha$ den Wert Null erhalten; d. h. die Gleichung $\psi(x) = 0$ hat ausser α keine reelle Wurzel, w. z. b. w.

Hiermit ist die Unzuverlässigkeit des Satzes 1. für Gleichungen $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade erwiesen. Dieser Nachweis ist wohl nicht ganz wertlos, weil verschiedene Mathematiker auf den Gedanken gekommen sind, durch Anwendung dieses unzuverlässigen Satzes auf

das Beispiel $\psi(x) = \sin x$ einen Beweis für die Transcendenz der Zahl π zu gewinnen, der offenbar nur wenige Zeilen erfordern würde.

Der Beweis des Satzes 2. lässt sich, wie man leicht sieht, in der mannigfaltigsten Weise abändern; zugleich leuchtet ein, dass dieser Satz auch für jede endliche Anzahl von vorgeschriebenen reellen Wurzeln α gilt.

Ueber neuere englische Arbeiten zur Mechanik.

Von

Felix Klein (Göttingen).

Der unterscheidende Charakterzug der englischen Arbeiten über Mechanik den continentalen Arbeiten gegenüber ist dem Vortragenden zufolge ihre auf unmittelbare Erfassung der Wirklichkeit gerichtete Tendenz und die durchgängige Anschaulichkeit ihrer Entwickelungen. Infolgedessen müssen diese Arbeiten dem an abstractere Gedankenfolgen gewöhnten Mathematiker besonders anregend sein, und es verschlägt in dieser Hinsicht nichts, oder es ist vielmehr geradezu nützlich, dass besagte Untersuchungen zumeist nicht so methodisch oder so streng durchgeführt sind, wie wir dies zu verlangen gewohnt sind. Unter den Einzelheiten, welche Vortragender ausführt, dürfte eine Bemerkung über die Entstehungsgeschichte von Hamilton's Integrationstheorie der Mechanik allgemeineres Interesse beanspruchen. Die Sache scheint völlig unbekannt zu sein, trotzdem sich Hamilton darüber an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten, insbesondere in seiner ersten Abhandlung über Strahlensysteme (1824), mit hinreichender Deutlichkeit äussert. Hamilton fand die Auffassung der Emissionstheorie vor, nach welcher die Bestimmung des Lichtstrahles, der irgend welches inhomogene (aber isotrope) Medium durchsetzt, ein Specialfall eines gewöhnlichen, auf die Bewegung eines Massenpunktes bezüglichen mechanischen Problemes ist; wir können gleich zusetzen, dass die dabei vorliegende Specialisirung keine wesentliche ist, dass man vielmehr, indem man zu höheren Räumen schreitet, jedes mechanische Problem auf die Bestimmung des in einem geeigneten Medium verlaufenden Lichtstrahles zurückführen kann. Und nun ruht Hamilton's Entdeckung, nach welcher die Integration der dynamischen Differentialgleichungen mit der Integration einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in Verbindung steht, einfach darauf, dass Hamilton, im Anschluss an die grosse physikalische Bewegung seiner Zeit, unternahm, die in emissiver Form bekannten Resultate der geometrischen Optik vom Standpunkte der Undulationstheorie abzuleiten. Hamilton's Integrationstheorie der dyna-

mischen Differentialgleichungen ist zunächst nichts anderes, als eine analytisch allgemeine Formulirung der in physikalischer Form wohlbekannten Beziehung zwischen Lichtstrahl und Lichtwelle. — Vermöge des hiermit gegebenen Ausgangspunktes wird auch die unnötig particuläre Form verständlich, in der Hamilton seine Theorie veröffentlichte und über die dann Jacobi hinausging. Hamilton hatte bei seinen Untersuchungen über Strahlensysteme zunächst durchaus praktische Fragen der Instrumentenkunde im Auge. Daher operirt er ausschliesslich mit solchen Lichtwellen, welche von einzelnen Punkten ausgehen. Jacobi's Verallgemeinerung läuft darauf hinaus, dass man zur Definition des Strahles ebensowohl beliebige andere Lichtwellen gebrauchen darf. Von den speciellen Wellen aus construirt man in der Optik die allgemeinen bekanntlich vermöge des sogenannten Huygens'schen Princips; diese Construction ist ein genaues Aequivalent für den analytischen Process, vermöge dessen man in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von irgend welcher „vollständigen" Lösung zur „allgemeinen" Lösung aufsteigt.

Ueber das System der rein mathematischen Wissenschaften.

Von
E. Papperitz (Dresden).

Der Vortrag bezweckte die Klarstellung der logischen Principien, welche zu einer organischen Systematik der rein mathematischen Disciplinen führen können.

1. Das erste Erfordernis ist die genaue Umgrenzung des Begriffes der Mathematik und insbesondere der reinen Mathematik. Erstere hat es als formale und deductive Wissenschaft mit der Untersuchung der Begriffe zu thun, welche die Beziehungen beliebiger Objecte zu einander ausdrücken. In der reinen Mathematik aber müssen diese Begriffe unabhängig von der Substanz der Objecte, folglich ohne Beziehung auf ein Reales ausser uns gedacht werden können. Hieraus ergiebt sich die Erklärung: Den Gegenstand der reinen Mathematik bilden die Beziehungen, welche zwischen irgend welchen gedachten Elementen begrifflich herstellbar sind, indem wir sie als in einer geordneten Mannigfaltigkeit enthalten setzen; das Ordnungsgesetz dieser Mannigfaltigkeit muss unserer Wahl unterliegen; und letzteres ist bei den beiden allein denkbaren Arten von Mannigfaltigkeiten, bei den discreten sowohl wie bei den stetigen, der Fall.

2. Mithin ergeben sich als oberste mathematische Begriffe zwei: die Zahl und die Lage. Beide drücken die gegenseitige Beziehung zweier beliebigen Elemente in einer geordneten Mannigfaltigkeit aus, die Zahl im Gebiete des discret, die Lage im Gebiete des stetig Gedachten. Die reine Mathematik umfasst also eine Wissenschaft von der Zahl und eine Wissenschaft von der Lage. — Die Mechanik ist der angewandten Mathematik zuzuweisen. — Die erste jener beiden Wissenschaften heisst Analysis; wird es gestattet, die zweite als Geometrie zu bezeichnen, so ist daran zu erinnern, dass man sie sich ebenso wie jene als frei von Axiomen, lediglich auf Nominaldefinitionen und der Anwendung des Begriffs der Gleichheit beruhend vorzustellen hat. (Gleich heissen zwei Beziehungen, die einander in jedem Urteil substituirt werden können.)

3. Hiernach kann auch die philosophische Frage beantwortet werden, welche Stellung zur Mathematik die (auf Reales bezogenen) Anschauungsbegriffe der Zahl, des Raumes und der Zeit einnehmen. Die beiden ersten liefern das ursprüngliche (den historischen Ausgangspunkt bildende) Begriffsmaterial, welches aber der Ergänzung fähig und bedürftig ist. Man könnte die Lehre vom gemeinen Zahl- und Raumbegriff als „actuelle“ Mathematik bezeichnen und ihr die weitergreifenden Disciplinen als „transcendentale“ Mathematik gegenüberstellen. Aber diese Unterscheidung ist wenig zweckmässig, denn über die Grenzen des Anschauungsgemässen kann gestritten werden, nicht aber über das, was denkbar (widerspruchsfrei) ist. Daher genüge es, zu sagen, dass die reine Mathematik auf die Begriffe anwendbar ist, welche die Beziehungen der realen Objecte darstellen. Der Zeitbegriff veranlasst überdies die Einführung eines neuen Einteilungsprincipes, weil er die Gegensätze des Beständigen und Veränderlichen einschliesst: man unterscheidet eine Analysis der beständigen und der veränderlichen Zahlen, eine Geometrie der beständigen und der veränderlichen Lage. — Herrschend aber werden in der reinen Mathematik nur die Begriffe, welche ihren Ursprung in unserem Denken selbst haben: der subjective Zeitbegriff als Form des discursiven Denkens (der successiven Gedankenverbindung) und der subjective Mannigfaltigkeitsbegriff als Form des combinatorischen Denkens (der simultanen Gedankenverbindung).

4. Die Entwickelung der Grundbegriffe vollzieht sich in der Analysis einerseits und in der Geometrie andererseits nach einem bemerkenswerten dualistischen Gegensatz. In der Analysis erzeugt man zuerst aus einer gedachten Einheit (z. B. einem individuellen Ding)

synthetisch die Reihe der positiven ganzen Zahlen, geht dann zu analytischen Operationen über und wird durch die Forderung ihrer unbeschränkten Anwendbarkeit zu allgemeinen Zahlbegriffen geführt, welche durch die Wahl der permanent zu erhaltenden formalen Gesetze bestimmt sind. In der Geometrie gelangt man von einem gedachten Raume (z. B. dem Raume der Sinnengegenstände) zuerst durch unterscheidende Operationen, also analytisch zu den allgemeinen Begriffen beliebiger Flächen, Linien und zuletzt zum Punkte, dann synthetisch zu speciellen Raumbegriffen, welche wiederum durch gewisse permanente formale Gesetze bestimmt werden. — Das ursprünglich erhaltene Begriffsmaterial liefert jedesmal bereits den Stoff zu einer selbständigen Wissenschaft. Dies ist hier die specielle Lehre von den discreten Zahlen (Zahlentheorie), dort die allgemeine Lehre von den stetigen Räumen (Topologie).

5. In beide Hauptzweige der Mathematik greift eine dritte unabhängige Wissenschaft ein, die Combinatorik. Diese untersucht die Beziehungen, welche zwischen den denkbaren Zuständen irgend welcher Objecte bestehen, bezw. zwischen den Operationen, welche diese Zustände ineinander überführen. Der principielle Teil der Combinatorik ist die abstracte Operationenlehre (Gruppentheorie); die combinatorischen und speciell gruppentheoretischen Teile der Analysis und der Geometrie erscheinen als Anwendungen derselben auf einzelne Begriffsklassen.

6. Der oben als Einteilungsgrund benutzte Gegensatz der Begriffe discret und stetig ist ein fliessender. Discretes kann verbunden, Stetiges gesondert werden. In beiden Fällen gelangt man zum Begriffe der Grösse; im ersten zur intensiven, im zweiten zur extensiven Grösse. Jene enthält gleichartige, diese ungleichartige Elemente; in der That ist es unumgänglich, discrete Elemente in mindestens einer Beziehung gleich, stetige verschieden zu setzen. — Den principiellen Teil der Grössenlehre bildet die Metrik, welcher ebenso wie der Combinatorik eine mittlere Stellung zugewiesen werden muss; denn der Grössenbegriff ist in beiden Hauptzweigen der Mathematik zulässig. Hierbei ergiebt sich aber insofern Neues, als die Gesichtspunkte der Geometrie auf die Analysis und umgekehrt die der letzteren auf die Raumlehre anwendbar werden, indem man Zahlgrössen durch Raumgebilde, also intensive Grössen durch extensive, darstellt und umgekehrt. Die neuen Disciplinen sind die geometrische Functionentheorie und die analytische Geometrie.

7. Für die weitere Teilung der Disciplinen ist von besonderer Wichtigkeit ein Klassificationsprincip, welches sich auf die Art der De-

finition ihrer Objecte bezieht. Hierzu kann nämlich entweder eine endliche Anzahl der Grundoperationen genügen — algebraische Definition —, oder aber ein aus einer unendlichen Anzahl derselben zusammengesetzter Process erforderlich sein — transcendente Definition —; im letzteren Falle ist der vorherige Nachweis der Existenz einer Grenze nötig. Obwohl die Unterscheidung zwischen algebraischer und transcendenter Definition in der gesamten Mathematik zulässig ist, tritt sie doch mit voller Schärfe bisher nur in der Analysis hervor.

8. Es erscheint statthaft und für die Systematik zweckmässig, in den einzelnen Wissenschaften die Methodenlehre von den Theorien zu trennen, welche den eigentlichen Inhalt der betreffenden Disciplin darstellen.

Hiermit sind die wichtigsten der besprochenen Fragen kurz charakterisirt; ihre breitere Entwickelung und Begründung muss einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben. An den Vortrag schloss sich die Vorlegung eines „Entwurfes zu den Grundzügen eines Systemes der rein mathematischen Wissenschaften“, in welchem (wesentlich unter Einschränkung der Betrachtung auf das gemeine complexe Zahlensystem und den euklidischen Raum) versucht wurde, eine Probe der Zweckmässigkeit der entwickelten Einteilungsprincipien zu geben. Die ersten Umrisse dieses Systementwurfes sind aus nachstehendem Schema erkennbar.

In der Einleitung des Vortrages wurde auf die praktische Bedeutung hingewiesen, welche die Fragestellung bei litterarischen Unternehmungen gewinnt, welche der Mathematik eine geordnete Bibliographie und einheitliche Terminologie verschaffen sollen.

(Hierzu Tabelle auf Seite 40.)

Ueber das Parallelenaxiom.

Von

Max Simon (Strassburg).

Den Ausgangspunkt des Vortrags bildet der Gedanke, dass unsere Raumvorstellungen sich auf Grund unserer körperlichen Organisation entwickelt haben und mit eben dieser in allmählicher Veränderung begriffen sind. Der erste, welcher nachweisbar erkannte, dass unser Parallelenaxiom keine Denknotwendigkeit sei, war Gauss (etwa um 1792), von ihm sind die Bolyai und Lobatschewsky beeinflusst.

Es seien g und h zwei Gerade, welche auf derselben dritten in A und B senkrecht stehen, dann sind zwei Hauptfälle denkbar, welche sich

Reine Mathematik.

A. Zahlenlehre.

I. P.T. Zahlbegriff. Arithmet. Grundoperationen.
II. Spec. L. v. d. discreten Zahlen. (Höh. Arithmet. od. Zahlentheorie.)
III. Allgem. Zahlenlehre.

B. Raumlehre.

I. P.T. Lagebegriff. Geometr. Grundoperationen.
II. Allgem. L. v. d. stetigen Räumen. (Topologie. Analysis situs.)
III. Spec. Raumlehre.

Combinatorik.

P.T. Abstracte Operationenlehre oder Gruppentheorie.

A. Zahlenlehre		B. Raumlehre	
a) L. v. d. beständig. Zahlen.	b) L. v. d. veränderl. Zahlen.	a) L. v. d. beständig. Lage.	b) L. v. d. veränderl. Lage.
α_1) M.L. Allgem. Arithmetik.	β_1) M.L. Infinites. Rechnung.	α_1) M.L. Project. Verwandtsch.	β_1) M.L. Synthese d. Bewegung.
α_2) Combinatorik const. Elem.	β_2) Variationsrechnung.	α_2) Abzählende Geometrie.	β_2) Kinemat. Ketten. Zwangläufigkeit.
α_3) Substitutions-Gr.	β_3) Transformations-Gr.	α_3) Configurations-Gr.	β_3) Bewegungs-Gr.
α) Analysis d. Bestimmten. A.T. Algebr. Lösung d. Gleichungen: Determinanten, Gleichgs.-Systeme, Elimination; Algebr. Formen u. Invarianten. T.T. Analysis d. Unendlichen.	β) Analysis d. Veränderl. A.T. Algebraische und T.T. transcendente Functionen einer oder mehrerer Variablen.	α) Geometrie d. Lage. Spec. Geometrie der Grundgebilde verschiedener Stufen und verschiedener Erzeugung.	β) Geometrie d. Beweg. Theorie der beweglichen starren Systeme, der Trajectorien, Hüllbahncurven und Flächen.

Metrik.

P.T. Massbegriff. Metrische Grundoperationen.

Längen-, Winkel-, Flächen-, Körpermessung. Phorometrie.

β') Geometrische Functionentheorie.

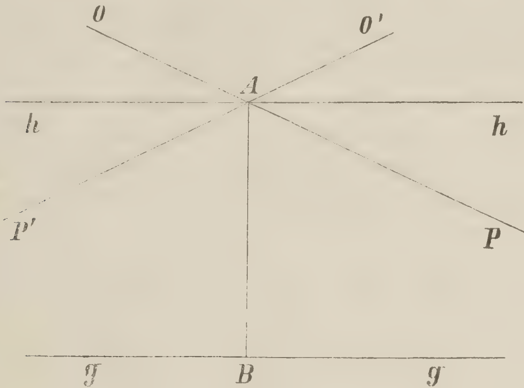
P.T. Geometr. Darstellbarkeit veränderlicher Zahlen. Topologische Analyse d. stetigen Zahlgebilde (Riemann'sche Flächen, etc.).
M.L. Geometr. Theorie d. analyt. Transformationen (Abbildung). Darstellungsmethoden. Bestimmung d. Functionen aus geometrisch gegebenen Bedingungen.
A.T. Algebr. Functionen.
T.T. Transcend. Functionen.

α') Analytische Geometrie.

P.T. Analyt. Darstellbarkeit der Raumgebilde. Zählende Synthese d. discreten Raumgrössen (Cantor'sche Mengen, etc.)
M.L. Analyt. Theorie d. geometr. Verwandtschaften. Darstellungsmethoden. Anwendungen der Infinitesimalrechnung.
A.T. Algebraische Gebilde.
T.T. Transcend. Gebilde.

Abkürzungen: L. = Lehre, M.L. = Methodenlehre, P.T. = Principieller Teil, A.T. = Algebraischer Teil, T.T. = Transcendenter Teil, Gr. = Gruppen.

wieder in je 2 Unterfälle spalten. g und h können sich nicht schneiden oder können sich schneiden. Im Falle 1) kann a) h die einzige Nichtschneidende (Gerade) zu g durch A sein, b) kann ein ganzes Bündel Nichtschneidender existiren, gehälftet von h, welches von den Schnei-



denden durch 2 symmetrisch zu AB gelegene Grenzgerade — die beiden Parallelen — getrennt wird. Im Falle 2) können g und h sich a) in einem Punkte x schneiden, der dann links und rechts gleichweit von AB entfernt ist, oder b) in zwei Punkten x und y, symmetrisch zu AB gelegen. Es wurde nun der Satz bewiesen: Wenn einer dieser Fälle einmal eintritt, so muss eben dieser immer eintreten. Der Beweis setzt nur voraus, dass jede Strecke AB eine Mitte hat; dies wird mittelst eines Grenzüberganges bewiesen, welcher in „Simon, Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die abs. Geom., Strassburg 1890" mitgeteilt ist. Je nachdem einer der 4 Fälle eintritt, werden 4 Geometrien des einfach zusammenhängenden Raumes als euklidische, absolute, Klein'sche und Riemann'sche unterschieden. Es folgte eine Kritik der 4 bekanntesten Beweise des Parallelenaxioms, welche die Schwächen jedes einzelnen hervorhob.

Ueber die Bilder dioptrischer Systeme grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes.

Von

S. Finsterwalder (München).

Die elementare Theorie der centrirten Linsensysteme, wie sie von Gauss zum Abschluss gebracht wurde, lässt sich im wesentlichen durch

den Satz charakterisiren, dass, für Strahlen einer Farbe wenigstens, jedes noch so complicirte dioptrische System durch eine einzige Linse insofern ersetzt werden kann, als diese Linse zu jedem Object ein Bild von gleicher Grösse und Lage liefert, wie jenes Linsensystem. Dieser Satz gilt nur in den engen Grenzen einer ersten Annäherung, und in Wirklichkeit bilden Linsensysteme scharfe leuchtende Punkte nicht wieder als solche ab und ebensowenig genau an der Stelle, welche aus der Gauss'schen Theorie folgt. Will man sich über den Betrag der Unschärfe der Bilder und über deren Verzerrung unterrichten, so muss man die nächsten, in den Gauss'schen Entwickelungen bereits vernachlässigten Glieder mit berücksichtigen und erhält dann eine Formelserie, welche den Gang eines Strahles durch ein dioptrisches System so genau darstellt, dass auch der Grad der Unschärfe der Bilder und die Verzerrung in erster Annäherung daraus gefolgert werden kann. Eine solche Formelserie, welche die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf das Gesichtsfeld und in Bezug auf die Oeffnung in Betracht zieht, hat zuerst L. von Seidel (1856. Astron. Nachrichten, Nr. 1027) aufgestellt. Aus dieser Formelserie kann die Art des Strahlensystems, welches durch die Brechung eines gewöhnlichen Strahlenbündels in einem dioptrischen System entsteht, erschlossen werden. Wenn der leuchtende Punkt sich ausserhalb der optischen Axe des Linsensystems befindet, ist das System der gebrochenen Strahlen von der 5. Ordnung und 4. Klasse und dessen Brennfläche von der 9. Ordnung. Dies gilt im allgemeinen. Ist dagegen das Linsensystem in der optischen Axe in Bezug auf die sphärische Aberration corrigirt, so reducirt sich die Ordnung des Systems der gebrochenen Strahlen auf 4 und die der Brennfläche auf 8. Im allgemeinen Fall kann das System der gebrochenen Strahlen auch mechanisch erzeugt werden. Bewegt sich nämlich ein Stab derart, dass drei auf ihm fest angenommene Punkte in drei zu einander senkrechten Ebenen gleiten, so beschreibt derselbe in seinen verschiedenen Lagen ein Normalensystem, das mit dem System der gebrochenen Strahlen dann zur Uebereinstimmung gebracht werden kann, wenn die Distanz zweier der festen Punkte des Stabes sehr klein gegenüber der Entfernung des dritten angenommen wird. Aus der in diesem Satze begründeten geometrischen Einsicht in die Natur des Systems der gebrochenen Strahlen lassen sich nun alle Eigentümlichkeiten der diffusen Lichtflecke, die an Stelle scharfer Bilder auftreten, ermitteln, so namentlich die Helligkeitsverteilung durch Isophoten und die Begrenzungscurven, welche durch die Abblendung der einfallenden Strahlen bedingt sind. Durch Einführung elliptischer Coordinaten in die Seidel'schen Formeln

werden besonders einfache Gleichungen für die erwähnten Curven gefunden, die dann zu einer bemerkenswerten Abbildung der Schirmebene, in der der Lichtfleck aufgefangen wird, führen. Bei dieser Abbildung gehen die Brennlinien des Lichtfleckes in Geraden, die Isophoten in Hyperbeln, welche jene Geraden zu Asymptoten haben, und die Grenzcurven für verschieden grosse Blenden in eine andere Hyperbelschar über. Alle diese Verhältnisse sind durch Zeichnungen erläutert worden, die sich teils auf eine unsymmetrisch gebaute Convexlinse, theils auf das Königsberger Heliometerobjectiv beziehen. Eine ausführliche Publication der Resultate erscheint demnächst in den Abhandlungen der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften in München (II. Cl., 17. Bd., 3. Abth., Seite 517—588).

Modelle der rationalen Raumcurven 4. Ordnung und ihrer Developpabeln.

Von

C. Rohn (Dresden).

Den Gegenstand des Vortrags bildete die Darlegung einer Anzahl Modelle der rationalen Raumcurven 4. Ordnung und ihrer abwickelbaren Flächen, die der Vortragende im Anschluss an zwei Publicationen in den Berichten der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (am 9. Juni 1890 und am 12. Januar 1891) hat anfertigen lassen.

Jede solche Raumcurve liegt auf einem Hyperboloide, dessen eine Schar die Curve je ein Mal und dessen andere Schar sie je drei Mal trifft. Die Curve ist deshalb auf dem Hyperboloid durch eine ein-dreideutige Beziehung bestimmt. Es giebt nun auf dem Hyperboloid einen ganz bestimmten Kegelschnitt, den Hauptkegelschnitt, und auf ihm ein ganz bestimmtes Punktquadrupel, die Hauptpunkte, — seine Schnittpunkte mit der Raumcurve 4. Ord., die zu der Curve in fundamentaler Beziehung stehen und die ein-dreideutige Beziehung völlig definiren. Legt man nämlich durch die Hauptpunkte vier Erzeugende, die der Schar der einfachen Secanten angehören, und bestimmt zu allen Punkten des Hauptkegelschnitts die erste Polare in Bezug auf das Quadrupel dieser Erzeugenden (indem man jedes Mal eine Erzeugende der andern Schar zieht und die erste Polare in Bezug auf die vier Schnittpunkte construirt), so gewinnt man die Raumcurve 4. Ord. Die nämliche Curve erhält man auch, wenn man durch die Hauptpunkte vier Erzeugende legt, die der Schar der Trisecanten angehören, und zu allen Punkten des Hauptkegelschnitts die lineare Polare in Bezug auf das Quadrupel dieser Erzeugenden bestimmt. Da das Quadrupel der Haupt-

punkte drei lineare Transformationen in sich zulässt, so geht auch die Raumcurve 4. Ord. durch drei lineare Raumtransformationen in sich über.

Auf der Raumcurve liegen nun ausser dem Quadrupel der Hauptpunkte, noch zwei weitere Quadrupel, die für die Curve und ihre abwickelbare Fläche von besonderer Bedeutung sind und die im wesentlichen deren Gestalten bedingen. Es sind dieses die 4 Punkte mit Wendeebenen, in denen die Schmiegungsebene vier consecutive Punkte mit der Raumcurve gemein hat, und die Schnittpunkte der 4 berührenden Trisecanten. Die gestaltliche Wirkung dieser Vorkommnisse ist sofort evident. In der Nähe der Berührungspunkte der Wendeebenen liegt die Raumcurve ganz auf einer Seite derselben, in Folge dessen durchsetzen sich dort die beiden Mäntel der abwickelbaren Fläche. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche verläuft durch die Punkte mit Wendeebenen, welche als Pinch-points erscheinen. Längs der berührenden Trisecanten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid, indem die benachbarten Curventangenten teils ausserhalb, teils innerhalb desselben liegen. Die abwickelbare Fläche durchschneidet dabei zugleich die Raumcurve 4. Ordnung und damit die in ihr als Rückkehrcurve zusammenhängenden Flächenmäntel; d. h. in den einfachen Punkten der berührenden Trisecanten besitzt die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche Spitzen.

Was nun die Realitätsverhältnisse anlangt, so sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist reell, dann sind die Punkte mit Wendeebenen und die berührenden Trisecanten imaginär. Hieraus ergiebt sich dann weiter, dass keine Curventangente eine andere treffen kann, dass also die Doppelcurve der Developpabeln ganz imaginär sein und dass diese ganz auf einer Seite des Hyperboloides liegen muss. Es kann hier keine Ebene geben, die die Raumcurve nicht schneidet, diese verläuft also nothwendig durch's Unendliche. Jede Trisecante trifft die Curve in drei reellen Punkten.

2. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist imaginär, die Punkte mit Wendeebenen sind reell, die berührenden Trisecanten dagegen imaginär. Die Developpable liegt auch hier ganz auf einer Seite des Hyperboloides, ihre Doppelcurve ist reell, indem jede Curventangente zwei andere trifft. Das Hyperboloid teilt die Doppelcurve in vier Stücke, von denen zwei isolirt verlaufen, während die beiden andern auf der abwickelbaren Fläche liegen und von den Pinch-points begrenzt werden. Jede Trisecante trifft die Curve nur in einem reellen Punkte.

3. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist imaginär, die berührenden Trisecanten sind reell, dagegen die Punkte mit Wendeebenen imaginär. Die Developpable liegt zu beiden Seiten des Hyperboloides; ihre Doppelcurve liegt ganz reell auf ihr und trifft in 4 Spitzen auf das Hyperboloid auf, liegt jedoch ganz auf einer Seite desselben. Die Trisecanten treffen die Curve teils in einem Punkte.

Als Uebergangsfall zwischen 2. und 3. dient die Raumcurve mit zwei osculirenden Trisecanten; ihre abwickelbare Fläche besitzt dann eine Doppelcurve 4. Ord. von gleicher Eigenschaft; jene Trisecanten sind Rückkehrkanten dieser Fläche und auch Trisecanten der Doppelcurve. Der Uebergang ist an den Modellen bequem zu übersehen.

4. Zwei Hauptpunkte sind reell, dann giebt es auch zwei reelle berührende Trisecanten und zwei reelle Punkte mit Wendeebenen. Hier liegt die abwickelbare Fläche wieder zu beiden Seiten des Hyperboloides. Auf der reellen Doppelcurve giebt es zwei reelle Spitzen und zwei reelle Pinch-points; in letzteren durchsetzt die Doppelcurve das Hyperboloid und verläuft dann isolirt, in den ersteren ruht sie auf dem Hyperboloid auf.

Im speciellen Fall können hier die berührenden Trisecanten durch die Punkte mit Wendeebenen hindurchgehen; dann besitzt die Developpable einen dreifachen Kegelschnitt, der in zwei Pinch-points das Hyperboloid durchdringt. Durch den einen Teil desselben schickt die Fläche einen, durch den andern drei Mäntel. Hierzu ist auch die dualistische Fläche modellirt.

5. Das Hyperboloid und mit ihm die ganze Raumcurve 4. Ord. ist imaginär; dann ist auch die Developpable imaginär, ihre Doppelcurve jedoch reell.

In den Fällen 1., 2., 3., 5. sind die drei linearen Raumtransformationen, welche die Raumcurve und ihre Developpable in sich überführen, reell; zugleich giebt es vier reciproke Raumtransformationen, die die Raumcurve in die Doppelcurve und umgekehrt verwandeln; sie sind imaginär. Im Falle 4. ist eine Transformation der Raumcurve in sich reell, und zugleich sind zwei der andern Transformationen reell.

Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie.

Von
H. Wiener (Halle).

Man kann von dem Beweise eines mathematischen Satzes verlangen, dass er nur diejenigen Voraussetzungen benutzt, von denen der Satz wirk-

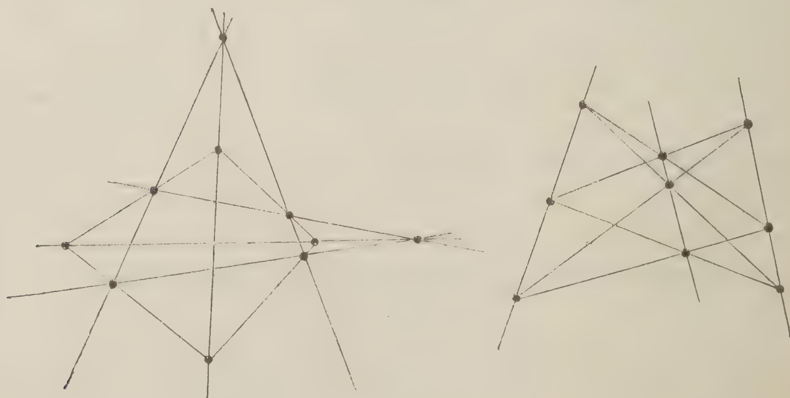
lich abhängt. Die geringsten denkbaren Voraussetzungen sind das Vorhandensein von gewissen Objecten und von gewissen Operationen, durch die diese Objecte unter einander verknüpft werden. Ist es möglich, derartige Objecte und Operationen ohne Zufügen neuer Voraussetzungen so an einander zu reihen, dass Sätze entstehen, so erhält man in diesen Sätzen ein in sich begründetes Gebiet der Wissenschaft. Ein solches ist z. B. die Arithmetik.

Auch für die Geometrie ist ein derartiges Zurückgehen auf die einfachsten Objecte (Elemente) und Operationen von Bedeutung, da man dann umgekehrt wieder aus diesen eine abstracte Wissenschaft aufbauen kann, die von den Axiomen der Geometrie unabhängig ist, deren Sätze aber Schritt für Schritt mit den Sätzen der Geometrie parallel gehen.

Ein Beispiel hierzu liefert die projective Geometrie der Ebene. Die Objecte seien Punkte und Geraden, die Operationen das Verbinden und Schneiden; Objecte und Operationen seien nur in endlicher Anzahl vorausgesetzt. Oder, vom geometrischen Gewande losgelöst: es seien Elemente von zweierlei Art vorausgesetzt, und zweierlei Operationen, indem man annimmt, dass die Verknüpfung je zweier Elemente derselben Art ein Element der anderen Art ergebe. Die geometrischen Sätze, die hierbei auftreten — wenn man von den auf die Anzahl der Elemente sich beziehenden combinatorischen Sätzen absieht — sind Schliessungssätze, worunter hier solche Sätze zu verstehen sind, in denen jede in dem Satze vorkommende Gerade wenigstens drei ebensolche Punkte trägt, und jeder Punkt auf wenigstens drei Geraden liegt. Beispiele:

1) Der Satz von Desargues über perspective Dreiecke.

2) Der auf das Geradenpaar bezogene Pascal'sche Satz.



Der Beweis dieser Sätze kann nicht aus den gegebenen Objecten und Operationen geführt werden, d. h. dieses Gebiet der Geometrie ist kein in sich begründetes. Entnimmt man aber den Beweis irgend eines solchen Satzes (oder auch mehrerer) einem anderen Gebiete, so lässt sich durch Wiederholung dieses Satzes (bezw. der Sätze) ein begrenztes Gebiet der ebenen Geometrie herleiten. So erhält man aus dem erstgenannten Schliessungssatz (dessen Beweis in der räumlichen Geometrie geführt wird) ein Gebiet, das die sonst durch Strecken- (bezw. Punkt-) Addition gewonnenen Sätze umfasst. Den zweitgenannten Schliessungssatz aus dem ersten abzuleiten, ist nicht geglückt; eine weitere Möglichkeit wäre, ihn durch Projection aus drei oder mehr Dimensionen herzuleiten, oder — was leicht ist — durch Einführung des Stetigkeitsbegriffs. Diese beiden Schliessungssätze aber genügen, um ohne weitere Stetigkeitsbetrachtungen oder unendliche Processe den Grundsatz der projectiven Geometrie zu beweisen, und damit die ganze lineare projective Geometrie der Ebene zu entwickeln.

Wie in der Ebene, so lässt sich auch im Raume eine auf den Grundelementen (Objecten) Punkt, Gerade, Ebene beruhende Geometrie aufbauen. Hier giebt es aber in sich begründete Gebiete. In entsprechender Weise kann man auch in höhere Dimensionen aufsteigen. Wichtiger ist es, noch von der Ebene eine Stufe abwärts zur Geometrie der Geraden überzugehen. Als einziges Element hat man hier den Punkt, von Verbinden und Schneiden kann nicht mehr die Rede sein. Wir müssen also sogar eine Operation aus einem anderen Gebiet entnehmen, und es bieten sich hierzu Constructionen dar, die in der Ebene geführt werden können, aber nur Punkte unserer Geraden betreffen, und zwar vor allem die Construction projectiver, involutorischer und harmonischer Punktgruppen. Es ergiebt sich, dass man sich auf die letztgenannte beschränken kann, da der Satz gilt: Sind in einer Geraden von einer Involution zwei Paare, oder von einer Projectivität drei Paare entsprechender Punkte gegeben, so kann man zu jedem beliebigen weiter gegebenen Punkte den entsprechenden Punkt aus den gegebenen durch eine **endliche** Anzahl von Constructionen harmonischer Punkte finden*).

Andere Gebiete erhält man durch Annahme neuer Voraussetzungen. Die Geometrie der Ordnung setzt u. a. den Satz voraus, dass auf einer geschlossenen Linie vier Punkte sich auf eine angebbare Weise in zwei

---

*) Der Beweis dieses Satzes ist inzwischen veröffentlicht in den Berichten der K. sächs. Ges. d. Wiss. 1891, S. 669, ff.

Paare zerlegen, die sich trennen. Weitere Gebiete beruhen auf der Voraussetzung der Stetigkeit der Elemente, sei es nun die analytische Stetigkeit der Grenzprocesse, oder die geometrische Stetigkeit, die ihren Ausdruck in dem Aufeinandertreffen von Punkten findet, welche sich in gewisser Weise gleichzeitig in einer Linie bewegen.

Mitteilungen aus der abzählenden Geometrie „p"-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades.

Von

H. Schubert (Hamburg).

Da die abzählende Geometrie, wie sie sich bisher entwickelt hat, im wesentlichen algebraischer Natur ist, so hat man seit einigen Jahren angefangen, ihre Resultate von drei auf n Variabeln auszudehnen. Was zunächst die „p"-dimensionalen Räume ersten Grades anbetrifft, so besitzen die von ihnen erzeugten Systeme im allgemeinen nicht eine Gradzahl, sondern viele Gradzahlen, welche sämtlich aus dem von dem Vortragenden eingeführten und von Herrn Segre und anderen adoptirten Bedingungs-Symbol $(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)$ hervorgehen, das auf folgende Weise definirt werden kann. Versteht man unter einer eckigen Klammer, in der eine Zahl steht, immer einen linearen Raum, dessen Dimension gleich dieser Zahl ist, so denke man sich einen $[a_0]$, $[a_1]$, u. s. w. bis $[a_p]$ derartig, dass immer der $[a_i]$ in dem $[a_{i+1}]$ liegt. Dann bezeichnet für den $[p]$ das Symbol $(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)$ die Bedingung, dass der $[p]$ mit jedem $[a_i]$ einen $[i]$ gemein hat. Z. B. für den Strahl bedeutet (03) die Bedingung, in einem dreidimensionalen linearen Raume zu liegen und durch einen in diesem Raume gegebenen Punkt zu gehen. Damit $(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)$ Sinn hat, muss

$$0 \leqq a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leqq n$$

sein. Nachdem jene Bedingung als charakteristisch erkannt war, handelte es sich darum, die Anzahlen allgemein auszudrücken, welche angeben, wie viel $[p]$ hinreichend viele derartige Bedingungen erfüllen. Eins der interessantesten in dieser Untersuchungsrichtung liegenden Resultate hat der Vortragende im VIII. Bande der Acta Mathematica veröffentlicht. Dort ist die Anzahl derjenigen $[p]$ berechnet, welche ausser der Bedingung $(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)$ noch hinreichend oft, nämlich $a_0 + a_1 + \cdots + a_p - \frac{1}{2} p(p+1)$ Male, die einfache Bedingung

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2,\ \ldots,\ n)$$

erfüllen, d. h. die, einen gegebenen $[n-p-1]$ einpunktig zu treffen.

Diese Anzahl ist gleich

$$\frac{(a_0+a_1+\cdots+a_p-\frac{1}{2}p(p+1))!D}{a_0!a_1!\ldots a_p!},$$

wo D die bekannte Determinante ist, welche das Product aller möglichen Differenzen je zweier der Zahlen a_0 bis a_p ist. Auf einen Specialfall dieser Formel, nämlich

$$p=1, \quad a_0=n-1, \quad a_1=n$$

waren auch die Herren F. Meyer und Stephanos von invariantentheoretischer Seite gestossen. Von den analogen, auf Räume zweiten Grades bezüglichen Fragen, zu denen der Vortragende dann überging, sei der Kürze wegen hier nur die Frage nach der Anzahl derjenigen $(p-1)$-dimensionalen Räume zweiten Grades erwähnt, welche den $[p]$, in dem sie liegen, die Bedingung $(a_0 a_1 \ldots a_p)$ erfüllen lassen, und welche selbst $a_0+a_1+\cdots+a_p+p$ gegebene $[n-1]$ tangiren. Die gesuchte Zahl ist eine Function $f(a_0, \ldots, a_p)$ der gegebenen $p+1$ ganzen Zahlen und auf folgende Weise arithmetisch definirbar: $f(x)$ sei gleich 2^x und $f(x, y)$ sei gleich $(x+y)_{x+1}+(x+y)_{x+2}+\cdots+(x+y)_y$, wo die $y-x$ Addenden Binomialcoefficienten sind, deren Basis $x+y$ ist, und deren Indices $x+1$, $x+2$ u. s. w. bis y sind. Dann ist

$$f(x, y, z) = f(x).f(y, z)-f(y).f(x, z)+f(z).f(x, y),$$

ferner

$$f(x, y, z, u) = f(x, y).f(z, u)-f(x, z).f(y, u)+f(x, u).f(y, z),$$

sowie

$$f(x, y, z, u, v) = f(x).f(y, z, u, v)-\cdots+f(v)f(y, z, u, v)$$

u. s. w. So ist die Function f für beliebig viele Argumente definirt und leicht berechenbar, z. B.:

$$f(1, 3, 4, 5) = (4_2+4_3)9_5$$
$$-(5_2+5_3+5_4).(8_4+8_5)+(6_2+6_3+6_4+6_5)7_4 = 70.$$

Für $f(x, x+1, \ldots, x+y)$ fand der Vortragende bei ungeradem y den Ausdruck:

$$\frac{[0!2!\ldots(y-1)!][(2x+1)!(2x+3)!\ldots(2x+y)!]}{x!(x+1)!\ldots(x+y)!}$$

und bei geradem y den Ausdruck

$$\frac{[1!3!\ldots(y-1)!]2^x[(2x+2)!(2x+4)!\ldots(2x+y)!]}{(x+1)!(x+2)!\ldots(x+y)!}.$$

Grundzüge einer Gestaltenlehre der Polyeder.

Von
V. Eberhard (Königsberg i. Pr.).

Bei der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit körperlicher Formen, welche die Natur dem Beschauer darbietet, ist es schwer erklärlich, dass die vergleichsweise Betrachtung der verschiedenen Gestalten räumlicher Gebilde und deren systematische Beschreibung in der Entwickelung der geometrischen Theorien nur untergeordnetes Interesse gefunden hat. Erst in neuester Zeit hat sich das lebhafte Bestreben geltend gemacht, diese Lücke auszufüllen und so auf dem Boden der unmittelbaren Anschauung der geometrischen Forschung ein neues Arbeitsfeld zu erschliessen. Es zeugen hierfür die zahlreichen Arbeiten auf topologischem Gebiete, speciell diejenigen über die Typen algebraischer Curven und Flächen.

Aus gleichen Gesichtspunkten habe ich die einfachsten räumlichen Gestaltungen, die Polyeder, einer eingehenden vergleichenden Betrachtung unterzogen *). Mich von vorn herein auf die convexen oder Euler'schen Polyeder beschränkend, stellte ich mir die Aufgabe, unter allen denkbaren polyedrischen Körpern, wenn möglich, diejenigen aufzufinden, welche durch bestimmte, vorerst noch unbekannte Eigenschaften so ausgezeichnet sind, dass sie selbst als die ursprünglichen, alle übrigen als die aus ihnen abgeleiteten Formen erscheinen. Die nachfolgenden Ausführungen mögen darlegen, in wie weit es mir gelungen ist, einen derartigen systematischen Zusammenhang der verschiedenen Bildungen nachzuweisen.

Die Betrachtung geht aus von den Begriffen des Iso- und Allomorphismus convexer Polyeder. Zwei von je n Ebenen abgegrenzte Körper erscheinen als isomorph, falls unter allen möglichen Bezeichnungen ihrer 2n Grenzflächen durch resp.

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n \qquad \text{und} \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

eine von der Beschaffenheit existirt, dass die Schnittgeraden entsprechender Ebenenpaare

$$\alpha_i, \quad \alpha_k \qquad \text{und} \qquad \beta_i, \quad \beta_k,$$

wenn überhaupt, stets gleichzeitig Kanten ihrer Polyeder sind; dagegen werden Polyeder, welche dieser Bedingung nicht genügen, als allomorph aufgefasst.

Es ergeben sich hiernach als charakteristische Merkmale der Gestalt eines convexen Polyeders:

---

*) V. Eberhard, Morphologie der Polyeder. Leipzig, B. G. Teubner. 1891.

1) die Formen, d. h. die Seitenanzahlen seiner einzelnen ebenen Grenzpolygone, und

2) die Art des Zusammenschlusses letzterer zu der vollständigen Oberfläche.

Die beiden aufgestellten Begriffe sind unmittelbar auch auf offene, nämlich ein- oder mehrfach berandete polyedrische Flächen auszudehnen.

Nachdem so jedes Polyeder als Vertreter einer durch unendlich viele Individuen veranschaulichten charakteristischen Form erkannt ist, führt der erste Schritt in der vergleichenden Betrachtung allomorpher Typen zu einer wesentlichen Unterscheidung. Man stösst einerseits auf Polyeder, welche bei jeder genügend kleinen stetigen Variation der sie bestimmenden Grenzebenen die Gestalt bewahren, andererseits auf solche, welche bei noch so kleinen stetigen Bewegungen ihrer Grenzebenen in allomorphe Körper übergehen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten des ersten Falles bestehen darin, dass in jeder Ecke des Polyeders genau drei Grenzflächen zusammenstossen; dagegen hat der zweite Fall statt, wenn auch nur durch eine Ecke mehr als drei Flächen gehen. Die Polyeder der ersten Art sollen als allgemeine, die der zweiten als singuläre angesehen werden. Genauer wird als Grad der Singularität eines convexen Polyeders der Ueberschuss definirt, welchen die Anzahl der in den einzelnen singulären Ecken zusammenstossenden Grenzflächen über die dreifache Zahl dieser Ecken ergiebt.

Aus der letzten Bemerkung fliesst ein für die systematische Auffassung der polyedrischen Formen fundamentaler Satz. Es besteht nämlich, wenn x_h die Anzahl der h-seitigen ebenen Grenzpolygone und ρ den Grad der Singularität irgend eines konvexen Polyeders angiebt, die wichtige Relation

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12 + 2\rho.$$

Da nach derselben der Wert des Ausdrucks $x_3 + x_4 + x_5$ wenigstens 4 beträgt, so folgt, dass unter den Grenzflächen eines konvexen Polyeders stets 4 oder mehr Flächen vorhanden sind, welche weniger als je 6 Seiten besitzen. Man schliesst hieraus auf die Fähigkeit, alle convexen Polyeder aus einem Tetraeder durch successive Anwendung von nur drei-, vier- und fünfseitigen Schnitten herzustellen.

Mit den bisherigen mehr vorbereitenden Betrachtungen sind die erforderlichen Hülfsmittel gewonnen, die eigentliche anfangs gekennzeichnete Aufgabe in Angriff zu nehmen. Die für jedes allgemeine Polyeder gültige Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12$$

deutet durch ihre Unabhängigkeit von der Anzahl x_6 der Grenzsechsecke und der Zahl n der Seitenflächen des jeweiligen Polyeders auf die Möglichkeit einer Einschaltung von Grenzsechsecken in dessen Oberfläche hin. Die Theorie dieser als Elementarerweiterungen der Polyeder einzuführenden Umformungsprocesse geht aus von den Grundbegriffen des enthaltenen und des enthaltenden Polyeders.

Wenn die Oberfläche eines n-flächigen Polyeders A_n in m einander ausschliessende einfach berandete Bestandteile $S_1, S_2, \ldots$ zerlegt ist, welche ebensovielen einander nicht überdeckenden Bestandteilen $S'_1, S'_2, \ldots$ eines $(n+\nu)$-flächigen Polyeders $A_{n+\nu}$ isomorph sind, so fasse ich A_n als ein in $A_{n+\nu}$ enthaltenes, $A_{n+\nu}$ als ein A_n enthaltendes Polyeder auf. Das auf A_n von den m Randpolygonen der Bestandteile S_i gebildete Netz wird als ein Erweiterungsnetz dieses Polyeders, die nach Ausscheidung der Flächen S'_i aus der Oberfläche von $A_{n+\nu}$ resultirende Fläche aber als eine zu jenem Netze gehörige Einschaltungsfläche bezeichnet.

Es sei die Anzahl der h-seitigen Grenzpolygone des Polyeders A_n durch x_h, die entsprechende Anzahl für die Einschaltungsfläche durch y_h gegeben, so gelten in Bezug auf die beiden Polyeder die Gleichungen:

(1) $3x_3+2x_4+x_5-x_7-2x_8-3x_9-\cdots = 12,$

(2) $3(x_3+y_3)+2(x_4+y_4)+(x_5+y_5)$
$$-(x_7+y_7)-2(x_8+y_8)-3(x_9+y_9)-\cdots = 12.$$

Aus denselben folgt

$$(3) \qquad 3y_3+2y_4+y_5-y_7-2y_8-3y_9-\cdots = 0$$

als die für die Einschaltungsfläche geltende Beziehung.

Die einfachste positive und ganzzahlige Lösung der dritten Gleichung ist:

$$y_3 = y_4 = y_5 = y_7 = y_8 = y_9 = \cdots = 0.$$

Derselben entspricht, wenn überhaupt, eine durchweg aus Sechsecken gebildete Fläche. Das auf dem Polyeder A_n gegebene Erweiterungsnetz soll alsdann ein Elementarnetz, die zugehörige Einschaltungsfläche eine Elementarfläche genannt werden.

Es drängen sich hier naturgemäss zwei Fragen auf, nämlich:

1) Wie werden für ein gegebenes allgemeines Polyeder alle etwaigen Elementarnetze gefunden?

2) Wie werden zu einem gegebenen Elementarnetze die sämtlichen Einschaltungsflächen construirt?

Die Beantwortung derselben führt zu folgenden Sätzen:

Liegt auf einem allgemeinen Polyeder irgend ein Netz von Kantenpolygonen vor, so entscheidet stets eine endliche Anzahl nach einer all-

gemeinen Vorschrift auszuführender Constructionen darüber, ob das Netz ein Elementarnetz ist oder nicht. Jedes Polyeder besitzt eine bestimmte Anzahl von Elementarnetzen, und zwar ist ein solches durch das jedesmalige System der Grenzflächen dargestellt. Schliesslich gehören zu jedem beliebigen Elementarnetze zwar unendlich viele Elementarflächen, unter denselben ist aber nur eine endliche Anzahl elementar irreducibler Individuen vorhanden.

Mit der Erkenntnis der elementaren Erweiterungsfähigkeit des allgemeinen convexen Polyeders und der daraus folgenden relativen Unterordnung seiner sechsseitigen gegenüber den andersförmigen Grenzpolygonen gewinnen für die erstrebte Einteilung der Polyeder die positiven und ganzzahligen Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12$$

ein erhöhtes Interesse. Indem man dieselbe durch die beiden anderen ersetzt

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots,$$

und den aufsteigenden Werten $m = 0, 1, 2, \ldots$ entsprechend der Reihe nach die verschiedenen Lösungen auf ihre Construirbarkeit hin prüft, gelangt man zu folgenden allgemeinen Sätzen:

Jede positive ganze Zahl m incl. 0 bestimmt einen Bereich allgemeiner convexer Polyeder. Innerhalb eines beliebigen Bereiches definirt jede positive und ganzzahlige Lösung der Bereichsgleichungen einen Stamm analoger Körper. Endlich umfasst jeder Stamm nur eine endliche Anzahl elementar irreducibler Individuen, sogenannter Stammpolyeder, aus welchen sich alle übrigen durch Elementarerweiterung ableiten lassen.

Es sei noch bemerkt, dass die angegebenen auf den Fall $\rho = 0$ bezüglichen Resultate in dem allgemeinen Falle eines beliebigen ρ sich in entsprechender Weise modificiren.

Ueber ein mechanisches Modell zur Versinnlichung der Anwendung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Wärme- und Elektricitätslehre.

Von

L. Boltzmann (München).

Seien: p generalisirte Coordinaten eines materiellen Systems, $\dot{p}$ deren Ableitungen nach der Zeit, T die lebendige Kraft des Systems als Function von p und $\dot{p}$, endlich P die nach p wirkende Kraft, so dass $\Sigma P \delta p$ die Arbeit ist; so hat man:

$$P = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial T}{\partial p}.$$

In gewissen Aufgaben der Elektricitäts- und Wärmelehre zerfallen nun die Coordinaten in zwei Gruppen. Für die erste Gruppe (langsam veränderliche Parameter, nach wie vor von uns mit p bezeichnet) kann $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}$ vernachlässigt werden; die der zweiten Gruppe (cyklische Coordinaten, für welche wir die Buchstaben p und P mit q und Q vertauschen wollen) sind dadurch charakterisirt, dass sie nicht explicit, sondern nur ihre Ableitungen nach der Zeit in T vorkommen. Dann erhalten wir also an Stelle der obigen Gleichungen:

$$P = -\frac{\partial T}{\partial p}, \quad Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

Ein noch speciellerer Fall ist der, dass die Geschwindigkeit eines jeden Massenteilchens m_l eine lineare Function der $\dot{q}$, also etwa gleich $\Sigma_k a_{k,l} \dot{q}_k$ ist, wobei die Coefficienten $a_{k,l}$ Functionen der p sind. Setzen wir dann

$$A_{k,k} = \Sigma_l m_l a_k^2,$$

dagegen für ungleiche Indices des A

$$A_{k,h} = \Sigma_l m_l a_{k,l} a_{h,l},$$

so wird

$$2T = \Sigma_k \Sigma_h A_{k,h} \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

wo jeder Wert des h mit jedem des k zu combiniren ist, und folglich wegen $A_{k,h} = A_{h,k}$

$$P_i = -\tfrac{1}{2}\Sigma_k \Sigma_h \dot{q}_k \dot{q}_h \frac{\partial A_{k,h}}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{d\Sigma_k A_{k,i} \dot{q}_k}{dt}.$$

Die wesentlichsten Eigenschaften dieser Gleichungen, wie sie in der mechanischen Wärmetheorie in Anwendung kommen, sind schon zu ersehen, wenn eine Masse m mit einer einzigen cyklischen Coordinate q und einer langsam veränderlichen p vorhanden ist. Ein Beispiel bietet eine rasch rotirende Röhre, mit welcher eine Masse m mitrotirt. Alles Uebrige ist natürlich massenlos. q ist der Winkel, um den sich die Röhre, von einer gegebenen Anfangslage ausgehend, gedreht hat; p ist die Entfernung der Masse von der Drehungsaxe. An der Masse ist ein Faden befestigt, welcher über eine Rolle und dann in der Axe der Röhre fortläuft. Eine an seinem Ende angreifende Kraft kann sich während der Drehung p langsam verändern. Dies ist also die Kraft P, während Q an einer mit der Röhre verbundenen Kurbel angreift.

Um dagegen die Anwendung derselben Gleichungen auf die Theorie der elektrischen Ströme zu versinnlichen, sind drei Massen erforderlich, welche in analoger Weise an drei coaxialen Röhren befestigt sind. Die oberste und unterste Röhre, welche die gleichen Massen m_1 und m_2 tragen, sind wieder durch Kurbeln drehbar, an denen die Kräfte Q_1 und Q_2 angreifen. Durch Zahnräder aber wird bewirkt, dass die Winkeldrehung q_3 der mittleren Röhre, woran die Masse $m_3 = 4m_1$ befestigt ist, das arithmetische Mittel der beiden Winkeldrehungen q_1 und q_2 der übrigen Röhren ist. Drei aus dem Röhrensysteme heraushängende Fäden reguliren wie oben die drei Distanzen l_1, l_2 und l_3 der Massen von der Drehungsaxe. Dann wird

$$A_{11} = m_1(l_1^2 + l_3^2), \quad A_{22} = m_1(l_2^2 + l_3^2), \quad A_{12} = m_1 l_3^2.$$

Denkt man sich daher 3 Handgriffe durch ein Gestänge so mit den 3 Fäden verbunden, dass bei Bewegung des 1. resp. 2. um die Stücke p_1 resp. p_2 nur l_1 resp. l_2 sich ändern, bei Bewegung des 3. um p_3 aber sich alle l so ändern, dass $l_1^2 + l_3^2$ und $l_2^2 + l_3^2$ constant bleiben, so sind die auf die Handgriffe wirkenden Kräfte

$$P_1 = -\tfrac{1}{2}\dot{q}_1^2 \frac{\partial A_{11}}{\partial p_1}, \quad P_2 = -\tfrac{1}{2}\dot{q}_2^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial p_2}, \quad P_3 = -\dot{q}_1 \dot{q}_2 \frac{\partial A_{12}}{\partial p_3},$$

während die auf die beiden Kurbeln wirkenden Kräfte sind

$$Q_1 = \frac{d}{dt}(A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2), \quad Q_2 = \frac{d}{dt}(A_{12}\dot{q}_1 + A_{22}\dot{q}_2).$$

Die Gleichungen haben vollkommen dieselbe Form, wie die von Thomson für zwei elektrische Ströme mit den Intensitäten $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$, und den Selbstinductionscoefficienten A_{11} und A_{22} gefundenen. A_{12} ist ihr wechselseitiger Inductionscoefficient, p_1, p_2 und p_3 sind Coordinaten, von denen nur A_{11} resp. A_{22} und A_{12} abhängen.

Ein vom Mechaniker Gasteiger in Graz verfertigter Apparat, an welchem diese Bedingungen realisirt waren (es konnte jedoch nur p_3, nicht p_1 und p_2 verändert werden), und welcher in der That alle an zwei elektrischen Strömen beobachteten Erscheinungen mechanisch nachzuahmen gestattete, wurde vom Vortragenden vorgezeigt. Die Fäden waren durch eine Stange ersetzt, an welcher die drei Massen durch Parallelogrammführungen befestigt waren, wie sie beim Centrifugalregulator der Dampfmaschine vorkommen. Bezüglich der Details mag verwiesen werden auf: „Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes“, Leipzig bei J. A. Barth 1891, sechste Vorlesung.

Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Function einer Variabeln.

Von

K. Hensel (Berlin).

Ist u eine unbestimmte, aber endliche Grösse, so sind die beiden Formen:

$$(1) \qquad x_1 = \frac{x}{x-u}, \quad x_2 = \frac{1}{x-u}$$

für jeden Wert von x endlich. Durch die Gleichung $x = \frac{x_1}{x_2}$ ist somit x als Quotient zweier allenthalben endlichen Formen dargestellt, deren Zähler offenbar nur für $x = 0$, der Nenner nur für $x = \infty$ verschwindet.

Eine entsprechende Darstellung als Quotient zweier allenthalben endlichen Formen erhält man für rationale und für algebraische Functionen von x. Ist nämlich y mit x durch die ganze algebraische Gleichung:

$$(2) \qquad f(\overset{n}{y}, \overset{m}{x}) = 0$$

verbunden, so ergiebt sich für x und y folgende simultane Darstellung in der verlangten Form:

$$(3) \qquad y = \frac{\eta}{x_2^m}, \quad x = \frac{x_1}{x_2},$$

denn die analytische Function η wird niemals unendlich gross; dieselbe kann als eine „ganze homogene algebraische Form von (x_1, x_2)" bezeichnet werden.

Betrachtet man jetzt an Stelle der rationalen Functionen von (x, y) die sogenannten „homogenen Formen von (x_1, x_2, η)", so ergiebt sich der Satz:

> Jede rationale Function von (x, y) kann als Quotient von zwei ganzen homogenen Formen von (x_1, x_2, η) derselben „Dimension" dargestellt werden, und umgekehrt ist jeder derartige Quotient einer Function der durch (2) bestimmten Klasse algebraischer Functionen gleich.

Bei dieser Darstellung werden Zähler und Nenner niemals unendlich, und sie verschwinden nur für die Null- beziehungsweise für die Unendlichkeitsstellen der betreffenden algebraischen Function.

Die Fundamentalaufgabe dieser Theorie besteht nun darin, alle ganzen Formen von (x_1, x_2, η) vollständig aufzustellen, und diese ist völlig identisch mit der folgenden:

> Es soll ein vollständiges System von rational unabhängigen ganzen homogenen Formen
>
> $$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \cdot \cdot \cdot, \quad \eta_{n-1}$$

gefunden werden, dessen Gesamtdimension

$$M = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1}$$

eine möglichst kleine ganze Zahl ist.

Die Aufstellung eines solchen „Fundamentalsystems" ergiebt sich nun auf rationalem Wege, nämlich allein mit Hülfe des euklidischen Verfahrens. Mit seiner Hülfe beherrscht man vollständig die ganzen homogenen Formen von (x_1, x_2, η). Es besteht nämlich der wichtige Satz:

Alle ganzen homogenen Formen von (x_1, x_2, η) und nur sie lassen sich in der Form:

$$u_0 \eta_0 + u_1 \eta_1 + \cdots + u_{n-1} \eta_{n-1}$$

darstellen, wo $u_0, \ldots, u_{n-1}$ ganze homogene Formen von (x_1, x_2) allein sind.

Mit Berücksichtigung des vorigen Satzes folgt hieraus unmittelbar:

Jede algebraische Function $\varphi(x, y)$ lässt sich in der Form:

$$\varphi(x, y) = \frac{u_0 \eta_0 + \cdots + u_{n-1} \eta_{n-1}}{v_0 \eta_0 + \cdots + v_{n-1} \eta_{n-1}}$$

darstellen, wo $u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1}$ ganze homogene Formen von (x_1, x_2) allein sind.

Eine unmittelbare Folge dieses Resultats ist z. B. der sogenannte Riemann-Roch'sche Satz.

Den ganzen oder allenthalben endlichen algebraischen Formen, die man durch die obige Darstellung durch das Fundamentalsystem völlig beherrscht, steht am nächsten eine grössere Klasse von Formen, welche ich als „algebraische Formen erster Gattung" bezeichnen möchte. Sie haben die charakteristische Eigenschaft, dass sie zwar unendlich werden können, aber nirgends von so hoher Ordnung als irgend eine rationale Form von (x_1, x_2) allein, deren Nenner an derselben Stelle verschwindet. Vermittelst dieser Eigenschaft der Formen erster Gattung, durch welche sie ihren Platz zwischen den rationalen ganzen und den rationalen gebrochenen Formen angewiesen erhalten, kann man sie nun ebenfalls vollständig mit Hülfe eines Fundamentalsystems darstellen. Aus dem Fundamentalsystem

$$(8) \qquad \eta_0, \quad \eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_{n-1}$$

für die ganzen Formen kann man nämlich wieder auf rationalem Wege ein solches System algebraischer Formen erster Gattung

$$(8a) \qquad \bar{\eta}_0, \quad \bar{\eta}_1, \quad \ldots, \quad \bar{\eta}_{n-1}$$

ableiten, dass jede Form $\bar{w}$ der ersten Gattung eindeutig in der Form:

$$\bar{w} = \bar{u}_0 \bar{\eta}_0 + \cdots + \bar{u}_{n-1} \bar{\eta}_{n-1}$$

dargestellt werden kann, deren Coefficienten $\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{n-1}$ ganze homogene Formen von (x_1, x_2) sind.

Die Elemente des Fundamentalsystems (8a) stehen zu denjenigen des Systems (8) in der einfachen Beziehung, dass ihre Dimensionen beziehlich gleich $-\mu_0, -\mu_1, \ldots, -\mu_{n-1}$ sind, während die des absoluten Fundamentalsystems die Werte $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ besitzen.

Ich will die hier angedeuteten Grundzüge der Theorie der algebraischen Formen benutzen, um ein Problem aus der Theorie der algebraischen Integrale, nämlich das der vollständigen und rationalen Darstellung der Integrale erster Gattung zu lösen: Es sei:

$$J = \int \varphi(x, y)\, dx$$

irgend ein algebraisches Integral, wo x mit y wieder durch die Gleichung (2) zusammenhängt.

Durch die vorher benutzte Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\eta}{x_2^m}$$

geht dasselbe dann über in:

$$J = \int \frac{\varphi(x_1, x_2, \eta)}{x_2^2} \cdot (x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2)$$

$$= \int \Phi(x_1, x_2, \eta)(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2),$$

wo φ eine homogene algebraische Form der nullten, Φ also eine solche der (-2)ten Dimension bedeutet.

Fragt man sich nun, wann ein solches Integral J *von der ersten Gattung*, d. h. wann es allenthalben endlich und stetig ist, so ergiebt eine einfache Betrachtung den folgenden wichtigen Satz:

> Das Integral J ist dann und nur dann ein Integral der ersten Gattung, wenn der Integrand $\Phi(x_1, x_2, \eta)$ eine algebraische Form der ersten Gattung ist.

Berücksichtigt man also die vorher gegebene allgemeine Darstellung der Formen erster Gattung durch das Fundamentalsystem $\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{n-1}$, so ergiebt sich für den Integranden φ der folgende Ausdruck:

$$\varphi = x_2^2 . \Phi = x_2^2(\bar{u}_0 \bar{\eta}_0 + \bar{u}_1 \bar{\eta}_1 + \cdots + \bar{u}_{n-1} \bar{\eta}_{n-1}),$$

wo $\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{n-1}$ homogene ganze Formen von (x_1, x_2) mit beliebigen Coefficienten sein können.

Alle Integranden erster Gattung und nur sie sind also durch die einfachen Formen

$$x_1^{\lambda_1} . x_2^{\lambda_2} \quad \bar{\eta}_i$$

homogen und linear mit constanten Coefficienten darstellbar; die Exponenten λ_1 und λ_2 sind hierbei so zu wählen, dass

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_i \quad \text{und} \quad \lambda_2 \geqq 2$$

ist, weil ja $\bar{\eta}_i$ von der Dimension $-\mu_i$ ist.

Die Anzahl p aller dieser unabhängigen Integranden erster Gattung ist also

$$p = (\mu_1 - 1) + \cdots + (\mu_{n-1} - 1) = M - n + 1,$$

d. h. gleich der um Eins vermehrten Gesamtdimension des Fundamentalsystems, vermindert um den Grad der Gleichung.

Es lassen sich also alle Integranden erster Gattung linear und homogen durch p unter ihnen mit beliebigen constanten Coefficienten darstellen, und diese letzteren bestimmen sich einzig und allein durch Auflösung linearer Gleichungen, d. h. sie sind rationale Functionen von x und y mit ganzzahligen Coefficienten.

Ueber litterarische Unternehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern.

Von

Felix Müller (Berlin).

Die „Deutsche Mathematiker-Vereinigung" hat, entsprechend ihrem Zwecke, „die Mathematik nach allen Richtungen hin zu fördern und auszubreiten und die Stellung dieser Wissenschaft im geistigen Leben des deutschen Volkes nach Gebühr zu heben", unter anderen Aufgaben auch die thatkräftige Förderung des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik" auf ihr Programm gesetzt. Darauf hinweisend, unterbreitete der Vortragende Vorschläge zu neuen litterarischen Unternehmungen, welche geeignet sein dürften, das Studium der Mathematik zu erleichtern. Er betonte besonders das Bedürfnis einer Einführung in die mathematische Litteratur und den Mangel an Sachregistern zu den bedeutenderen mathematischen Journalen, referirte über einige neuere bibliographische Unternehmungen und bedauerte, dass die Fortsetzung zu Poggendorff's biographisch-litterarischem Wörterbuche noch immer nicht erschienen sei. Schliesslich entwickelte der Vortragende den Entwurf zur Herstellung eines „Mathematischen Wörterbuches", das bei dem grossen Umfange, den die Wissenschaft erreicht hat, und bei der Erweiterung der mathematischen Terminologie heute unentbehrlich geworden ist. Das Material zu einem solchen Wörterbuche hat der Vortragende seit 20 Jahren gesammelt; es enthält ca. 4000 mathematische Kunstausdrücke und über

1200 Namen. Bei der Ausführung, die nur durch Mitwirkung vieler vollbracht werden kann, ist nicht eine vollständige, alphabetisch geordnete mathematische Encyklopädie ins Auge gefasst, sondern der Schwerpunkt lediglich auf die historisch-litterarische Ergänzung gelegt worden.

Gestaltliches über den Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche.

Von
W. Dyck (München).

Die Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche bilden bekanntlich ein im reellen Gebiete den hyperbolischen Teil der Fläche zweifach überdeckendes Curvensystem, welches längs der parabolischen Curve im allgemeinen Spitzen aufweist. Es findet (im allgemeinen) nur an gewissen ausgezeichneten Punkten der parabolischen Curve ein besonderes Verhalten des Curvensystems statt. Es lassen sich dabei drei Formen von singulären Punkten unterscheiden, welche denjenigen einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung (mit einer unabhängigen Variable) entsprechen. [Bezüglich des gestaltlichen Verlaufs des Curvensystems in der Umgebung dieser Stellen vergleiche man einen Aufsatz des Verf. in den Sitz. Ber. der bayr. Akad. vom J. 1891, insbes. Tafel I—III daselbst.] Dabei ist die Anzahl dieser im allgemeinen stets auftretenden singulären Stellen an eine bestimmte Relation geknüpft, in welche die Zusammenhangszahl (Charakteristik) des hyperbolisch gekrümmten Teiles der Fläche eingeht [Vergl. a. a. O. § 4].

Geometrisch lassen sich diese singulären Stellen der Haupttangentencurven dadurch charakterisiren, dass in ihnen die parabolische Curve einen Wendeberührpunkt besitzt, in welchem die Schmiegungsebene der parabolischen Curve zusammenfällt mit der Tangentialebene an die Fläche.

Sei

$$(1)\quad 0 = -z + \tfrac{1}{2}f_{22}y^2 + \tfrac{1}{6}[f_{111}x^3 + 3f_{112}x^2y + 3f_{122}xy^2 + f_{222}y^3] + \cdots$$

die Gleichung der Fläche, bezogen auf ein Coordinatensystem, für welches der Nullpunkt ein parabolischer Punkt, die xy-Ebene Tangentialebene der Fläche ist, so hat man für die Gleichung der Schmiegungsebene an die parabolische Curve im Nullpunkte:

$$(2)\qquad f_{22}U(f_{111}x + f_{112}y) + Vz = 0,$$

wo

$$(3)\qquad \begin{cases} U = f_{22}^3 . f_{111}, \\ V = f_{22}^2 . \Delta \end{cases}$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2f_{111}f_{122} - 2f_{112}^2 + f_{22}f_{1111} & f_{111}f_{222} - f_{112}f_{122} + f_{22}f_{1112} & f_{111} \\ f_{111}f_{222} - f_{112}f_{122} + f_{22}f_{1112} & 2f_{112}f_{222} - 2f_{122}^2 + f_{22}f_{1122} & f_{112} \\ f_{111} & f_{112} & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Bedingung, dass dieser Punkt Wendeberührpunkt der parabolischen Curve ist, lautet (Clebsch, Crelle's J. Bd. LXIII):

$$(4) \qquad D = f_{22}^5 . f_{111} . \Delta . \Delta' = 0$$

(wo Δ' die zu f_{112} gehörige Unterdeterminante von Δ bedeutet). Sieht man ab von dem eine höhere Singularität bildenden Falle $f_{22} = 0$, für welchen mehr als zwei Haupttangentenrichtungen den betreffenden Flächenpunkt durchsetzen, so zeigt die Gleichung (4), dass je nach dem Verschwinden von f_{111}, Δ, Δ' dreierlei Gattungen von Wendeberührpunkten der parabolischen Curve zu unterscheiden sind.

Die erste Gattung der Wendeberührpunkte, $f_{111} = 0$, ergiebt — für sie fällt wegen $U = 0$ die Schmiegungsebene der parabolischen Curve mit der Tangentialebene $z = 0$ der Fläche zusammen — die singulären Punkte des Systems der Haupttangentencurven. Für die beiden anderen Gattungen von Wendeberührpunkten, $\Delta = 0$ bez. $\Delta' = 0$, ist das Verhalten der Haupttangentencurven das allgemeine (Spitzen).

Ueber volle Invariantensysteme.

Von

David Hilbert (Königsberg).

Wenn wir eine binäre Form $n$ter Ordnung betrachten und das System der ganzen rationalen Invarianten dieser Grundform untersuchen wollen, so ergeben sich zunächst aus der allgemeinen von mir entwickelten Theorie die folgenden drei principiellen Sätze. 1. Der Satz von der Endlichkeit der Invarianten des vollen Systems. 2. Der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien. 3. Der Satz vom Abbrechen der Syzygienkette (vgl. meine Arbeit „Ueber die Theorie der algebraischen Formen", Math. Annalen Bd. 36). Es ist nun die weitere Aufgabe der Theorie, über diese allgemeinen Sätze hinaus für die Gradzahlen der Invarianten und des durch die Invarianten bestimmten Functionenkörpers ein allgemeines Gesetz zu finden. Zu einem solchen Gesetze gelangen wir, wenn wir aus dem Systeme der Invarianten $n-2$ Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ auswählen derart, dass jede andere Invariante eine ganze algebraische Function dieser $n-2$ Invarianten ist. Die Möglichkeit der Bestimmung

solcher Invarianten sowie die Eigenschaften derselben habe ich in den Göttinger Nachrichten 1891 entwickelt. Die Grade der Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ bezeichnen wir mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}$. Die übrigen Invarianten sind die ganzen Functionen eines algebraischen Functionenkörpers. Der Grad dieses Körpers sei g. Bezeichnen wir die Anzahl aller derjenigen Invarianten, deren Grad $\leqq \rho$ ist, mit $\varphi(\rho)$, so zeigt sich, dass $\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{n-2}}$ für unendlich wachsende ρ sich einer endlichen Grenze nähert. Es gelingt, diese Grenze auf zwei verschiedene Weisen auszuwerten, und durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke gelangen wir zu der folgenden Formel:

$$\frac{g}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}}$$

$$= -\frac{1}{2 . n!}\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3} - \binom{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-3} + \cdots \pm \binom{n}{\frac{1}{2}n-1}\right\} \text{ (n gerade)},$$

$$= -\frac{1}{4 . n!}\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3} - \binom{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-3} + \cdots \pm \binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

(n ungerade).

Dieselbe bestätigt sich in der That, wie man leicht sieht, in den beiden bisher berechneten Fällen: denn es wird:

für $n = 5$, $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 12$, $g = 2$

und

für $n = 6$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 6$, $\nu_4 = 10$, $g = 2$.

Ueber Configurationen, welche sich aus gegebenen Raumelementen durch blosses Schneiden und Verbinden ableiten lassen.

Von

A. Schönflies (Göttingen).

Es handelte sich darum — im Anschluss an den Vortrag des Herrn Wiener — zu prüfen, ob die Configuration 9_3, welche durch ein in zwei Gerade einbeschriebenes Sechseck bestimmt wird, unter den genannten Configurationen auftreten kann. Sind die Raumgebilde, von denen man ausgeht, in allgemeiner Lage, so ist dies nicht der Fall. Um dies zu zeigen, genügt es, als erzeugende Raumgebilde allein Punkte vorauszusetzen; jedes andere Gebilde kann nämlich durch die es erzeugenden Punkte ersetzt werden. Dies hat deshalb auf den Beweis keinen Einfluss, weil die folgende Untersuchung sich nicht auf die ganze räum-

liche Configuration, sondern vielmehr auf jede in ihr enthaltene Teilfigur erstreckt.

Für den Beweis fassen wir die Configuration als einen Cyklus von drei einander ein- und umbeschriebenen Dreiecken auf.

Die erzeugenden Raumpunkte bezeichnen wir durch 1, 2, 3, ..., die durch ihre Verbindung entstehenden Geraden durch 12, 13, ..., allgemein den Raum (λ—1)ter Dimension, welcher durch die Punkte 1, 2, ..., λ geht, durch

$$R_{\lambda-1} = 123 \ldots \lambda,$$

so folgt sofort, dass je λ—1 der Zahlen 1, 2, ..., λ einen in $R_{\lambda-1}$ liegenden $R_{\lambda-2}$ darstellen, und dass alle durch $R_{\lambda-1}$ laufenden R_λ die Zahlen 1, 2, ..., λ, und ausserdem noch eine von ihnen verschiedene Zahl enthalten. Diese sämtlichen Raumgebilde mögen jetzt den Processen des Schneidens und Projicirens beliebig unterworfen werden, so ist die Frage, ob sich dabei die ebene Configuration 9_3 ergeben kann. Entsteht nun irgend einer ihrer Punkte aus einem $R_{\lambda-1}$, so gilt dies von allen Punkten, und es geht jede Gerade aus einem R_λ hervor.

Bezeichnen wir die Punkte und Geraden durch dieselben Zahlen, wie die $R_{\lambda-1}$ und R_λ, aus denen sie hervorgehen, so gelten folgende zwei Sätze: 1. Zwei verbundene Punkte unterscheiden sich nur in einem Element. 2. Ist ein Punkt Schnittpunkt zweier Geraden, so enthält er die gemeinsamen Elemente beider Geraden.

Nun sei ... 123, wo ... beliebige, von 1, 2, 3, 4 verschiedene Elemente andeuten, eine Dreieckseite, und ... 12, ... 13 seien die Ecken des Dreiecks, so muss die dritte Ecke von der Form ... 14 sein. Die bezüglichen Dreieckseiten sind daher von der Form ... 134 und ... 124. Der dritte auf ... 123 liegende Punkt sei ... 23. Damit ist die Bezeichnung festgelegt. Aus Satz 2 folgt nun, dass die mit letzterem Punkt verbundenen Punkte der beiden anderen Seiten nur ... 34 und ... 24 sein können. Für die drei Verbindungslinien dieser Punkte würde sich daher das gemeinsame Symbol ... 234 ergeben, was unstatthaft ist. Damit ist der Beweis für beliebige Ausgangspunkte erbracht.

Es folgt noch, dass keine ebene Configuration, welche einander umschriebene Dreiecke enthält, durch Verbinden und Schneiden aus beliebigen Punkten eines R_n abgeleitet werden kann.

Ueber Geometrie der Zahlen.

Von
H. Minkowski (Bonn).

Wenn man für den Raum rechtwinklige Coordinaten einführt, so entsprechen den Systemen von drei ganzen Zahlen discrete Punkte, welche derart über den Raum verstreut liegen, dass sie eine gewisse Nähe in Bezug auf jede beliebige Raumstelle erreichen. Den Inbegriff aller dieser Punkte mit lauter Coordinaten, die ganze Zahlen sind, nennt der Vortragende das dreidimensionale Zahlengitter; unter dem Titel „Geometrie der Zahlen“ begreift er geometrische Studien über das dreidimensionale Zahlengitter und über das entsprechende Gebilde in der Ebene, und in weiterem Sinne auch die Ausdehnung der Ergebnisse solcher Studien auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung. Natürlich besitzt jede Aussage über die Zahlengitter einen rein arithmetischen Kern. Das Wort „Geometrie“ erscheint aber durchaus am Platze im Hinblick auf Fragestellungen, zu welchen die geometrische Anschauung verhilft, und auf Untersuchungsmethoden, welche fortwährend durch geometrische Begriffe ihre Richtung angewiesen erhalten.

Der Vortragende hat sich in Betreff der Zahlengitter hauptsächlich zwei Fragen gestellt; sie ergänzen einander in gewisser Beziehung, und Folgendes ist ihnen gemeinsam: Es handelt sich, wenn speciell vom Raume gesprochen wird, jedesmal um eine sehr allgemeine Kategorie von Körpern, welche so construirt werden, dass sie einen bestimmten Punkt des Zahlengitters — es sei dies etwa der Nullpunkt — in gewisser Weise umschliessen, und es soll dann jedesmal bei diesen Körpern eine gewisse Eigenschaft in Bezug auf das Zahlengitter allein durch die Grösse des Inhalts der Körper zu Stande kommen.

Die erste Kategorie von Körpern besteht aus allen denjenigen Körpern, welche im Nullpunkte einen Mittelpunkt haben, und deren Begrenzung nach aussen hin nirgends concav ist; und die fragliche Eigenschaft für diese Kategorie lautet: Wenn der Inhalt eines Körpers dieser Kategorie $\geqq 2^3$ ist, so schliesst der Körper notwendig noch weitere Punkte des Zahlengitters ausser dem Nullpunkte ein.

Die zweite Kategorie von Körpern ist noch umfassender; sie besteht aus allen Körpern, welche den Nullpunkt enthalten, und deren Oberfläche, vom Nullpunkte aus gesehen, nach jeder Richtung hin nur einen Punkt darbietet; und die fragliche Eigenschaft für diese zweite Kategorie lautet: Wenn der Inhalt eines Körpers dieser Kategorie

$$\leqq 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

ist, so können stets Deformationen des Körpers angegeben werden, bei welchen der Inhalt sich nicht ändert, der Nullpunkt fest bleibt und gerade Linien gerade Linien bleiben, und nach deren Ausführung alle Punkte des Zahlengitters mit Ausnahme des Nullpunkts ihren Ort ausserhalb des Körpers finden.

Der Vortragende weist auf die ausserordentliche Tragweite dieser, in ihrer Allgemeinheit ebenso einfach wie plausibel klingenden Sätze hin.

Ueber das Kowalevski'sche Rotationsproblem.

Von

F. Kötter (Berlin).

Im XII. Bande der Acta Mathematica hat Frau von Kowalevski eine Abhandlung veröffentlicht, welche einen wesentlichen und bedeutenden Fortschritt in der Lehre von der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt bezeichnet. Den beiden altberühmten integrablen Fällen dieses Problems wird hier ein neuer hinzugefügt, in welchem die Euler'schen Differentialgleichungen ausser den drei allgemeinen Integralen ein besonderes viertes algebraisches Integral besitzen.

Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich und doppelt so gross wie das dritte werden, und dass der Schwerpunkt in der Ebene der Axen gleichen Trägheitsmomentes liegt. Vermittelst der vier algebraischen Integralgleichungen hat Frau von Kowalevski die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit und die Richtungscosinus zwischen den Axen des Körpers und der Verticale durch hyperelliptische Functionen ausgedrückt, deren beide Argumente sich als lineare Functionen der Zeit ergeben. Bezüglich der sechs anderen Richtungscosinus giebt Frau von Kowalevski an, sie habe sich überzeugt, dass dieselben sich rational durch Thetafunctionen darstellen lassen; sie verzichtet jedoch auf eine wirkliche Darstellung derselben in Anbetracht der zu erwartenden Schwierigkeiten der Rechnung.

Diese Schwierigkeiten lassen sich beseitigen, wenn man die Ausdrücke der Frau von Kowalevski einer Umformung unterzieht. Der Ausdruck, welchen Frau von Kowalevski für den Richtungscosinus γ'' der ausgezeichneten Axe des Körpers erhält, ist ein verhältnismässig einfacher Bruch, dessen Zähler und Nenner homogene lineare Aggregate von je drei

hyperelliptischen Functionen sind. Weniger einfach sind die Brüche, welche die beiden anderen Richtungscosinus γ und γ' darstellen. Sie haben im Nenner das Quadrat des Nenners von γ'', im Zähler recht verwickelte Aggregate zweiten Grades verschiedener hyperelliptischer Functionen. Nun lässt sich aber der Nenner dieser beiden Ausdrücke in ein Product zweier linearen Aggregate derselben sechs hyperelliptischen Functionen zerlegen. Dasselbe gilt von den Zählern der Ausdrücke $x_1 = \gamma + i\gamma'$ und $x_2 = \gamma - i\gamma'$, und zwar kommt jeder der beiden Factoren des gemeinschaftlichen Nenners in einem der beiden Zähler vor; es sind also x_1 und x_2 Brüche, deren Zähler und Nenner homogene lineare Aggregate derselben sechs Functionen sind. Genauer beschrieben, stellen sich die beiden Zähler als Summe und Differenz zweier aus je drei Functionen gebildeten Bestandteile, und die Nenner als Summe und Differenz zweier ähnlichen Bestandteile dar, welche sich von den ersteren nur durch die Coefficienten unterscheiden.

Die genaue Betrachtung dieser Ausdrücke lehrt nun, dass es vorteilhaft ist, statt der Bewegung des mit dem Körper verbundenen Coordinatensystems diejenige eines dritten Coordinatensystems zu untersuchen, dessen eine Axe stets mit der ausgezeichneten Axe des Körpers zusammenfällt. Die relative Bewegung des Körpers gegen dieses Coordinatensystem ist also eine Drehung um eine Axe; die Geschwindigkeit dieser Drehung ist halb so gross wie die Componente der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers nach der gemeinschaftlichen Axe des Körpers und des neu eingeführten Coordinatensystems. Die Richtungscosinus dieses neuen Systems sind Brüche, deren Zähler und gemeinschaftlicher Nenner linear und homogen aus je drei hyperelliptischen Functionen zusammengesetzt sind. Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit des Systems nach seinen eigenen Axen erhält man aus den entsprechenden Richtungscosinus, indem man im Zähler die Coefficienten durch andere ersetzt.

Ganz wesentlich ist nun, dass die Coefficienten der in Frage stehenden Ausdrücke sich ebenfalls durch hyperelliptische Functionen darstellen lassen, deren Argumente naturgemäss constante Grössen sind. So erhält man die Richtungscosinus und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit als Functionen von vier Argumenten; die Form dieser Ausdrücke führt auf die gerechtfertigte Vermutung, dass die drei Richtungscosinus γ_1, γ_2, γ_3 als Functionen der beiden Wertepaare v_1, v_2 und v'_1, v'_2 denselben partiellen Differentialgleichungen genügen, welche auch für die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit von Wichtigkeit sind.

Die Existenz dieser Differentialgleichungen ermöglicht nun eine Be-

stimmung der noch fehlenden Richtungscosinus in derselben Weise, welche ich bei der Bewegung eines gewissen festen Körpers in einer Flüssigkeit angewendet habe.

In den nachfolgenden Formeln haben wir die Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass angewendet, und zwar bedeuten α_1, α_2, α_3, β, γ die fünf Indices 0, 1, 2, 3, 4 in einer passend gewählten Anordnung. Die Zeichen i_μ und i'_μ stellen Potenzen von i mit ganzen positiven Exponenten vor. Von den Argumenten der Thetafunctionen sind v'_1, v'_2 constante Grössen, während v_1, v_2, ebenso wie v_3, lineare Functionen der Zeit $(a_\alpha t + b_\alpha)$ sind. Durch die Theta ohne Argument zeigen wir die Nullwerte der betreffenden Thetafunctionen an, und endlich soll

$$\triangle f(x_1, x_2) = a_3 f(x_1, x_2) - i a_1 \frac{\partial f}{\partial x} - i a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

sein. Dann ergeben sich folgende Formeln für die Bewegung des von uns eingeführten Coordinatensystems:

$$\gamma'_1 = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$\gamma'_2 = \frac{\Sigma i_{\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$\gamma'_3 = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta\gamma} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha}.$$

(In diesen, wie in allen folgenden Formeln bezieht sich das Σ auf α, welches die Werte α_1, α_2, α_3 durchläuft.)

$$\alpha'_1 \pm i\beta'_1 = \frac{\Sigma i'_{\alpha\beta} (\mp 1)^{|\alpha\beta|} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1 \pm v'_1, v_2 \pm v'_2)_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\delta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha} e^{\pm i v_3},$$

$$\alpha'_2 \pm i\beta'_2 = \frac{\Sigma i'_{\alpha\gamma} (\mp 1)^{|\alpha\gamma|} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1 \pm v'_1, v_2 \pm v'_2)_{13\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha} e^{\pm i v_3},$$

$$\alpha'_3 \pm i\beta'_3 = \frac{\Sigma i'_{\alpha\beta\gamma} (\pm 1)^{|\alpha\beta\gamma|} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1 \pm v'_1, v_2 \pm v'_2)_{13\alpha\beta\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha} e^{\pm i v_3},$$

$$p' = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \Delta \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$q' = \frac{\Sigma i_{\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma} \Delta \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}},$$

$$r' = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta\gamma} \Delta \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Ausdrücke für die Richtungscosinus und Componenten der Drehungsgeschwindigkeit des mit dem

Körper fest verbundenen Coordinatensystems, wenn

$$\nabla f(x_1, x_2) = -2\triangle\triangle(f(x_1, x_2)) + a_4 \triangle f(x_1, x_2) + a_5 f(x_1, x_2),$$

$$u = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \nabla \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta}}{\Sigma i_{\alpha} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha}},$$

$$v = \frac{\Sigma i_{\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma} \nabla \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}}{\Sigma i_{\alpha} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha}}$$

ist, vermittelst der Formeln:

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = \frac{\alpha'_1 + i\alpha'_2}{u + iv}, \quad \alpha_3 = \alpha'_3,$$

$$\beta_1 + i\beta_2 = \frac{\beta'_1 + i\beta'_2}{u + iv}, \quad \beta_3 = \beta'_3,$$

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\gamma'_1 + i\gamma'_2}{u + iv}, \quad \gamma_3 = \gamma'_3,$$

$$p + iq = \frac{p' + iq'}{u + iv}, \quad r = 2r'.$$

Bemerkenswert ist, dass die Grösse, welche zu γ'_3 in derselben Beziehung steht wie u und v zu γ'_1 und γ'_2, den Wert Null hat.

Mitteilung über das Dreikörperproblem.

Von

A. Piltz (Jena).

Der Vortragende befasste sich seit einer Reihe von Jahren mit dem Dreikörperproblem von einer andern Seite her, als es gewöhnlich geschieht. Die Untersuchungen sind inzwischen zum Abschluss gekommen und haben zu einer vollständigen demnächst zu veröffentlichenden Theorie geführt, die eine Uebersicht über das ganze System der möglichen Bewegungen punktförmiger Körper gewährt, die sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, woran sich auch die notwendigen Rechnungen anschliessen. Ein vereinfachter Fall giebt ungefähr eine Vorstellung von den einzuführenden neuen Begriffen:

Von den drei gegebenen Körpern befindet sich der eine (1) in Ruhe. Um seinen Ort als Mittelpunkt bewegt sich Körper (2) gleichmässig in einer Kreisbahn. Körper (3) wird von beiden angezogen, jedoch so, dass die Masse m_2, mit der Körper (2) anzieht, sehr klein ist. Dann kann man sich eine unendliche Menge verschiedener ebener Bewegungen denken, die sich folgendermassen aus „Gliedern" zusammensetzen. Nach je einem

endlichen Zeitabstand kommt Körper (3) immer wieder in eine Nähe des Körpers (2) von der Ordnung m_2. In der Zwischenzeit bewegt sich Körper (3) zufolge der gemachten Voraussetzungen in einem annähernden Kegelschnittbogen um Körper (1). Bei Gelegenheit der räumlichen Annäherung von (3) an (2) in der angegebenen Ordnung bewirkt (2) in einem Zeitteil von der Ordnung m_2 eine endliche Abänderung der Geschwindigkeit des Körpers (3) in Grösse und Richtung, sodass jene aufeinander folgenden Kegelschnittbogen wesentlich verschiedenen Kegelschnitten angehören. Die relative Bewegung des Körpers (3) um Körper (2) in einem Zeitabschnitt der Grössenordnung m_2 um einen Zeitpunkt der grössten Annäherung beider Körper herum geht in einer annähernden Hyperbel vor sich, deren Linearmasse von der Ordnung m_2 sind und deren Asymptoten die Tangenten jener anderen Kegelschnittbogen sind. Solche Bewegungen kann man sich willkürlich zusammensetzen: Jene aufeinander folgenden (annähernden) Kegelschnittbogen werden, bis auf die Grössenordnung m_2 genau, willkürlich vorgeschrieben, nur dass das Bestehen der schon Jacobi bekannten einen algebraischen Integralgleichung eine einzige Bedingung auferlegt. Dann bleibt für das Mass der Annäherung des Körpers (3) an (2) nach je einem solchen „Glied" der Bewegung gerade noch die Mannigfaltigkeit übrig, dass in der besprochenen Weise der Uebergang aus jedem Glied in das nächstfolgende bewirkt werden kann. Es kommt darauf an, ein vollständiges System der möglichen Glieder auch für das allgemeinere Problem aufzustellen mit geeigneten Definitionen, die für alle Parameter des Problems, namentlich der Massen m_{ik}, womit je ein Körper i den Körper k anzieht, passen. Dies gelingt, und zwar auch in der Verallgemeinerung auf die allgemeinsten Massen m_{ik} und auf die Bewegung im Raum. Jene besonderen erwähnten Glieder sind natürlich nur sehr specielle. Complexe Bewegungen müssen zunächst mit berücksichtigt werden. Die Definitionen der „Glieder" und der „Abschnitte", in denen sie zusammenstossen, enthalten teils topologische, teils quantitative Bestimmungen. Die hauptsächlichsten zu überwindenden Schwierigkeiten bestanden im Beweis, dass man bei dieser Vereinzelung sämtlicher verschiedenen Bewegungen auch sämtliche möglichen Bewegungszustände erhält, d. h. das vollständige System aller Bewegungen. Die Schwierigkeiten betreffend Convergenzbeweise von Reihen fallen hier weg, da Reihenentwickelungen nicht zu den Definitionen benutzt werden, sondern erst nachträglich zu Zahlen- und Tabellenberechnungen, wenn der Charakter des Verlaufs der Bewegungen schon vorher feststeht.

Der Vortragende beabsichtigt mit diesen sehr weithin anwendbaren

Begriffen eine Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen, bez. -Gleichungssysteme, die bisher unmöglich war, zu entwickeln. Er wies auch auf die Notwendigkeit der Einführung ähnlicher Begriffe wie dieser „Glieder“ in die analytische Zahlentheorie hin.

Ueber bedingte Biegungen krummer Flächen.

Von

P. Stäckel (Halle a. S.).

In der von Gauss begründeten Theorie der Biegung krummer Flächen handelt es sich zunächst um die Untersuchung der beiden Probleme: Wie erkennt man, dass zwei gegebene Flächen in einander durch Biegung übergehen können? und: Welches sind alle Biegungsflächen einer gegebenen Fläche? In neuerer Zeit sind aber auch Probleme anderer Art aufgetreten, bei denen Flächen daraus ermittelt werden sollen, dass sie Biegungen zulassen, welche gewissen Bedingungen genügen. Eine solche Aufgabe findet sich in meiner Inauguraldissertation: Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche (Berlin. 1885). Es ist gegeben eine Flächenschar $U(x, y, z) = \alpha$, und es wird gefragt, ob es eine Fläche giebt, die sich stetig so biegen lässt, dass ihre Punkte bei der Biegung stets auf der Fläche der Schar bleiben, auf der sie ursprünglich lagen. Die Lösung dieser Aufgabe ist für die Dynamik von Wichtigkeit. Fasst man nämlich $U(x, y, z)$ als Kräftefunction auf, so gilt der Satz, dass bei denselben Anfangsbedingungen ein bewegter Punkt auf der gebogenen Fläche gerade die Bahn durchläuft, die aus der Bahn auf der ursprünglichen Fläche durch die Biegung hervorgeht.

Den Fall, dass die Flächenschar $U = \alpha$ aus parallelen Ebenen besteht, habe ich in meiner Dissertation erledigt. Ein weiteres Beispiel solcher Biegungen giebt der bekannte Satz von Herrn Schwarz, dass jede Minimalfläche sich stetig so biegen lässt, dass sie Minimalfläche bleibt. Wird ein Punkt der Fläche festgehalten, so beschreiben die anderen bei der Biegung Ellipsen, die in Ebenen liegen, welche durch jenen Punkt gehen. Es lässt sich nun, wie ich an anderer Stelle ausführlich beweisen werde, das Umgekehrte behaupten. Lässt sich eine Fläche, während einer ihrer Punkte festgehalten wird, so biegen, dass alle ihre Punkte Bahnen beschreiben, die in Ebenen durch diesen Punkt liegen, so ist die Fläche notwendig eine Minimalfläche, und diese Eigenschaft bleibt bei den Biegungen der verlangten Art erhalten“. Andere Umkehrungen des Schwarz'schen Satzes findet man bei Darboux, Théorie des surfaces, T. I. Livre III. Chap. V.

Ueber die Abwickelung von Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander.

Von

A. Wangerin (Halle a. S.).

Zur Aufstellung der endlichen Formeln für die Abwickelung einer Rotationsfläche mit constantem negativen Krümmungsmass auf der Pseudosphäre mit gleichem Krümmungsmass bedurfte es bisher einer langen und umständlichen Rechnung, die sich auf die Theorie der geodätischen Polarcoordinaten stützte. Der Vortragende giebt zur Ableitung der in Rede stehenden Formeln eine einfachere Methode an, welche die Kenntnis der geodätischen Linien jener Flächen nicht voraussetzt. Die Methode besteht darin, zunächst die allgemeinsten Gleichungen für die conforme Abbildung beider Flächen auf einander zu suchen; und diese kann man unmittelbar aus den Formeln für die Bogenelemente der Flächen ablesen. Die Abwickelung aber kann als ein specieller Fall der conformen Abbildung aufgefasst werden; um die Formeln für die Abwickelung zu erhalten, ist es daher nur nötig, die bei der Abbildung auftretenden willkürlichen Functionen passend zu bestimmen. Diese Bestimmung nun lässt sich auf die Ermittelung zweier Functionen $F(\xi)$ und $F_1(\eta)$ mit den von einander unabhängigen Argumenten ξ, η zurückführen, welche der Functionalgleichung

$$(1) \qquad 1-F(\xi)F_1(\eta) = \pm(\xi+\eta)\sqrt{F'(\xi)F_1'(\eta)}$$

genügen. Dabei bezeichnen F' und F_1', wie üblich, die Ableitungen von F und F_1. Es gelingt ohne Schwierigkeit, die der Bedingung (1) genügenden Functionen zu finden, und danach bedarf es nur noch einer Zerlegung eines complexen Ausdrucks in seine Bestandteile, um zum Ziele zu gelangen. Als Resultat der Rechnung ergiebt sich folgendes: Für die Pseudosphäre mit dem Krümmungsmass $-\frac{1}{a^2}$ sei ρ der Radius eines Parallelkreises, φ der Winkel, den ρ mit einer festen Meridianebene bildet. Für eine andere Rotationsfläche mit dem Krümmungsmass $-\frac{1}{a^2}$ mögen die analogen Grössen mit r, υ bezeichnet werden. b sei die in der Gleichung der zweiten Fläche neben a auftretende Constante, und zwar sei zunächst $b < a$ (während für die Pseudosphäre $b = a$ ist). Dann bestehen zwischen ρ, φ einerseits, r, υ andererseits folgende Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{r^2+a^2-b^2} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,\dfrac{\rho}{2\alpha}\left[\dfrac{a^2}{\rho^2}+\alpha^2+(\varphi-\varphi_0)^2\right], \\ \operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(\upsilon-\upsilon_0) = \dfrac{2\alpha(\varphi-\varphi_0)}{\dfrac{a^2}{\rho^2}-\alpha^2+(\varphi-\varphi_0)^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind die allgemeinsten für die Abwickelung der beiden in Rede stehenden Flächen auf einander, da sie drei willkürliche Constanten φ_0, υ_0, α enthalten. Für den Fall $b > a$ gelten die Formeln (2) ebenfalls, nur hat dann die willkürliche Constante α einen rein imaginären Wert. Setzt man $\alpha = m\sqrt{a^2-b^2}$, so kann man auch zu dem Falle $b = a$ übergehen, d. h. zur Abwickelung der Pseudosphäre auf sich selbst. Die Gleichungen (2) lassen sich leicht nach ρ und $\varphi-\varphi_0$ auflösen, und durch Combination beider Formen jener Gleichungen gelangt man unmittelbar zu den allgemeinsten Formeln für die Abwickelung zweier beliebigen Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander. Die hier an einem Beispiel entwickelte Methode lässt sich auch in anderen Fällen mit Nutzen verwenden.

Ueber die Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

E. Wiltheiss (Halle a. S.).

Das Integral

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E}}$$

hat Hr. Weierstrass durch die lineare Substitution auf die Form

$$u = -\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3}}$$

gebracht, wo g_2 und g_3 die Invarianten von $Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E$ sind:

$$g_2 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & E \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} B & C \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}.$$

Aus der obigen Gleichung folgt, da

$$s = \wp u = -\frac{\partial^2 \lg\sigma}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}$$

ist, dass

$$\text{(A)}\quad \left(\frac{\partial^3 \log\theta}{\partial u^3}\right)^2 = -\begin{vmatrix} A & B & C+2.\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} \\ B & C-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} & D \\ C+2.\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} & D & E \end{vmatrix}.$$

Durch weiteres Differentiiren ergiebt sich:

$$\text{(B)}\qquad \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u^4} = -6.\left(\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} g_2.$$

Diese beiden Gleichungen (A) und (B) gelten nicht nur für die ungeraden Thetafunctionen, sondern für alle Thetafunctionen, da

$$\frac{\partial^2 \lg\theta(u+\omega_i)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \lg\theta_i(u)}{\partial u^2}$$

ist.

Zwischen den partiellen Ableitungen zweiter, dritter und vierter Ordnung der hyperelliptischen Thetafunctionen bestehen nun bekanntlich ebenfalls partielle Differentialgleichungen. Ich habe kürzlich gefunden, dass sich dieselben, wenn die Thetafunctionen die durch Herrn Klein eingeführten Invarianteneigenschaften haben, auf eine den Gleichungen (A) und (B) ganz analoge Form bringen lassen. Diese möchte ich hier mitteilen.

Falls den Thetafunctionen die Gleichungen

$$du_1 = \frac{x_1\, dx_1}{2\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\, dx_2}{2\sqrt{f(x_2)}},$$

$$du_2 = \frac{dx_1}{2\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{2\sqrt{f(x_2)}},$$

wo

$$f(x) = Ax^6 + 6Bx^5 + 15Cx^4 + 20Dx^3 + 15Ex^2 + 6Fx + G$$

ist, zu Grunde liegen, so hat man die Determinante R =

$$\begin{vmatrix} A, & 3B, & 3C+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & D+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2} \\ 3B, & 9C-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2} \\ 3C+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}, & 9D-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 9E-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F \\ D+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F, & G \end{vmatrix}$$

notwendig. Bezeichnet man nämlich die Subdeterminanten hiervon mit $R_{\mu,\lambda}$, so bestehen die Gleichungen

$$\text{(A I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^{\varkappa}\, \partial u_2^{3-\varkappa}} \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^{\lambda} . \partial u_2^{3-\lambda}} &= (-1)^{\varkappa+\lambda+1} . 16 . R_{\varkappa+1,\lambda+1} \\ &= (-1)^{\varkappa+\lambda+1} . 16 . R_{\lambda+1,\varkappa+1}, \end{aligned} \right.$$

welche als der Relation (A) entsprechend angesehen werden müssen.

Die Uebersichtlichkeit der Differentialgleichungen lässt sich noch dadurch bedeutend vermehren, dass man sie mit Hülfe der vollkommen beliebigen Variabeln v und w zusammenfasst:

$$\text{(A Ia)} \quad \tfrac{1}{16}\left(v^3 \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3} + 3v^2 \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2} + 3v \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2} + \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}\right)$$
$$\cdot \left(w^3 \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3} + 3w^2 \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2} + 3w \cdot \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2} + \frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}\right) =$$
$$\left| \begin{array}{ccccc} 0, & 1, & -3v, & 3v^2, & -v^3, \\ 1, & A, & 3B, & 3C + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & D + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2} \\ -3w, & 3B, & 9C - \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2} \\ 3w^2, & 3C + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 9E - \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F \\ -w^3, & D + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F, & G \end{array} \right| .$$

Dazu kommt noch die bemerkenswerte Differentialgleichung:

$$R = 0,$$

zu welcher eine analoge bei den elliptischen Functionen nicht besteht.

Die Differentialgleichungen für die vierten partiellen Ableitungen der Thetafunctionen will ich sogleich mit Hülfe der beliebigen Variable w zusammenfassen. Dadurch erhalte ich:

$$\text{(BI)} \quad \left\{ \begin{aligned} & w^4 \cdot \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u_1^4} + 4w^3 \cdot \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u_1^3 \partial u_2} + 6w^2 \cdot \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} + 4w \cdot \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^3} + \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u_2^4} \\ & = -6 . \left(w^2 \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2} + 2w \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\right)^2 \\ & -12\left(f_{11}(w) \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2} - 2f_{12}(w) \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2} + f_{22}(w) \cdot \frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\right) + 24(f,f)_4, \end{aligned} \right.$$

eine Gleichung, die (B) entspricht.

Die Gleichungen (AI), (AIa) und (BI) gelten für alle geraden und ungeraden Thetafunctionen.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass ich diese Differential-

gleichungen aus den Relationen:

$$2\left(A\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3B\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}=0,$$

$$6\left(B\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+2\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}=0,$$

$$6\left(C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3.D.\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-F\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}-2\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}=0,$$

$$2\left(D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+3F\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}-G\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}=0$$

abgeleitet habe.

Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.

Von

Georg Cantor (Halle a. S.).

In dem Aufsatze, betitelt: Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (Journ. für Math. Bd. 77, S. 258), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, dass es unendliche Mannigfaltigkeiten giebt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . ., ν, . . . beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, . . ., ν, . . . haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, dass beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles $(\alpha\ldots\beta)$ sich nicht in der Reihenform:

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_\nu,\quad \ldots$$

vorstellen lässt.

Es lässt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.

Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

$$E=(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots),$$

welche von unendlich vielen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.

Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

$$E^{I} = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E^{II} = (w, w, w, w, \ldots),$$
$$E^{III} = (m, w, m, w, \ldots).$$

Ich behaupte nun, dass eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

„Ist $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ irgend eine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so giebt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_ν übereinstimmt."

Zum Beweise sei:

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier sind die $a_{\mu,\nu}$ in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$, so definirt, dass b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ verschieden sei.

Ist also $a_{\nu,\nu} = m$, so ist $b_\nu = w$, und ist $a_{\nu,\nu} = w$, so ist $b_\nu = m$.

Betrachten wir alsdann das Element:

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

von M, so sieht man ohne weiteres, dass die Gleichung:

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von ν:

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

also auch im besondern:

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch die Definition von b_ν ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ bringen lässt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, dass ein Ding E_0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.

Dieser Beweis erscheint nicht nur wegen seiner grossen Einfachheit,

sondern namentlich auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil das darin befolgte Princip sich ohne weiteres auf den allgemeinen Satz ausdehnen lässt, dass die Mächtigkeiten wohldefinirter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, dass jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.

Sei beispielsweise L ein Linearcontinuum, etwa der Inbegriff aller reellen Zahlgrössen z, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind.

Man verstehe unter M den Inbegriff aller eindeutigen Functionen f(x), welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, während x alle reellen Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, durchläuft.

Dass M keine kleinere Mächtigkeit hat als L, folgt daraus, dass sich Teilmengen von M angeben lassen, welche dieselbe Mächtigkeit haben, wie L, z. B. die Teilmenge, welche aus allen Functionen von x besteht, die für einen einzigen Wert x_0 von x den Wert 1, für alle andern Werte von x den Wert 0 haben.

Es hat aber auch M nicht gleiche Mächtigkeit mit L, da sich sonst die Mannigfaltigkeit M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu der Veränderlichen z bringen liesse, und es könnte M in der Form einer eindeutigen Function der beiden Veränderlichen x und z:

$$\varphi(x, z)$$

gedacht werden, so dass durch jede Specialisirung von z ein Element $f(x) = \varphi(x, z)$ von M erhalten wird und auch umgekehrt jedes Element f(x) von M aus $\varphi(x, z)$ durch eine einzige bestimmte Specialisirung von z hervorgeht. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn versteht man unter g(x) diejenige eindeutige Function von x, welche nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für jeden Wert von x von $\varphi(x, x)$ verschieden ist, so ist einerseits g(x) ein Element von M, andererseits kann g(x) durch keine Specialisirung $z = z_0$ aus $\varphi(x, z)$ hervorgehen, weil $\varphi(z_0, z_0)$ von $g(z_0)$ verschieden ist.

Ist somit die Mächtigkeit von M weder kleiner noch gleich derjenigen von L, so folgt, dass sie grösser ist als die Mächtigkeit von L. (Vgl. Crelle's Journal, Bd. 84 S. 242.)

Ich habe bereits in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (Leipzig 1883; Math. Annalen Bd. 21) durch ganz andere Hülfsmittel gezeigt, dass die Mächtigkeiten kein Maximum haben; dort wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff aller Mächtigkeiten, wenn wir letztere ihrer Grösse nach geordnet denken, eine „wohlgeordnete Menge" bildet, so dass es in der Natur zu jeder Mächtigkeit eine nächst grössere

giebt, aber auch auf jede ohne Ende steigende Menge von Mächtigkeiten eine nächst grössere folgt.

Die „Mächtigkeiten“ repräsentiren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen „Cardinalzahlen“, sie sind nichts anderes als die actual-unendlich-grossen Cardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu, wie jenen; nur dass die gesetzmässigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie“ zum Teil eine andersartige ist, wie im Gebiete des Endlichen.

Die weitere Erschliessung dieses Feldes ist Aufgabe der Zukunft.

Bericht
über den
gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie

von

Professor Dr. **Franz Meyer**
a. d. Königl. Berg-Akademie Clausthal.

Vorwort.

Als ich vor nunmehr anderthalb Jahren seitens des Vorstandes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung den Auftrag übernahm, einen Bericht „über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert“ zu verfassen, glaubte ich eine ungefähre Vorstellung von den Schwierigkeiten der Aufgabe zu haben. Diese Schwierigkeiten sind aber im Laufe der wirklichen Durchführung in einem Masse gestiegen, dass mich mehreremale das ermüdende Gefühl beschlichen hat, einer solchen Last nicht gewachsen zu sein.

Das vorliegende Werk leidet demgemäss an manchen Unvollkommenheiten.

In erster Linie wird man finden, dass die Besprechungen der einzelnen Untersuchungen der nötigen Kritik entbehren. Ich habe aber geglaubt, dem mathematischen Publicum einen grösseren Dienst zu erweisen, wenn ich unter Zurückhaltung der eigenen Persönlichkeit im Zusammenhange darlegte, was die verschiedenen Forscher im wesentlichen geleistet haben, und nicht, was dieselben hätten leisten sollen. Zudem habe ich versucht, Lücken in unserem gegenwärtigen Wissen durch die Art der Anordnung des Stoffes, wie in der Form von Aufgaben hervortreten zu lassen.

Dass die citirte Litteratur, trotzdem ich gerade auf sie viel zeitrau-

bende Mühe verwandt habe, auf Vollständigkeit noch immer keinen Anspruch machen kann, wird die Fülle des Stoffes entschuldigen. Die Litteratur der allerneuesten Zeit insbesondere ist mir zum Teil nicht zugänglich gewesen.

In der Verteilung des Materials auf den knappen, mir zu Gebote stehenden Raum habe ich mir manche Freiheit gestattet. Auf den Inhalt mancher Abhandlung sind mehrere Seiten verwendet worden, auf den von mancher andern, vielleicht ebenso wichtigen oder noch wichtigeren, nur einige Zeilen.

Man möge das einmal einer gewissen parteiischen Liebhaberei zu Gute halten, andererseits aber auch berücksichtigen, dass es nahezu unmöglich erscheint, etwa den Gedankengang einer symbolischen Rechnung zu zergliedern, wenn man nicht geradezu einen, mit dem Wesen jener Rechnung völlig vertrauten Leser voraussetzen will.

Aufrichtig bedauere ich, aus Mangel an Raum von den so zahlreichen und anregenden Anwendungen der Formentheorie auf die Geometrie fast gar keine Notiz genommen zu haben, sodass ein Abschnitt, wie der über Combinanten, ein sehr einseitiges Gepräge erhalten hat.

Möchte dieser Bericht zu einer gesammelten Bearbeitung der gemeinten Anwendungen Anlass geben, die, wie ich glaube, von den Algebraikern wie Geometern mit gleicher Freude begrüsst werden würde.

Bezüglich der Nomenclatur habe ich noch Einiges zu bemerken.

Die Wörter „Grad“ und „Ordnung“ werden nach dem vorwiegenden Sprachgebrauch dahin geschieden, dass das erstere sich auf die Dimension einer Form bezüglich gewisser Coefficienten, das letztere auf diejenige bezüglich gewisser Variabeln bezieht.

Ich habe mir indessen auch die weitere Consequenz gestattet, bei algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten die bisher übliche Bezeichnung „Grad“ durch „Ordnung“ zu ersetzen.

In der Formentheorie betrachtet man gewisse Formen als gegeben, aus denen dann eine unbegrenzte Reihe weiterer durch invariante Processe abgeleitet werden.

Die ersteren nenne ich durchweg „Ur-“ oder „Stamm“formen, während ich das sonst promiscue gebrauchte Wort „Grundformen“ für die Individuen eines „vollen Systems“ in Gordan'schem Sinne reservirt habe.

Hinsichtlich der abgeleiteten Formen habe ich es bei der etwas umständlichen Benennung „invariante Bildung“ bewenden lassen, da das von Sylvester vorgeschlagene Wort „Concomitante“ bisher nicht rechten Eingang gefunden hat, die kürzere Bezeichnung „Invariante“ hingegen in dieser Verallgemeinerung leicht zu Missverständnissen führt.

Eine binäre Form nter Ordnung bezeichne ich durchweg mit f_n oder φ_n, eine ternäre mit C_n, eine quaternäre oder höhere mit F_n.

Auf ein Autorenregister ist aus naheliegenden Gründen Verzicht geleistet worden; ein Sachregister erschien überflüssig, mit Rücksicht auf das Inhaltsverzeichnis, sowie die Rückverweisungen im Texte, namentlich zu Anfang jedes einzelnen Abschnittes.

Noch habe ich mit Dankbarkeit der vielfachen Unterredungen zu gedenken, welche ich über das vorliegende Thema mit den Herren Klein, Gordan, Brill und vielen andern gepflogen habe, sowie der wertvollen Unterstützung, welche mir durch bereitwilligste Ueberlassung von Litteratur seitens zahlreicher Fachgenossen und der Göttinger Universitätsbibliothek zuteil geworden ist, endlich auch der Mühe, welche sich Herr Lampe um die Ueberwachung der Correctur und um die geschäftlichen Verhandlungen mit der stets entgegenkommenden Verlagsbuchhandlung gegeben hat.

Clausthal, August 1892.

Rückblick*) auf die ältere Periode von 1841—1867.

Wir feiern zur Zeit das fünfzigjährige Jubiläum der Invariantentheorie. Wohl reichen die Wurzeln derselben in frühere Zeiten hinein: es sei hier erinnert einmal an die von Lagrange und Gauss**) begründete Theorie der quadratischen (ganzzahligen) Formen von zwei und drei Veränderlichen, andererseits an die durch Poncelet ins Leben gerufene, durch Chasles, Möbius, Plücker und Steiner weiter ausgebildete projectivische Geometrie***).

*) Eine Reihe von Litteraturnachweisen findet sich in Salmon's Modern higher Algebra, 4. Edition, Dublin 1885. Vgl. die erweiterte deutsche Ausgabe von Fiedler, 2. Auflage, Leipzig 1877. Im Folgenden mit „Salmon“ resp. „Fiedler“ citirt. Eine Zusammenstellung der auf die binären Formen bezüglichen Litteratur findet sich auch in der von Walter und Nöther besorgten deutschen Ausgabe von Faà di Bruno's „Theorie der binären Formen“. Leipzig 1881. Im Folgenden mit „Bruno“ citirt.

**) Lagrange constatirt in den Berliner Abhandlungen 1773 S. 265 die Invarianz der Discriminante von $ax^2 + 2bxy + cy^2$ beim Uebergange von x zu $x + \lambda y$, vgl. Salmon S. 343. Bei Gauss, Disquisitiones Arithm. (1801), bildet die allgemeine lineare Transformation die Grundlage der binären und ternären quadratischen Formen, deren Discriminanten als Invarianten nachgewiesen werden. In den art. 267, 268 wird gezeigt, wie die Reciproke (forma adjuncta) der ternären Form bei der „transponirten“ Substitution ungeändert bleibt. (Vgl. Salmon S. 344.)

Die ersten Anfänge der symbolischen Darstellung kann man nach Gordan (Math. Ann. VII S. 38) in Arbeiten von Cauchy, Boole, Pfaff, Jacobi verfolgen; weitere Analogien bot die Variationsrechnung (l. c. S. 37).

Der von Cauchy 1812 in voller Allgemeinheit aufgestellte Multiplicationssatz der Determinanten lässt sich ungezwungen als Beispiel für den invarianten Charakter einer heutzutage als identisch bezeichneten Covariante auffassen. In der That ist dies der Ausgangspunkt der Cayley'schen Betrachtungen.

Eine andere Art von Vorstufe zur Invariantentheorie bildet die Darstellung quadratischer Formen als Summen von Quadraten vermöge orthogonaler Transformationen, bezüglich derer man Baltzer's Determinantentheorie vergleichen mag (Lagrange, Laplace, Cauchy, Lebesgue, Jacobi). Endlich gehören hierher noch eine Reihe von vorbereitenden Sätzen Joachimsthal's über die Discriminante, die Taylor'sche Reihe u. s. w., sowie einige Beispiele von „Differentialinvarianten“ bei Cauchy.

***) Als die beiden Hauptmomente, welche hier in Betracht kommen, gelten wohl einmal die Rolle, welche das Doppelverhältnis als (irrationale) absolute Invariante spielt, sodann die Theorie der Polarreciprocität. Eine besondere Würdigung jener Geometer, vom Standpunkt der Algebra aus, giebt Clebsch in seiner Plücker-Biographie, Göttinger Abh. XVI S. 1—32.

Indessen datirt man doch die eigentliche Invariantentheorie erst seit jener Arbeit des Engländers Boole*) vom Nov. 1841, in der nicht nur allgemein die Invarianteneigenschaft der Discriminanten nachgewiesen, sondern auch ein einfaches Princip angegeben wird, wie man über die letzteren hinaus zu simultanen Invarianten von Formen gelangt.

Kurz darauf (Februar 1842) zeigt Boole**), dass die Polaren einer Form f zu einer ausgedehnten Klasse von Covarianten, d. i. zu invarianten Bildungen führen, welche ausser den Coefficienten von f (und denen von linearen Hülfsformen) noch die Variabeln enthalten.

Drei Jahre darauf (1845) hat sich Cayley***) der neuen Richtung

---

*) Cambr. Math. Journ. III S. 1—20. Die Arbeit ist datirt vom 28. April 1841. Boole verallgemeinert die orthogonale Transformation quadratischer Formen dahin, dass er nach den Bedingungen fragt, unter welchen zwei vorgelegte Paare von homogenen Formen gleicher Ordnung q, Q; q′, Q′ vermöge linearer Substitution der Variabeln in einander übergeführt werden können. Als notwendige (wenn auch durchaus nicht immer hinreichende) Bedingung ergiebt sich ihm, dass die gleich Null gesetzten Discriminanten von $q + \lambda Q$, $q' + \lambda Q'$ zu den nämlichen Gleichungen in λ führen müssen. Daraus fliesst als Corollar, dass die Discriminanten von q und q′ nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante differiren (l. c. p. 19). Der vollständige Beweis hierfür nebst der genauen Angabe des bez. Potenzexponenten wird von Boole erst drei Jahre später geliefert, Cambr. Math. Journ. IV (Nov. 1844), S. 167—171.

Es ist nicht ausser Acht zu lassen, dass im Jahre 1841 auch die Abhandlung Jacobi's über Functionaldeterminanten erschien, Journ. für Math. XXII S. 319—359. Dieselbe trägt kein Datum, indessen ist die voraufgehende grosse Determinantenarbeit von Jacobi mit dem Datum des 17. März 1841 versehen, eine kleinere, später folgende Arbeit desselben Verfassers mit dem des 18. März 1841.

In der erstgenannten Abhandlung erscheint als eine fundamentale Eigenschaft der Functionaldeterminanten, dass sie sich bei ganz allgemeinen Transformationen der Variabeln bis auf einen Factor, der selbst wiederum eine Functionaldeterminante ist, reproduciren. Hiervon wird eine Anwendung auf die Transformation vielfacher Integrale gemacht. Als specieller Fall des genannten Satzes tritt die Combinanteneigenschaft der Resultante zweier binärer Formen f, g gleicher Ordnung hervor, d. i. die Aenderung der Resultante um eine Potenz von $\lambda\mu' - \lambda'\mu$, wenn f, g durch $\lambda f + \mu g$, $\lambda' f + \mu' g$ ersetzt werden. Vgl. darüber den ersten Band der Gordan'schen Vorlesungen hg. von Kerschensteiner, Leipzig 1885.

**) Cambr. Math. Journ. III S. 106—119. Hier werden die Ergebnisse der ersten Abhandlung auf mehr als zwei Formen, die auch von ungleicher Ordnung sein können, ausgedehnt. Durch totale Differentiation der vorgelegten Formenäquivalenzen wird die Aufgabe auf die Aequivalenz von Differentialformen gleicher und dabei möglichst niedriger Ordnung zurückgeführt. Der Meinung Salmon's (S. 344), dass Boole hiermit den Satz begründet habe, dass Invarianten von Polaren Covarianten der Grundform seien, kann sich der Referent nicht anschliessen.

***) Collected Math. Papers Vol. I, S. 80—94, 95—112. Die zweite dieser Arbeiten erschien 1846.

Die Invarianz der betrachteten Formen tritt hier durchgängig als eine Erweiterung des Multiplicationssatzes der Determinanten auf. Die Erweiterung selbst geht in doppelter Richtung vor sich: einmal werden Determinanten höheren Ranges gebildet, die sich aus $(\varkappa !)^n$ Glie-

bemächtigt, und baut sogleich eine systematische Symbolik auf, den von ihm so genannten „Hyperdeterminantencalcül“, mittels dessen es gelingt, auch für eine einzelne Form beliebig zu vermehrende Reihen von Invarianten zu bilden.

„Aus diesem Calcül ist“, nach den Worten von Salmon*), „die moderne Algebra entsprungen“.

Etwas früher (1844) hatte schon Eisenstein**) die einfachsten In-

dern zusammensetzen, andererseits wird ein ganzes Aggregat von Determinanten unter der Form einer Matrix zusammengefasst. Die Determinanten höheren Ranges sind von Cayley bereits 1843 (l. c. 63—79, zweite Hälfte) eingeführt; die Abkürzung in der Bezeichnung ist eine erste Art von Symbolik. Die Anwendung dieser Ideen auf eine vorgelegte Urform nter Ordnung in m Variabeln vollzieht sich in der Weise, dass dieselbe zunächst ersetzt wird durch eine Form, welche in n Reihen von m Variabeln je linear ist, welche alle verschiedenen Substitutionen unterworfen werden können. Der Boole'sche Discriminantensatz erscheint jetzt in dem Lichte, dass sich die ursprüngliche und die transformirte Discriminante um eine Potenz des Productes sämtlicher n Substitutionsdeterminanten unterscheiden.

Nachträglich lassen sich einige oder alle n Variabelnreihen wieder identificiren, nur nicht in den für die Invarianten aufgestellten linearen partiellen Differentialgleichungen (S. 84), welche wiederum der Ausdruck für eine elementare Determinanteneigenschaft sind.

In der erstgenannten Abhandlung S. 80—94 ist die Methode soweit ausgebildet, dass man erkennt, wie jede binäre Form gerader Ordnung eine quadratische Invariante besitzt. Am Schlusse wird Boole als der Entdecker der ersten kubischen Invariante (einer biquadratischen Form) genannt, cf. Salmon S. 343, vgl. indessen unten bei Eisenstein.

Die zweite Abhandlung bietet wesentliche Fortschritte. Vgl. Salmon, Lesson 14. Der Grundgedanke ist, dass man die Functionaldeterminante von n Functionen von n Variabeln auffassen kann als das Resultat eines Differentiationsprocesses, welcher auf eine **einzige** Function ausgeübt wird, nämlich auf das Product jener n Functionen, jede in einer andern Variabelnreihe geschrieben; nachträglich ist die Verschiedenheit der n Variabelnreihen wieder aufzuheben. Dies gewährt den Vorteil, den Differentiationsprocess zu iteriren und verschiedene Iterationen zu combiniren. Sämtliche, so entstehende Processe, auf ganze homogene Functionen angewandt, sind invariantiver Natur, d. h. sie erzeugen aus den Functionen simultane Covarianten.

Die hiermit verknüpfte Symbolik ist in Wirklichkeit nur eine Abkürzung in der Darstellung **realer** Processe. Anders später bei Gordan, wo sich diese Processe auf symbolische Formen erstrecken. Der Cayley'sche Differentiationsprocess („Ω-Process“) ist heutzutage von grosser Bedeutung geworden. Cf. II. C, b, α.

*) Salmon S. 343.

**) Journ. für Math. XXVII. Die quadratische Covariante und die Discriminante einer binären kubischen Form figuriren bereits in der Note S. 75—79, datirt Dez. 1843, vgl. dazu die Arbeit S. 82—104, gleichfalls dat. Dez. 1843; die beiden Invarianten i, j der biquadratischen Form in der bekannten Note über die Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Ordnungen S. 81—83, dat. 1. Jan. 1844. Salmon (S. 343) bestreitet zwar, dass Eisenstein die Invarianz jener Formen bekannt gewesen sei. Eisenstein verweist indessen ausdrücklich am Schlusse der letztgenannten Note auf eine künftige Notiz über „die sehr merkwürdigen Eigenschaften und Umformungen der betr. homogenen Ausdrücke“.

und Covarianten einer kubischen und biquadratischen binären Form erkannt; es hatte Hesse*), in eleganter Handhabung des von Jacobi zur Vollendung gebrachten Determinantenapparats, der nach ihm benannten Covariante ein eingehendes Studium gewidmet und die Rolle aufgedeckt, welche dieselbe in der Theorie der ebenen Curven, insonderheit derer von der 3. Ordnung spielt.

Nicht unerwähnt darf bleiben, dass im gleichen Jahre (1844) Grassmann**) mit seiner Ausdehnungslehre hervortrat, dessen Ideen über Lückenausdrücke und mehrstufige Coordinaten den Keim zu der modernen Gestaltung unserer Theorie in sich tragen.

Indirect hat auch Galois***) durch seine Theorie von der Gruppe einer Gleichung eingegriffen (1846).

Während Aronhold†) der Erste ist, der im ternären Gebiete die Invarianten der kubischen Form und ihre Beziehung zur Discriminante auffindet (1849), sehen wir in dem Cyklus Sylvester'scher††) Publicationen

---

Diese Notiz ist in der That im gleichen Journalbande S. 319—321 erschienen, wo mit voller Präcision den beiden Covarianten nebst der Discriminante der kubischen Form die Invarianteneigenschaft zugesprochen wird.

Dagegen hat unzweifelhaft Boole zuerst die Discriminante der biquadratischen Form als ganze Function der beiden Invarianten i, j ausgedrückt, Cayley I S. 94, Salmon S. 343.

*) Journ. für Math. XXVIII S. 68—107. Die canonischen Gestalten der binären kubischen und biquadratischen Formen und ihre Verwendung zur Auflösung der bez. Gleichungen sind im gleichen Journ. dargestellt; die Invarianten treten freilich hierbei nur implicite auf.

Wegen der Bedeutung Hesse's für die moderne Algebra siehe Nöther in Schlömilch Z. XX und Klein im Programm des Münchener Polytechnikums. 1875.

**) Grassmann's bez. Verdienste sind übersichtlich von Sturm in der Biographie Math. Ann. XIV, siehe insbes. S. 25, geschildert worden. Vgl. Math. Ann. VII S. 12.

Von Schlegel ist der Versuch gemacht worden, eine Algebra im Sinne Grassmann's herauszugeben, Leipzig 1875, desgleichen von Schendel, Halle 1885.

***) Die Galois'schen Untersuchungen waren zwar schon 1829 publicirt, sind aber erst 1846 (Liouv. J. XI) allgemein zugänglich geworden. Ihr Einfluss auf die Invariantentheorie tritt übrigens erst in der neueren Periode hervor.

†) Journ. für Math. XXXIX S. 140—159. Zwei Jahre später überreichte Aronhold der Königsberger philosophischen Facultät ein Manuscript (welches niemals publicirt wurde), in dem er die Invariantentheorie auf einheitlicher Grundlage entwickelte. Seinen brieflichen Mitteilungen an Cayley zufolge muss er damals auch bereits im Besitze der Differentialgleichungen für die Invarianten gewesen sein. Cf. Salmon S. 344.

††) Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 186—200, 289—293 (1851); Bd. VII S. 52—97 (1852); Bd. VIII S. 62—64, 256—269 (1853); Bd. IX S. 85—103 (1854); cf. Cayley, Bd. VII 40—51, 97—98.

Den Sylvester'schen Aufsätzen gehen voran zwei solche von Boole Bd. VI 87—106, 107—113 (1851), in welchen die früheren Ergebnisse des Verf. zusammengefasst und durch einige wesentliche Zusätze vervollständigt werden, vgl. Salmon S. 344. Zu den letzteren gehört ein sehr fruchtbares Princip zur Erzeugung von neuen invarianten Bildungen. Für zwei homogene Variable x, y

wird bewiesen, dass, wenn diese durch eine Substitution mit der Determinante ε in x', y' übergehen, durch genau dieselbe Substitution die partiellen Ableitungen (einer arbiträren Function) $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$ übergeführt werden in $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}$, $-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}$. Eine Wiederholung des Beweisverfahrens (was indessen, als auf der Hand liegend, übergangen wird) würde ergeben, dass $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ gerade so in $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}$, $-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y' \partial x'}$, $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$ übergehen, wie x^2, xy, y^2 in x'^2, $x'y'$, y'^2 u. s. f.

Aus einer Identität $\varphi(x, y) = \psi(x', y')$ folgt daher in symbolischem Sinne die andere $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$, d.h. jedes Product von der Art $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\lambda}$ ist in Wahrheit zu ersetzen durch $\frac{\partial^{\varkappa+\lambda}}{\partial y^{\varkappa}\partial x^{\lambda}}$, und entsprechend für die gestrichenen Buchstaben.

Es erscheint einem nicht symbolisch veranlagten Leser merkwürdig, dass Boole von dem viel näher liegenden Satze keine Notiz nimmt, dass die Identität $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$ auch in realem Sinne gültig ist, sodass die ursprünglichen Variabeln durch die wirklichen Ableitungen einer Function ersetzt werden. Das Letztere hat erst Sylvester bemerkt. (Siehe folgende Seite.)

Boole erweitert seinen Satz auf das Gebiet von drei Variabeln, jedoch nur für orthogonale Transformationen.

In der zweitgenannten Arbeit verwendet Boole sein Princip dazu, um aus gewissen Klassen von Gleichungen in vier homogenen Variabeln die Productglieder vermöge linearer Transformation zu entfernen.

Sylvester beginnt damit, die Ergebnisse seiner Vorgänger unter einem einzigen Gesichtspunkte zu vereinigen. Dazu dient ihm der wichtige Satz: „Die Resultante von n homogenen Formen $\varphi(x)$ mit n Variabeln x, ist nach Ersetzung der letzteren durch n andere Formen $\psi(x)$, das Product von (leicht bestimmbaren) Potenzen der Resultante der $\varphi(x)$ und der Resultante der $\psi(x)$“ (Bd. VI S. 187). Die Resultante erscheint so als eine Invariante in höherem Sinne, d. h. höheren Transformationen gegenüber. Sind die $\psi(x)$ linear, so kommt man zur gewöhnlichen Invariantentheorie zurück. Nimmt man andererseits die $\psi(x)$ beliebig, dagegen die $\varphi(x)$ linear an, so ist damit die Combinanteneigenschaft der Resultante ausgesprochen, d. i. die Resultante von n linearen Verbindungen der ψ ist gleich der ursprünglichen Resultante der ψ, bis auf eine Potenz der Verbindungsdeterminante.

Das hierbei implicite zu Grunde gelegte Beweisprincip lautet: „Wird eine ganze Function f von n Variabeln für alle Wertsysteme derselben gleich Null, für welche eine zweite solche Function F verschwindet, so ist f in F als Factor enthalten.“ Dies Princip bedarf jedoch selbst eines Beweises, vgl. z. B. Hölder, Böklen math. naturw. Mitt. I S. 60 (1884); Study, „Methoden zur Theorie der ternären Formen“, Leipzig 1889 S. 31.

Die weiteren Entwickelungen Sylvester's gipfeln (Bd. VII S. 56) in dem Hauptgedanken, dass eine Linearform $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$ ungeändert bleibt, wenn man die x irgend einer linearen Substitution und gleichzeitig die u, die „contragredienten Variabeln“, der inversen Substitution unterwirft. Adjungirt man einer Form f(x) die Linearform u_x, so führen die simultanen In- resp. Covarianten bez. der x zu Contravarianten resp. gemischten

(1851—1854) bereits die Grundzüge einer allgemeinen Theorie erstehen, welche die Elemente von den verschiedenartigsten Zweigen der späteren Disciplin umfasst.

In zielbewusster Weise werden neben den ursprünglichen Veränderlichen die zu ihnen dualistischen eingeführt und damit die Lehre von den Contravarianten und Zwischenformen geschaffen. Eine Reihe neuer Processe zur Erzeugung invarianter Formen wird angegeben, insbesondere das Princip*) der — symbolischen, wie unsymbolischen — gegenseitigen Differentiation.

Sylvester begründet ferner (1851) die Lehre von den canonischen**)

Concomitanten („Zwischenformen" nach Aronhold) von f, und vice versa für eine Form $\varphi(u)$.

Sämtliche invarianten Bildungen („Concomitanten"), die aus einer Urform oder einer Reihe von solchen entspriessen, führen somit auf den engeren Begriff der Invarianten zurück.

Eine besondere Gattung von Contravarianten, die „formes adjointes", treten schon vorher bei Hermite auf, Journ. für Math. XL, S. 263 (1851). Sylvester nennt sie „Evectanten", Bd. VII S. 181.

Die Namen „Invariante, Covariante, Contravariante, Concomitante" treten bei Sylvester zum ersten Male Bd. VI S. 290 auf; die Ausdrücke „cogredient, contragredient" Bd. VII S. 53, „Discriminante" Phil. Mag. 1851 S. 406, „Combinante" Bd. VIII S. 63.

*) Aus der Thatsache, dass die x_i und die $\frac{\partial}{\partial u_i}$ cogredient sind, d. h. den nämlichen Substitutionen unterliegen, folgt zunächst (cf. oben bei Boole), dass die Einsetzung der realen Ableitungen einer Form $\varphi(u)$ nach den u_i statt der Variabeln x einer Form f(x) zu einer simultanen Contravariante von f und φ Veranlassung giebt (Bd. VII S. 194). Da aber weiterhin auch die Potenzen und Producte $x_1^n, x_1^{n-1}x_2, \ldots$ cogredient sind zu den $\frac{\partial^n}{\partial u_1^n}, \frac{\partial^n}{\partial u_1^{n-1}\partial u_2}, \ldots$, so lässt sich auch diese Ersetzung in einer Form f(x) der nten (oder auch höhern) Ordnung vornehmen (Bd. VI S. 96, 179). Die so entstehende Contravariante heisst später nte Ueberschiebung von f über φ (cf. Salmon S. 346).

Den letzteren Process bezeichnet Sylvester als symbolische Einführung der $\frac{\partial}{\partial u_i}$ statt der x_i.

Das Entsprechende gilt natürlich für die u_i und $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

In der Geometrie stellt das Verschwinden des erstgenannten Gebildes, wenn etwa die Anzahl der Variabeln gleich drei genommen wird, die Enveloppe der (linearen) Polaren dar, welche die Punkte von $f=0$ bezüglich der Curve $\varphi=0$ besitzen. Derartigen Polargebilden (und ihren Verallgemeinerungen) hat Steiner ein eingehendes Studium gewidmet.

Die Ueberschiebungen sind geometrisch hauptsächlich im Falle ihres identischen Verschwindens untersucht worden: f heisst dann apolar zu φ. Vgl. die späteren Arbeiten von Reye.

**) Phil. Mag. Nov. 1851 S. 391—410, auch separat erschienen London, bei Bell. (1851).

Vgl. Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 193, 194, 198, 293; auf S. 123 wird erwähnt, dass der Name „canonische" Form von Hermite stammt.

Formen und wendet sie auf die Darstellung der binären Formen ungerader (speciell der fünften) Ordnung als Potenzsummen an: für den wichtigen Fall der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln bahnt er durch die Formulirung des „Trägheitsgesetzes“ *) neue Wege.

Bei ihm finden wir auch schon die Erkenntnis von der Bedeutung des „Elementarteilerprincips“ **) (1851) wie des „Combinanten“-Begriffs***) (1853).

Ohne Beweis teilt er die Cayley-Aronhold'schen grundlegenden Differentialgleichungen †) für invariante Bildungen binärer Formen mit (1852).

Als äusseres Zeichen für den Umfang der vorgeschrittenen Entwickelung mag die ausgedehnte, grösstenteils von Sylvester selbst herrührende Terminologie dienen, die sich am Ende seiner grossen Abhandlung über Sturm'sche Functionen (1853) zusammengestellt findet ††).

Für die binären Formen gerader Ordnung f_{2n} werden gelegentlich specifische canonische Darstellungen erwähnt, z. B. l. c. S. 123, 293: damit f_{2n} als Summe von n vollen Potenzen $(\lambda-\alpha_i)^{2n}$ darstellbar ist, muss die „Catalecticante“ verschwinden: Phil. Mag. S. 394.

Bei den binären Formen ungerader Ordnung f_{2n+1} wird übrigens nur der allgemeine Fall der Darstellung als Summe von $n+1$ vollen Potenzen $(\lambda-\alpha_i)^{2n+1}$ in Betracht gezogen (l. c. S. 392), d. h. solange die Discriminante der „Canonizante“, deren Wurzeln die α sind, von Null verschieden ist.

Die quaternäre kubische Form als Summe von fünf Kuben wird zuerst wohl in Cambr. and Dubl. Math. J. VI S. 199 erwähnt. Vgl. die Angaben in der Clebsch-Biographie Math. Ann. VII S. 17.

*) Phil. Mag. 1852 II S. 138; Phil. Trans. 1853 S. 407—548. Borchardt erwähnt im Journ. für Math. LIII S. 275—283 (1857), dass Jacobi das in Rede stehende Gesetz bereits 1847 bekannt gewesen sein müsse. Vgl. Hermite's Beweis, ebenda S. 271. Siehe „Fiedler“ S. 471. In den Phil. Trans. 1853 (l. c.) macht Sylvester von dem Trägheitsgesetz eine fundamentale Anwendung auf die sog. „Bézoutiante“, d. i. eine aus der Discriminante einer binären Form f nter Ordnung abgeleitete quadratische Form von $n-1$ Variabeln, von deren Discussion die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von $f=0$ unmittelbar abhängen. Vgl. Hermite, Journ. für Math. LII S. 39—51 (1856).

**) Phil. Mag. Mai 1851 S. 119—140, wo auf Grund des Principes alle möglichen Ausartungen in den Schnittverhältnissen von zwei Curven, bezw. Flächen 2. Ordnung aufgezählt werden.

Sylvester verwendet auch das nämliche Princip bereits zur Untersuchung der Aequivalenz von quadratischen Formen, Phil. Mag. April 1851 S. 295—305; vgl. die Berichtigung dazu, Mai 1851, S. 415.

***) Cambr. and Dublin. Math. J. VIII S. 63 (vgl. damit das oben über die Resultante Bemerkte), sowie S. 256 u. ff., Bd. IX S. 85 u. ff. Es werden Differentialgleichungen für die Combinanten aufgestellt: ferner wird gezeigt, dass die letzteren nur von den Determinanten abhängen, die man aus den ursprünglichen Coefficienten bilden kann. Als Anwendung wird die Resultante von drei quadratischen ternären Formen in Function von zwei einfachen Combinanten dargestellt.

In den Annali di Mat. (1) I 1858 S. 344—348 hat Betti ein System charakteristischer Differentialgleichungen für die Combinanten abgeleitet.

†) Vgl. das oben bei Aronhold S. 84 Anm. †) Bemerkte (Salmon S. 344).

††) Phil. Trans. 1853 S. 543—548.

Das Jahr 1854, mit dem Sylvester diese erste Reihe von invariantentheoretischen Arbeiten abschliesst, ist überhaupt als eines der bedeutungsvollsten unserer ersten Periode anzusehen. Wir haben da vor allem der Leistungen von Hermite zu gedenken, der übrigens schon vorher (1851) die Theorie durch Einführung des „Evectanten"-Begriffs*) bereichert und in zahlentheoretischen Arbeiten mannigfache Keime**) zur Formenbildung ausgestreut hatte.

Hermite stellt das „Reciprocitätsgesetz" auf***), welches die invarianten Bildungen im binären Gebiete in einer merkwürdigen Art zu Paaren anordnet.

Indem er im Falle einer binären Form ungerader Ordnung zwei lineare†) Covarianten als neue Veränderliche einführt, vermag er die erstere in eine „typische" Gestalt zu bringen, in der die Coefficienten selbst Invarianten sind.

In unmittelbarem Zusammenhange damit stehen die Systeme „associirter" Formen, von denen jede weitere, zur ursprünglichen Form gehörige Bildung in rationaler Weise††) abhängt.

---

*) Journ. für Math. XL S. 263. Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 292.

**) Bei Hermite ist das Ausgangsproblem ein rein zahlentheoretisches, nämlich nachzuweisen, dass die Anzahl der verschiedenen „Klassen", in welche die binären (und höheren) Formen gegebener Ordnung mit vorgeschriebenen Werten für die Invarianten zerfallen, eine endliche ist. Vgl. insbesondere die Aufsätze im XL. und XLI. Bande des Journals für Math. (1850, 1851).

***) Cambr. and Dublin Math. J. IX S. 172—217, vgl. speciell S. 173—175. Wie sich die Ausdehnung auf höhere Formen vollzieht, ist erst in neuester Zeit (1892) von Deruyts gezeigt worden.

†) Hierbei sind zwei Fälle von einander zu trennen. Die beiden, ursprünglich von Hermite behufs Transformation eingeführten linearen Covarianten sind irrational, nämlich die Linearfactoren einer quadratischen Covariante φ. Geht die Form f dabei über in die „canonische" Form F, so ist jede ganze Function der Coefficienten von F, welche bei denselben Substitutionen unverändert bleibt, die jene Covariante φ in sich überführen, eine ganze rationale Invariante von f, bis auf eine Potenz der Discriminante von φ im Nenner (l. c. S. 179). Dies ermöglicht z. B. die Aufstellung der Invarianten einer Form 5. Ordnung.

Erst im weiteren Verlauf wird von der Transformation mittels zweier linearen rationalen Covarianten Gebrauch gemacht S. 190: dadurch geht f (sc. von ungerader Ordnung) in eine „typische" Form über.

††) Journ. für Math. LII S. 1—38. Die Bezeichnung „associirte Formen" ist auf S. 23 eingeführt. Die Entstehung derselben sieht man am einfachsten so ein: $f(x, y)$ sei die vorgelegte Form $n$ter Ordnung, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ seien zwei Covarianten von f. Nach Boole sind x und y cogredient mit $-\frac{\partial h}{\partial y}$ und $\frac{\partial h}{\partial x}$, also auch mit $xX-\frac{\partial h}{\partial y}Y$ und $yX+\frac{\partial h}{\partial x}Y$, wo X, Y zunächst willkürliche Parameter sind. Somit ist auch der Ausdruck

$$G = g\left(xX-\frac{\partial h}{\partial y}Y,\ yX+\frac{\partial h}{\partial x}Y\right)$$

für alle Werte von X, Y eine Covariante von f, d.h. die einzelnen Coeffi-

Bei der Durchführung für den Fall fünfter Ordnung ergiebt sich ihm das erste Beispiel einer „schiefen" Invariante*) und ihr Ausdruck durch die drei anderen. Eine schöne Anwendung davon bieten die Invariantenkriterien für die Realität**) der Wurzeln einer Gleichung fünfter Ordnung.

In einer weiteren, ebenfalls 1854 erschienenen Arbeit***) behandelt Hermite (wiederum zunächst von zahlentheoretischen Gesichtspunkten ausgehend) das Problem, eine quadratische, ternäre Form durch lineare Substitutionen der Variabeln in sich selbst überzuführen: die Coefficienten der fraglichen Substitution werden als rationale Functionen von einer Anzahl willkürlicher Parameter dargestellt, was für den wichtigen Specialfall einer Summe von Quadraten Cayley bereits 1846†) allgemein ausgeführt hatte. Umgekehrt hat Cayley bald nach Hermite (1855) dessen Formeln auf allgemeine quadratische Formen von n Variabeln ausgedehnt††).

Aber noch in anderer Richtung erweist sich das Jahr 1854 als ein fruchtbares. Auf der einen Seite erbringt Cayley den Nachweis†††) für die (oben schon erwähnten) linearen partiellen Differentialgleichungen, denen die Invarianten binärer Formen als Functionen der Coefficienten genügen,

---

cienten der Potenzen und Producte der X, Y sind Covarianten von f: der erste ist offenbar f selbst. Man fasse jetzt X, Y als neue Variabeln auf, die von den alten linear abhängen. Da die Substitutionsdeterminante (bis auf einen Zahlenfactor) gleich h selbst ist, so stimmt jede In- oder Covariante von G mit der ursprünglichen bis auf eine Potenz von h überein.

Nimmt man speciell $g = h = f$, so geht f vermöge der angegebenen Substitution über in eine Form F mit den Coefficienten f, 0, f_2, f_3, ..., f_n, i. e. den zu f associirten Formen, und irgend eine In- oder Covariante von f wird darstellbar als eine ganze Function der f_i, bis auf eine Potenz von f im Nenner.

Bei Hermite dienen diese associirten Formen vor allem zur Lösung der zahlentheoretischen Aufgabe, die binären kubischen und biquadratischen Formen in „Ordnungen" einzuteilen (l. c. S. 31 u. f.).

Setzt man übrigens in den f_i $y = 0$, $x = 1$, so fällt der Uebergang von f zu F zusammen mit dem in der elementaren Gleichungstheorie üblichen Verfahren, den Coefficienten der zweithöchsten Potenz zum Verschwinden zu bringen.

Als eine andere Anwendung der f_i erscheint die Cayley'sche Relation zwischen den Covarianten einer biquadratischen Form, und diese Relation wird wiederum zu einer eleganten Transformation des elliptischen Integrals 1. Gattung verwandt (l. c. S. 8).

*) Cambr. and Dublin Math. J. IX S. 186 u. f. Die Rolle, welche diese Invariante bei der Auflösung der Gleichungen fünfter Ordnung spielt, ist von Hermite im Journ. für Math. LIX S. 394—305 besonders betont worden.

**) l. c. p. 198 u. f. Eine Ausführung im einzelnen hat Hermite später gegeben: C. R. 1865, 1866.

***) Cambr. and Dublin Math. J. IX S. 63—67. Vgl. Brioschi, Journ. für Math. LII S. 133—141 (1856).

†) Journ. für Math. XXXII S. 119—123.

††) Journ. für Math. L S. 288—299.

†††) Journ. für Math. XLVII S. 109—124.

während Brioschi*) die entsprechenden Gleichungen bezüglich der Wurzeln jener Formen herleitet.

Endlich beginnt mit dem Jahre 1854 die Reihe der Cayley'schen**) Memoirs upon Quantics, die 1861 (VII. Mem.) ein vorläufiges Ende erreicht. In ihrer Vielseitigkeit, verbunden mit der erschöpfenden Behandlung einzelner Fälle, sind sie noch heute für den Algebraiker, wie für den Geometer eine reiche Fundgrube.

Indem Cayley die invarianten Bildungen binärer Formen als die ganzrationalen Lösungen ihrer Differentialgleichungen auffasst***), tritt er schon in der zweiten jener Arbeiten (1856) der wichtigen Frage näher†), ob sich nicht bei gegebener Urform die Anzahlen der zugehörigen (linear unabhängigen) Formen a priori angeben lassen. In der That erhält er, wenn

---

*) Annali di Tortolini V S. 207—211, spec. S. 209. Vgl. Betti, Annali di Mat. (1) I S. 129—134 (1859). In derselben Zeitschrift Bd. IX S. 82 (1859) giebt Brioschi einen strengen Beweis für die Cayley'schen Differentialgleichungen der Invarianten im Falle binärer Formen, in den Annali di Mat. (1) I (1858) einen solchen S. 160 im Falle von Formen mit n Variabeln.

**) Die ersten sechs Memoirs befinden sich im zweiten Band der Coll. Papers: S. 221—234 (1854); 250—275 (1856); 310—335 (1856); 513—526 (1858); 527—557 (1858); 561—599 (1859).

Das Wort „Quantic" entspricht genau dem deutschen Worte „Form".

***) Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine vorgelegte Form, so ist das Ergebnis des Processes $x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ersetzbar durch einen, nur auf die Coefficienten von f ausgeübten Differentiationsprocess, der nach Brioschi mit $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$ bezeichnet wird. Dann sind die gemeinten $\frac{n(n-1)}{2}$ Differentialgleichungen, welche eine Covariante von f definiren, durch $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$ gegeben. Die Erweiterung auf mehrere Formen und mehrere Variabelnreihen ist leicht vorzunehmen (l. c. S. 224). Cayley zeigt mit Hülfe des (von Lie so genannten) Poisson'schen Klammerausdrucks, dass die mittels seiner früheren Symbolik definirten Covarianten in der That jenen Gleichungen genügen. Dass aber umgekehrt die letzteren die bei linearer Transformation unzerstörbaren Bildungen genau charakterisiren, hat allgemein erst Aronhold 1863 nachgewiesen (Journ. für Math. LXII).

Bei binären Formen hat man zwei solcher Gleichungen: bildet man aus ihnen wiederum den Poisson'schen Klammerausdruck, so gelangt man unmittelbar zu dem Satze, dass das passend normirte „Gewicht" eines jeden Terms einer Covariante constant ist.

Im II. Memoir S. 254 wird der wichtige Satz begründet, dass durch einen einfachen Differentiationsprocess und dessen Wiederholung aus dem ersten Coefficienten einer Covariante succ. die übrigen ableitbar sind.

†) Cayley geht dabei von den Begriffen der „asyzygetischen" und „irreducibeln" Covarianten aus (S. 250). Asyzygetisch heisst eine Reihe von Covarianten, die nicht durch eine lineare Relation (Syzygie) mit numerischen Factoren verknüpft sind; eine irreducible Covariante ist eine solche, die nicht durch solche von geringerem Grade ganz und rational ausgedrückt werden kann.

Grad und Ordnung solcher Formen vorgegeben sind, die bez. Anzahl als bestimmten Coefficienten in der Potenzreihe einer „erzeugenden Function“*), wie sie schon Euler bei der Zerlegung von Zahlen benutzt hatte. Die Herleitung dieser Potenzreihe stützt sich freilich auf eine, nicht völlig bewiesene Abzählungsformel*).

Hiermit allein schon hat Cayley eine Fülle neuer Anregungen gegeben, die sich bis in die neueste**) Zeit fortgepflanzt haben.

Dagegen vermag er nicht, das später so berühmt gewordene Problem (das hier zum ersten Male gestellt wird) allgemein zu erledigen, die von einer binären Urform bedingte unbegrenzte Reihe von invarianten Formen auf ganze, rationale Functionen einer endlichen***) Anzahl unter ihnen zu reduciren.

Im IV. Mem. (1858) wird der fundamentale Begriff der Ueberschiebung†) zweier Formen eingeführt und ein einfacher, unsymbolischer Ausdruck dafür gegeben, dessen Bedeutung wiederum in den letzten Jahren stärker hervorgetreten ist.

Ein wesentlicher Anstoss zur Verbreitung der jungen und ziemlich spröden Disciplin geht von der eleganten, invariantentheoretischen Auflösung††) der Gleichungen dritten und vierten Grades aus (1858). Nicht

---

*) Der Satz auf S. 257: „Die Anzahl der asyzygetischen Covarianten, für eine binäre Form der Ordnung n, von der Ordnung (in den Variabeln) μ und vom Grad (in den Coefficienten) ϑ ist gleich der Anzahl von Gliedern des Grades ϑ und des Gewichtes $w = \frac{1}{2}(n\vartheta - \mu)$, vermindert um die Anzahl der Glieder des Grades ϑ und des Gewichtes $w-1$“ setzt stillschweigend die lineare Unabhängigkeit eines Systems linearer Gleichungen voraus. Der Beweis für die Gültigkeit dieser Voraussetzung ist erst weit später Sylvester gelungen (Phil. Mag. 1878).

Die eben erwähnte, auf ϑ und w bezügliche Anzahl ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl w als eine Summe von ϑ Zahlen der Reihe $(0, 1, \ldots, n)$ zu bilden, und somit (vgl. S. 243) gleich dem Coefficienten von $x^w z^\vartheta$ in der Entwickelung der „erzeugenden Function“ (S. 260):

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\ldots(1-x^nz)}.$$

Nach geeigneter Umformung liefert aber diese erzeugende Function noch mehr, nämlich die Totalanzahl der irreducibeln Covarianten. So erhält man für $n=3$:
$$\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$
was angiebt, dass vier irreducible Bildungen von den resp. Graden 1, 2, 3, 4 existiren, die indessen durch eine Syzygie vom sechsten Grade verknüpft sind (S. 262).

**) Vgl. II, A., c.

***) Vgl. S. 252, 253, 268, 270.

†) Vgl. S. 517.

Andererseits ist die Ueberschiebung bereits unter den von Cayley 1846 eingeführten symbolischen Bildungen als specieller Fall enthalten.

††) Diese Auflösung (V. Memoir) ist ein unmittelbarer Ausfluss der einen, bei der kubischen resp. biquadratischen Form existirenden Syzygie. Uebrigens

die geringste Leistung endlich ist die Durchdringung der für die Binärformen ausgebildeten algebraischen Methoden mit der projectischen Geometrie*) der einstufigen Grundgebilde.

Insbesondere ist Cayley's projectivische Massbestimmung für Ebene und Raum (VI. Mem., 1859) späterhin für die Ausbildung der „nichteuklidischen“ Geometrie**) als grundlegend erkannt worden.

Im Zusammenhange mit diesen systematischen Arbeiten stehen noch weitere von dem gleichen Verfasser, von denen hier kurz erwähnt sein mögen: die Untersuchungen über Teilungen von Zahlen***) (1855, 1856); die grosse Abhandlung über symmetrische Functionen†) (1857) (mit den einfachen Regeln für Grad und Gewicht derselben), die als eine Einleitung in die spätere Theorie der Halbinvarianten angesehen werden kann; ferner die fruchtbare Umgestaltung††) der Bézout'schen Eliminationsmethode (1857), sowie die Ausdehnung der Sylvester'schen Canonisirungsmethode auf binäre Formen gerader Ordnung†††) (1857).

Als unmittelbare Fortsetzung dieser Arbeitsrichtung erscheint die weittragende Entdeckung von M. Roberts††††) (1861), wonach eine (binäre) Covariante bereits durch ihr Leitglied (source, leading term) völlig charakterisirt ist, sodass alle Relationen (Syzygien) zwischen Covarianten unmittelbar durch dieselben Relationen zwischen den Leitgliedern ersetzt

---

sind hier die Vorarbeiten von Boole (Cambr. Math. J. III S. 116), Eisenstein (Journ. für Math. XXVII S. 89), Hesse (Journ. für Math. XXXVIII S. 262) und Sylvester (Cambr. and Dublin Math. J. VI) nicht ausser Acht zu lassen.

Indessen ist der Wert dieser Auflösungsmethoden wohl vielfach überschätzt worden: in der That dürfte die Formentheorie erst dann einen integrirenden Bestandteil des Auflösungsproblems bilden, wenn man nach dem Vorgange von F. Klein die zur Gleichung gehörende Gruppe als eine Gruppe von Collineationen in einem höheren Raume auffasst.

*) Dieser Teil ist ausführlicher von Fiedler bearbeitet worden (Leipzig 1862).

**) Es gebührt wohl F. Klein das Verdienst, zuerst die bez. Cayley'schen Ergebnisse in ihrer fundamentalen Bedeutung erkannt zu haben; vgl. Math. Ann. IV und VI.

***) Papers II S. 235—249 (1855), 47—52 (1858). Vgl. dazu besonders Sylvester Quart. Math. J. I S. 141—152 (Juli 1855), sowie Brioschi und Sylvester in Annali di Tort. VIII (1857), Bellavitis in Annali di Mat. II (1859), Bruno im Journ. für Math. LXXXV und Math. Ann. XIV. Bellavitis giebt l. c. S. 147 eine Uebersicht über die frühere Litteratur. Eine kurze Zusammenstellung der bez. Hauptsätze giebt Hagen in seiner Synopsis der höheren Math. Berlin, 1891 S. 1—3.

†) Papers II S. 417—439, cf. S. 454—464.

††) Journ. für Math. LIII S. 366—367 oder Papers IV S. 38—39.

†††) Journ. für Math. LIV S. 48—58 und 292 oder Papers IV S. 43—53.

††††) Quart. J. IV (1861) S. 168—178, 324—328. Der Fundamentalsatz dieser Theorie sagt aus, dass das Leitglied des Productes zweier Covarianten gleich dem Product der einzelnen Leitglieder ist.

werden können und umgekehrt. Ein solches Leitglied ist immer noch (wie die Invarianten) eine symmetrische Function der Wurzeldifferenzen, hat aber im wesentlichen nur noch einer Differentialgleichung zu genügen. Roberts selber hat gleichzeitig die Fruchtbarkeit seiner Methode an dem Beispiel der Formen fünfter Ordnung*) ausführlich dargelegt.

Wir mögen hier gleich anschliessen, was innerhalb des soeben durchlaufenen Zeitraumes (1854—1861) für die Theorie der letztcitirten Formen resp. der Gleichungen fünfter Ordnung, soweit es hier in Frage kommt, geschehen ist.

Auch da ist es wiederum Hermite, der die neuen Wege vorzeichnet, die dann von Brioschi und Cayley weiter verfolgt werden. Hatte Hermite sich schon 1856 einer rationalen Transformation der Variabeln, bei der der Nenner eine Covariante des Zählers war, bedient, um ein elliptisches Integral erster Gattung in eine typische Normalform überzuführen**), so unternimmt er es zwei Jahre darauf, die seit langem in der Algebra verwendete Tschirnhausen-Transformation allgemein in invariante Form***) umzusetzen derart, dass damit zugleich der invariante Charakter der transformirten Gleichung, die überdies von möglichst wenigen Parametern abhängen soll, deutlich hervortritt.

Daran reiht sich von selbst die Durchführung der entsprechenden Forderung für die verschiedenen Resolventen einer vorgelegten Gleichung. Im Falle der fünften Ordnung sind solche Resolventen bekanntlich die bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen auftretende Modular- und Multiplicatorgleichung†).

Eine systematische Bearbeitung der Gleichungen fünfter Ordnung in

---

*) Annali di Mat. (1) III (1860) S. 340—344.

**) Journ. für Math. LII S. 8. Vgl. Brioschi in Annali di Mat. (1) IV S. 192 (1861).

***) C. R. XLVI p. 961 (1858). Ist $f(x)=0$ die vorgelegte Gleichung, α eine Wurzel derselben, und $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha}$, so schreibt Hermite die der Wurzel α zugeordnete Wurzel der transformirten Gleichung in der Gestalt $\varphi(z)-\frac{1}{n}f'(z)$, wo die Potenzen $z^0, z^1, \ldots, z^{n-2}$ durch $n-1$ willkürliche Parameter t zu ersetzen sind. Die Coefficienten der transformirten Form werden Polarenbildungen von Covarianten von f: insbesondere verschwindet der zweite Coefficient, während der nächstfolgende die sog. „Bézoutiante" wird, eine quadratische Form der t, von der die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von $f=0$ abhängen. Im übrigen bietet die Hermite'sche Modification der Tschirnhausen-Transformation den grossen Vorteil, dass die neuen Coefficienten von möglichst geringem Grade in den alten ausfallen. Vgl. dazu noch Cayley, Journ. für Math. LVIII (1861) S. 259 oder Papers IV S. 259—269.

†) Man sehe etwa in Clebsch „binäre Formen" nach §§ 114, 115.

dieser Hinsicht hat Hermite allerdings erst später*) geliefert (1865 bis 1866).

Den drei bisher am meisten hervorgetretenen Forschern Cayley, Sylvester und Hermite tritt von 1854 an Brioschi**) zur Seite, in den verschiedensten Richtungen deren Schöpfungen vervollständigend und weiterführend. Um einige Hauptmomente anzuführen, stellt er (1857) für die Resultante und Discriminante einer binären Form ein merkwürdiges System von, für dieselben charakteristischen Differentialgleichungen auf***), von dem eine Anwendung erst neuerdings in der Theorie der hyperelliptischen†) Functionen gemacht worden ist.

Sodann verdankt man ihm wesentliche Erweiterungen der Hermite'schen Theorie der typischen††) Darstellungen, namentlich auch auf ternäre Formen.

Nehmen wir so wahr, wie die Einzelergebnisse unseres Gebietes allmählich einen bemerkenswerten Umfang erreicht haben, so müssen wir es um so dankbarer anerkennen, wenn es Salmon — der schon vorher†††) nach der Seite der Rechnung, wie der geometrischen Anwendungen hin schätzenswerthe Beiträge geliefert hatte — unternahm, das weitschichtige

---

*) C. R. 1863, 1864. Hier wird die Tschirnhausen-Transformation noch weiterhin umgestaltet, sodass sogar die einzelnen Coefficienten der Potenzen von α (vgl. oben) invariante Bildungen werden, allerdings unter Verzicht auf die ursprüngliche Eleganz.

**) Vgl. vor allem die zusammenhängende Darstellung einer binären Formentheorie in den Annali di Mat. 1. Serie: I (1858) S. 296—309, 349—362; II (1859) S. 82—85, 265—277; III (1860) S. 160—168; VI (1861) S. 186—194. Der in Rom 1861 erschienene Separatabdruck ist vergriffen.

***) Journ. für Math. LIII S. 372—376.

Diese Differentialgleichungen lassen sich im Falle der Resultante in drei Gruppen zerlegen. Die erste besagt, dass die Resultante eine gewöhnliche Invariante ist, die zweite, dass der Resultante zugleich die Combinanteneigenschaft zukommt, die dritte endlich, dass dieselbe auch höheren Transformationen gegenüber in dem Sinne Invarianteneigenschaft besitzt, dass sie sich nach der Transformation bis auf einen Factor reproducirt, der selbst noch von den Coefficienten der beiden Urformen abhängt.

Bei der Discriminante kommt natürlich die zweite der genannten Gruppen in Wegfall. Die letzte Gruppe lässt sich, wie Noether später gezeigt hat, auf eine einzige Gleichung reduciren, vgl. Bruno § 25.

†) Vgl. Wiltheiss in den Math. Ann. XXXIII S. 279 (1888).

††) Annali di Mat. (1) I (1858) S. 158—163, spec. S. 163. (Typische Darstellung von Formen mit n Variabeln). Wegen der typischen Darstellung von drei quadratischen ternären Formen als Ableitungen einer kubischen, siehe z. B. C. R. 1863.

†††) Wegen der geometrischen Anwendungen vgl. die (ohne Kenntnis von Hesse) geschriebene Note über Covarianten von Curven und Flächen, Cambr. and Dublin Math. J. II S. 74.

Schätzbares Material zur Cayley'schen Symbolik findet man Cambr. and Dublin. Math. J. IX S. 32.

Material in einer knappen Monographie*) zu ordnen (1859). Um die Verbreitung derselben in Deutschland hat sich Fiedler durch seine Ausgabe**) (1863) verdient gemacht, der überdies schon kurz zuvor (1862) eine selbständige***), für Anfänger berechnete Darstellung gegeben hatte, die vor allem die Cayley'schen Anwendungen auf die projectivische Geometrie allgemein zugänglich machte. Um dieselbe Zeit (1862) erschien auch die Bearbeitung von Brioschi†), die der Invariantentheorie in Italien einen ausgedehnten Kreis von Anhängern gewonnen hat.

Während die genannten englischen, französischen und italienischen Mathematiker in regem Ideenaustausch mit einander standen, und dadurch unserem Gebiete stets neue Impulse zuführten, bleibt dasselbe in Deutschland lange unbeachtet.

Inhaltlich freilich berühren sich die projectivischen Methoden††) und Sätze eines Hesse und Steiner auf's engste mit der invariantiven Denkweise der fremden Algebraiker, aber noch hat der Gedanke nicht die ihm adäquate Form gefunden, auf die hier mehr, als wohl in anderen Teilen der Mathematik, Gewicht zu legen ist.

Diesen Uebergang hat erst Aronhold an einem klassischen Beispiel†††) bewerkstelligt (1858), indem er aus der Hesse'schen Theorie der ternären kubischen Formen die invarianten Fasern blosslegt, und ihr so eine, von allem Künstlichen und Zufälligen befreite, abgeschlossene Gestalt giebt.

Da die principiellen, hierbei zu Grunde gelegten Ideen in einer späteren††††) Arbeit Aronhold's (1863) in organischem Zusammenhange und in voller Allgemeinheit ausgeführt sind, so mag eine Besprechung der letzteren gleich vorweg genommen sein. Die Ausführlichkeit derselben rechtfertigt sich vielleicht dadurch, dass jene Ideen auf die Anordnung des vorliegenden „Berichtes“ einen massgebenden Einfluss ausgeübt haben.

In der ersten Auflage seiner „Higher plane curves“ 1852, berechnet er zuerst In- und Covarianten binärer Formen mittels symmetrischer Functionen.
In der zweiten Auflage der „Algebra“, 1865, giebt er die neue Aufstellung der „vollen Systeme“ für die einfachsten simultanen Binärformen.

*) Dublin 1859.
Die vierte Auflage erschien 1885.

**) Leipzig 1863. Die zweite Auflage erschien 1877.

***) Leipzig 1862

†) Siehe oben S. 94 Anm. **). Eine elementar gehaltene Bearbeitung der Theorie stammt von Battaglini, Atti di Napoli 1867, vgl. die Fortsetzungen im Giorn. di Mat.

††) Vgl. die mehrfach genannten Biographien von Plücker, Hesse, Clebsch.

†††) Journ. für Math. LV S. 97—191.

††††) Journ. für Math. LXII S. 281—345.

Aronhold's Bestreben geht dahin, die so verschiedenartigen Gebilde invariantiver Natur unter einem einzigen Gesichtspunkte zu erfassen, und auf diese Weise nicht nur ihren gegenseitigen Zusammenhang, sondern überhaupt erst ihre Existenzberechtigung zu ergründen. Als Ausgangspunkt dient ihm zu dem Behuf eine Problemstellung*), die er selbst folgendermassen formulirt:

„Es seien $F(x|a)$, $F'(\xi|a')$ zwei beliebige und beide **ganz allgemeine** homogene Functionen der $p$ten Ordnung resp. von den n Variabeln x_1 bis x_n und ξ_1 bis ξ_n; man soll die Bedingungen zwischen ihren Coefficienten a und a' finden, unter welchen beide Functionen durch lineare Substitutionen in einander transformirt werden können."

Die beiden Worte „ganz allgemeine" sind hier durch den Druck hervorgehoben worden, da ihre Nichtbeachtung zu Missverständnissen**) geführt hat; darin, dass über die Coefficienten a und a' jedwede Verfügung vorbehalten bleibt, liegt schon ausgesprochen, dass unter den fraglichen Bedingungen nur die in allen Fällen notwendigen, keineswegs aber die für irgendwie ausgeartete Formen F, F' hinreichenden verstanden werden sollen, wie dies auch Aronhold im Falle einer ternären kubischen Form in der Abhandlung von 1858 an mehreren Stellen***) deutlich zu erkennen giebt.

Aus den Transformirbarkeitsbedingungen denke man sich bereits die Substitutionscoefficienten δ eliminirt, dann lassen sich die entstehenden Endgleichungen so anordnen, dass ihre rechten Seiten von den δ unabhängig sind. Diese Thatsache findet ihren Ausdruck in dem Bestehen von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen†), welche so umgestaltet werden, dass die Grössen δ in ihnen gar nicht mehr auftreten. Hieraus lässt sich rückwärts schliessen, dass die algebraischen Transformationsrelationen als Gleichheiten von Brüchen geschrieben werden können, von denen immer der eine genau dieselbe rationale Function der Coefficienten a von

---

*) S. 282, 283. Dieselbe Problemstellung für zwei und mehrere Paare von Formen findet sich bereits, wenn auch nicht so exact formulirt, bei Boole Cambr. Math. J. III und IV. Boole giebt auch ein Beispiel für ein einziges Formenpaar; dann repräsentirt eben eine der linearen Substitutionsgleichungen ein zweites Paar (l. c. Bd. III S. 115).

**) Ein solches Missverständnis scheint dem Referenten bei dem Angriffe vorzuliegen, den Veltmann in Schlöm. Z. XXII S. 277—298 (1877) und XXXIV S. 321—330 (1889) gegen das Aronhold'sche Beweisverfahren gerichtet hat.

***) Z. B. Journ. für Math. LV, l. c. S. 160.

†) Bd. LXII S. 287-288, 293. Inwieweit umgekehrt ein Teil eines derartigen Systems Invarianten zu definiren vermag, hat später Maurer untersucht, Münch. Ber. 1888 S. 103—150.

F ist, wie der andere bezüglich der Coefficienten a′ der transformirten Form F′.

Mit diesen Brüchen — den rationalen Lösungen jener Differentialgleichungen — ist die Existenz der „absoluten“ Invarianten von F festgestellt. Aber auch die Anzahl der rational unabhängigen unter ihnen wird daraus ermittelt, da der weitere Aufbau der Theorie den wichtigen Schluss erlaubt, dass die n^2 Differentialgleichungen linear von einander unabhängig sind*).

Die gewöhnlichen Invarianten, von denen man vor Aronhold empirisch ausging, erweisen sich a posteriori als Zähler und Nenner der absoluten: sie genügen einem entsprechenden System von n^2 Differentialgleichungen.

Dieses System ist (wie auch das kurz vorher erwähnte) nach dem Beweise von Clebsch (1865) ein „vollständiges“, d. h. es ist nicht möglich, durch Differentiation und Elimination der höheren Ableitungen dem System neue lineare Gleichungen hinzuzufügen**).

Während die Ausdehnung auf ein System***) von Urformen keine principiellen Schwierigkeiten darbietet, gelingt es Aronhold durch Auffindung merkwürdiger Eigenschaften†) der zugehörigen Formen (Contravarianten) und Zwischenformen (gemischten Concomitanten), die tieferen Beziehungen zwischen den verschiedenerlei invarianten Bildungen aufzudecken.

Da es bei diesen Entwickelungen von Bedeutung ist, dass zwischen den Coefficienten der Urform keine lineare Relation bestehen darf, so darf auch an Stelle eben der Urform die bezügliche Potenz einer Linearform††) gesetzt werden, wodurch vor allem das Operiren mit den Differentiationsprocessen glatt von statten geht.

*) Einen directen und einfachen Beweis dafür hat Aronhold im Journ. für Math. LXIX S. 185—189 geliefert. Der von Christoffel ebd. Bd. LXVIII S. 246—252 geführte Beweis ist vom Verfasser selber später zurückgezogen und durch einen andern ersetzt worden, vgl. Math. Ann. XIX S. 280—290 (1881).

Auf die Frage der höheren Abhängigkeiten zwischen den n^2 Differentialgleichungen der Invarianten ist erst später Study eingegangen, der nachweist, dass alle Gleichungen Folgen von nur zweien derselben sind. Siehe „Methoden zur Theorie der ternären Formen“ Leipzig, 1889 S. 167.

**) Journ. für Math. LXV S. 257—268.

***) Bd. LXII § 8.

Der schon von Boole benutzte, nach Aronhold benannte Process, der aus der Invariante einer einzigen Form simultane Invarianten mehrerer Formen vermöge Differentiation nach den Coefficienten abzuleiten lehrt, wird in § 10 als systematische Grundlage der Theorie simultaner Bildungen eingeführt (vgl. Journ. für Math. XXXIX S. 150 u. flgd.).

†) Bd. LXII § 11, § 14.

††) S. 292—293.

Die damit eingeführte Symbolik ist zwar in formaler Hinsicht nicht wesentlich von der durch Cayley gehandhabten verschieden, sie hat aber doch erst auf Grund der eigenartigen Begründung innerhalb der Aronhold'schen Theorie die Fähigkeit zu der Entwickelung gewonnen, welche ihr seitdem in Deutschland zu Teil geworden ist.

Hier ist der Punkt, wo Clebsch mit grossem Erfolge eingegriffen hat, indem ihn die Abhandlung Aronhold's von 1858 veranlasste, die gemeinte Symbolik zur ausschliesslichen Grundlage der Theorie zu machen*) (1861), und den Gedanken, die Bildungen höherer Formen auf die von linearen zu reduciren, rein durchzuführen.

Während die Symbolik der Engländer sich damit begnügte, invariante Formen in beliebiger Anzahl zu erzeugen, führt bei Clebsch die symbolische Darstellung in ihren Determinantenaggregaten nicht nur umgekehrt zu sämtlichen Invarianten, sondern ist geradezu als Definition der letzteren anzusehen, vorläufig allerdings nur unter der Beschränkung auf Formen, welche höchstens eine Reihe von Veränderlichen und die zu ihnen dualistischen enthalten.

Auf Grund dieser Allgemeingültigkeit der Symbolik leitet Clebsch unter anderem das bekannte „Uebertragungsprincip" **) her, welches einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Gebieten verschiedener Stufe herstellt.

Eine Reihe von interessanten Anwendungen auf die Geometrie von algebraischen Curven und Flächen gab Clebsch ebenfalls um diese Zeit; als besonders charakteristisch sei etwa die Behandlung des Normalenproblems***) für Gebilde zweiter Ordnung genannt.

Im übrigen darf sich die gegenwärtige — und auch spätere — Besprechung von Clebsch's Leistungen auf das Notwendigste beschränken, da eine ausführliche und lichtvolle Schilderung derselben, die zugleich die Beziehungen zu verwandten Gebieten berücksichtigt, bereits existirt†).

Nach unserer Auffassung führen Clebsch und Aronhold auf Grund der hervorgehobenen Arbeiten von 1861 und 1863 eine neue Zeit herauf, die dadurch gekennzeichnet ist, dass nunmehr erst eine systematische Entwickelung unserer Wissenschaft Platz greift, womit zugleich die Führung in derselben an Deutschland übergeht.

---

*) Journ. für Math. LIX S. 1—62.

**) l. c. § 7.

***) Journ. für Math. LXII S. 64—109 (1863).

†) Math. Ann. VII S. 1—50, vgl. insbesondere S. 37—50 (1874).

Zwei Hauptrichtungen machen sich hier allmählich geltend und heben sich zum Teil scharf von einander ab.

Die eine, von Clebsch inaugurirte, stellt sich die Aufgabe, eben mit Hülfe seiner Methoden, die das erst ermöglichen, eine vollständige Einsicht in den unendlichen Kreis der invarianten Formen und deren gegenseitige Verwandtschaft zu gewinnen; die andere nimmt das von Aronhold gestellte Problem der „Aequivalenz", d. i. der linearen Transformirbarkeit einer Form in eine andere, zum Vorwurf.

Indessen vergehen doch einige Jahre, bis auf beiden Seiten ein wirklicher Aufschwung erfolgt: man datirt einen solchen zweckmässig vom Jahre 1868 an, in welches einmal der Gordan'sche Beweis eines „endlichen Systems" für binäre Formen fällt*), sodann die Weierstrass'sche Untersuchung der Aequivalenz von bilinearen (resp. quadratischen) Formen und Formenscharen mit Hülfe der Lehre von den Elementarteilern**).

Es mag daher auch gestattet sein, die hier einschlägigen Abhandlungen***) von Clebsch und Gordan (1867) über typische Darstellung von binären Formen, von Kronecker†) und Christoffel††) über bilineare Formen — trotzdem sie äusserlich noch der älteren Periode angehören — erst später, im Zusammenhange mit den anschliessenden Forschungen der neuen Epoche zu würdigen.

Uebergang zur neueren Periode von 1868 bis zur Gegenwart.

Das Jahr 1868 bietet (ausser den beiden, soeben betonten) noch einige andere bedeutungsvolle Momente dar.

Vor allem ist für den Berichterstatter von Bedeutung, dass erst von da ab mit Hülfe der durch Ohrtmann und Müller†††) begründeten „Fortschritte der Mathematik" — eine in der mathematischen Litteratur einzig dastehende Schöpfung — eine vollständige Uebersicht über die einschlägigen Leistungen ermöglicht wird.

Im gleichen Jahre erscheinen Plücker's††††) „Neue Geometrie des Raumes" und Reye's „Geometrie der Lage", zwei Werke, denen es wesentlich zu verdanken ist, wenn die Geometrie in höherem Masse, als vor-

*) Journ. für Math. LXIX S. 323—354.
**) Berliner Ber. 1868 S. 310—338.
***) Annali di Mat. (2) I, 23—79.
†) Kronecker, Journ. für Math. LXVIII, 273—285.
††) Christoffel, ebd. S. 253—272.
†††) Das erste Heft des ersten Bandes, welcher über den Jahrgang 1868 referirt, erschien Febr. 1871.
††††) Der zweite Band erschien im folgenden Jahre, von F. Klein herausgegeben.

dem, von sich aus auf die Algebra zu wirken und ihr neue Quellen zuzuführen beginnt. Als ein Muster dieser Art kann die Anwendung angesehen werden, welche F. Klein*) (ebenfalls 1868) von der citirten Weierstrass'schen Reduction einer quadratischen Formenschar macht, um die Liniencomplexe zweiten Grades in verschiedene Arten einzuteilen.

Nachdem einmal durch Gordan die Endlichkeit einer Klasse von Formensystemen erwiesen war, war damit die Aufgabe gegeben, weitere besondere Formen in dieser Richtung zu beherrschen. Die Fülle der dadurch angeregten Arbeiten, an denen Clebsch und Gordan selbst in erster Linie beteiligt sind, machen die Gründung einer neuen Zeitschrift, der „Mathematischen Annalen", notwendig (deren erstes Heft im Dez. 1868 ausgegeben wird), die seitdem unserer Disciplin stets eine besondere Pflege hat angedeihen lassen.

Abgrenzung des Stoffes**).

Als obersten Einteilungsgrund für die Bewältigung des vorliegenden Materiales nehmen wir, wie bereits bemerkt, die Gesichtspunkte der Aequivalenz und der Formenverwandtschaft.

Nun giebt es wohl kaum ein Gebiet der Mathematik, in das nicht die Theorie der linearen Transformationen mit Erfolg eingegriffen hätte, und es stellt sich somit die Notwendigkeit heraus, den Kreis unserer Betrachtungen in angemessener Weise abzugrenzen.

Klein und Lie haben seit dem Anfang der siebziger Jahre darauf hingewiesen***), wie die Eigenschaften von Ausdrücken, welche irgend einer Klasse von Transformationen gegenüber ein invariantes Verhalten zeigen, wesentlich durch den „Gruppencharakter" der letzteren bedingt sind, d. h. durch die Eigenart der geschlossenen Mannigfaltigkeit der Transformationen, welche sich bei beliebiger Zusammensetzung derselben stets nur reproducirt.

Bei den linearen Transformationen insbesondere ist die Gruppeneigenschaft am schärfsten ausgeprägt, da es ja von vorn herein klar ist, dass zwei lineare Transformationen, hinter einander ausgeübt, immer wieder

---

*) Dissertation Bonn, wiederabgedruckt Math. Ann. XXIII S. 539—578.

**) Den Citaten dieses und des nächstfolgenden Abschnitts ist nur eine provisorisch orientirende Bedeutung beizulegen.

***) Siehe etwa Math. Ann. IV S. 50—84 (1872), sowie besonders Klein's Erlanger Programm von 1872.

Im folgenden wird wiederholt auf Lie's „Theorie der Transformationsgruppen" Bd. I und II, Leipzig (1888, 1890), bearbeitet von Engel, hingewiesen (kurz mit „Lie-Engel" citirt).

Es ist von Interesse, damit den Standpunkt zu vergleichen, den Kronecker in dieser Grundfrage einnimmt, vgl. Berliner Ber. 1890 S. 99 u. flgde.

eine solche ergeben. Zu jeder Gruppe von linearen Substitutionen der Variabeln wird, genau genommen, auch eine besondere*) Invariantentheorie gehören; indessen seien hier nur die hauptsächlichsten Klassen in Betracht gezogen.

In der Algebra handelt es sich vorwiegend um Formen, deren Coefficienten entweder als ganz unabhängig variabel, oder doch als stetig abhängig von einer Anzahl willkürlicher Parameter angesehen werden: in demselben Sinne werden auch die Coefficienten der linearen Substitutionen, denen die Variabeln unterworfen werden, als stetig veränderliche Grössen gedacht. Man wird es also hier mit „endlichen continuirlichen" Gruppen**) zu thun haben.

Es giebt aber auch wichtige Ausnahmen dieser Regel. So treten bei Formen mit linearen Transformationen in sich Substitutionen auf, deren Anzahl eine endliche ist, und deren Coefficienten infolgedessen numerisch feste Werte besitzen. Auch solche Gruppen, die kurz als „Galois'sche" bezeichnet seien, werden uns vom Aequivalenzproblem aus beschäftigen müssen. Sie vermitteln zugleich den Zusammenhang mit der Gleichungstheorie.

In der Zahlentheorie dagegen und in verwandten Gebieten (wie in der modernen Theorie der automorphen Functionen) werden die Coefficienten der angewandten Transformationsgruppen in ihrer Veränderlichkeit durch arithmetische Gesetze geregelt, gehören also dem Gebiete der discontinuirlich-variabeln Grössen an.

Die (arithmetischen und transcendenten) Invarianten, welche sich derartigen „discontinuirlichen"***) Gruppen zuordnen lassen, erfordern zu ihrer Behandlung wesentlich andere Methoden, als die in der Algebra auftretenden; da überdies die damit verknüpften Fragestellungen in anderer Richtung vorgehen, werden wir das gemeinte Gebiet nur gelegentlich flüchtig streifen.

Aehnlich verhält es sich mit den ausgedehnten Untersuchungen über

---

*) In dieser Richtung ist freilich noch wenig geschehen, da die bisher ausgebildeten invariantentheoretischen Methoden, sei es direct oder indirect, stets Differentiationen nach den Substitutionscoefficienten verwenden, also letztere zunächst als allgemein voraussetzen.

Eine allgemeine Charakterisirung verschiedener Klassen von besondern Substitutionsgruppen hat in neuester Zeit Maurer gegeben, Journ. für Math. CVII S. 89—116 (1890).

**) Wegen der Einteilung der Transformationsgruppen, vgl. den einleitenden Abschnitt bei Lie-Engel I.

***) Es kann hier nur kurz auf die bez. Leistungen von Poincaré und Picard einerseits, Klein, Hurwitz, Fricke u. a. andererseits hingewiesen werden.

Differentialformen und Differentialgleichungen, die daraus erwachsen sind, dass man die unabhängigen Variabeln ganz beliebigen Transformationen unterworfen hat. Allerdings transformiren sich dabei die Differentiale der Variabeln linear — und insofern wird die algebraische Invariantentheorie bis zu einer gewissen Grenze eingreifen*) — aber die Substitutionscoefficienten enthalten Functionen der Veränderlichen selbst, deren Willkürlichkeit nur durch gewisse Integrabilitätsbedingungen eingeschränkt ist.

Auch solchen „unendlichen" Gruppen werden wir höchstens da ein Interesse widmen dürfen, wo ihr specifischer Charakter verhältnismässig zurücktritt, und dafür formentheoretische Entwickelungen in den Vordergrund treten.

Aber selbst innerhalb der eigentlichen Algebra sind noch Beschränkungen geboten.

In der Theorie der algebraischen Curven und Flächen (d. i. der algebraischen Functionen von einer und zwei Variabeln) giebt es, seit den bahnbrechenden Arbeiten von Cremona einerseits, von Riemann andererseits, eine Reihe von wichtigen Erscheinungen, deren Gesetze nicht sowohl von linearen, als überhaupt von eindeutigen (algebraischen) Transformationen der Veränderlichen abhängen.

Nun lassen sich freilich die letzteren im Princip doch wieder auf rein lineare (nämlich der sogenannten φ-Gebilde)**) zurückführen; indessen ist eine Durcharbeitung derartiger Fragen im projectiv-invariantentheoretischen Sinne erst in der neuesten Zeit und in vereinzelten Fällen geleistet worden.

Umgekehrt wird es nicht zu umgehen sein, nach einer anderen Richtung hin die Grenzen der Algebra zu überschreiten.

Eines der wichtigsten, von Lie herrührenden Theoreme sagt aus, dass man den Bereich einer endlichen, continuirlichen Transformationsgruppe stets dadurch „erweitern"***) kann, dass man diejenigen Transformationen mit aufnimmt, welche die (bis zu einer beliebigen Ordnung hin gebildeten) Ableitungen der als abhängig betrachteten Variabeln nach den unabhängigen erfahren. Invarianten solcher erweiterten Gruppen oder kurz „Differentialinvarianten" zeigen, im Falle die ursprüngliche Gruppe

*) Lie selbst, der das in Rede stehende Problem am weitesten geführt hat, geht auf die formentheoretischen Beziehungen nicht näher ein.

**) Man vgl. etwa die bez. Entwickelungen in Klein-Fricke's Modulfunctionen (Leipzig, 1890), III. Abschn. 2. Cap., sowie die besonderen Ausführungen von Wiltheiss für das Geschlecht $p = 3$ Math. Ann. XXXVIII S. 1—13 (1891).

***) Lie-Engel I Cap. 25.

eine projective war, eine weitgehende Verwandtschaft mit den gewöhnlichen Invarianten. Insofern wird ein Hereinziehen hierauf bezüglicher Arbeiten von Halphen, Sylvester und der von Letzterem angeregten Schule gerechtfertigt sein.

Was endlich die Anwendungen unseres Gebietes auf andere Zweige der Mathematik angeht — deren Umfang einen eigenen Bericht erheischen würde — so kann es sich nur darum handeln, einiges, was dem Berichterstatter gerade von Interesse schien, herauszugreifen, um den Text zu illustriren und zu beleben.

Wenn sich so das Feld der projectiven Substitutionen als ein verhältnismässig enges erweist, so zeigt sich seine Bedeutung doch in zwiefacher Richtung.

Einmal kann die hier ausgebildete, specifische Methodik geradezu als ein Muster für andere Disciplinen gelten.

Sodann bildet die Lehre von den linearen Substitutionen und ihren Invarianten nicht nur die natürliche Vorstufe zu derjenigen von den Transformationen überhaupt, sondern es bildet sich auch umgekehrt bei der Behandlung der letzteren immer stärker das Bestreben aus, hervorragende Probleme auf jene erste Stufe zurückzubringen.

Es sei in dieser Hinsicht etwa angeführt, dass zu jeder endlichen continuirlichen Transformationsgruppe eine projective existirt, welche auf die gegebene isomorph bezogen werden kann, sowie, dass die Aufgabe der Bestimmung aller Gruppen von bestimmter Zusammensetzung geradezu der gewöhnlichen Invariantentheorie gewisser trilinearer Formen angehört.

Die stufenweise Entwickelung des Invariantenbegriffs.

Ist ein System von Formen vorgelegt, und man unterwirft die verschiedenen Variabelnreihen einer gewissen Gruppe von linearen Substitutionen, so induciren die letzteren eine (holoedrisch isomorphe) Gruppe von Substitutionen der gegebenen Coefficienten. Eine jede homogene Invariante dieser Coefficientengruppe, d. i. eine analytische Function der Coefficienten, die zugleich hinsichtlich jeder Coefficientenreihe homogen ist, welche den Umformungen der Gruppe gegenüber unveränderlich ist, würde eine „absolute Invariante" des Formensystems in allgemeinstem Sinne des Wortes sein.

Insbesondere sind die rationalen Invarianten der Coefficientengruppe, falls die ursprüngliche Variabelngruppe die allgemeine projective war (und auch die Coefficienten allgemeiner Natur), die von Aronhold zu Grunde gelegten Brüche, deren Zähler und Nenner sich mit den gewöhnlichen (oder relativen) ganz-rationalen Invarianten des Formensystems decken.

Wünscht man indessen, dass auch die letzteren Bildungen (und die relativen Invarianten überhaupt) in obiger Definition mit einbegriffen seien, so hat man nur die Variabelngruppe durch diejenige Untergruppe zu ersetzen, die entsteht, wenn man der Substitutionsdeterminante der ersteren den festen Wert Eins beilegt.

Nach dieser Formulirung des Invariantenbegriffs, die ausreicht, um die vielen Einzelerscheinungen des Folgenden von einem Gesichtspunkte aus zu umfassen, wenden wir uns zur historisch vorliegenden Entwickelung desselben zurück, und geben die sich hier in erster Linie aufdrängenden Fortschreitungsmomente in Kürze an.

Man ging naturgemäss von den ganz-rationalen Functionen der Coefficienten einer oder mehrerer Urformen aus, die sich bei linearer Transformation der Variabeln um eine (ganze) Potenz der Transformationsdeterminante ändern. Der Kreis derartiger Formen wurde bald dahin erweitert, dass neben den Coefficienten auch die ursprünglichen Variabeln und die zu ihnen contragredienten als Argumente zugelassen wurden.

Neben diese mehr formale Definition der invarianten Formen stellt sich später die mehr materielle Cayley'sche als ganz-rationaler Lösungen ihrer Differentialgleichungen.

Als dritte Definition tritt dann bei Clebsch das Aggregat gewisser symbolischer Producte auf.

Weiterhin hat man die erste Erklärung der Invarianten von der unnötigen Specialität befreit, dass der bei Transformationen hinzutretende Factor von vorn herein eine Potenz der Substitutionsdeterminante sein müsse, und hat nur verlangt, dass derselbe überhaupt von den Coefficienten der Substitution (nicht aber von denen der Formen selbst) abhängen soll; dies hat bereits, wie eine Reihe*) von Autoren bewiesen haben, die ersterwähnte Eigenschaft zur Folge.

Frühzeitig wurden ferner die vorzulegenden Urformen mit mehreren Reihen von Veränderlichen ausgestattet, die indessen nur cogredienten resp. contragredienten Transformationen unterlagen.

Clebsch führte 1872**) planmässig alle diejenigen Variabeln neben

---

*) Clebsch, Binäre Formen S. 306 (1872); Gram, Math. Ann. VII S. 234 (1874); d'Ovidio Batt. G. XV S. 187—192 (1877); Capelli, Mem. d. Linc. 1882 S. 582 (1882); Hölder, Böklen Mitt. I S. 59—65 (1884); Elliott, Mess. XVI S. 5—8 (1885); Mansion, Mess. XVI S. 127—129; Brux. S. sc. XII A S. 47—49 (1887—88); Study, Methoden (1889) S. 32 u. ff.; Deruyts, Théorie gén. des formes algébriques, Liège 1891 S. 49.

**) Göttinger Abh. XVII S. 1—62.

einander ein, welche im n-fach ausgedehnten Gebiete den verschiedenen linearen Stufen desselben entsprechen.

Gordan*) und Capelli*) wurden sodann zu solchen Formenbildungen geführt, die entstehen, wenn auf mehrere Variabelnreihen von einander unabhängige Substitutionen ausgeübt werden.

So lange die verschiedenerlei invariantiven Bildungen, die sich aus einem vorgegebenen Formensystem ableiten lassen, in den Coefficienten, sowie in den einzelnen Variabelnreihen ganz-rational sind, lassen sie sich nach Aronhold und Clebsch leicht aus dem ursprünglichen Begriff der Invarianten (in engerem Sinne) entnehmen: man braucht zu dem Behuf nur dem gegebenen Formensystem lineare Hülfsformen zu adjungiren.

Principielle Erweiterungen drängen sich erst dann auf, wenn man jenen Grundbegriff der Invariante über das Rationale hinaus auf das irrationale und das transcendente Gebiet überträgt. Bleiben wir hier innerhalb algebraischer Grenzen, so haben wir in der Hauptsache nur Wurzeln von irreducibeln Gleichungen zu berücksichtigen, deren Coefficienten ganz-rationale Invarianten sind. Neuere Untersuchungen von Hilbert, Klein und Gordan, sowie von Frobenius haben erkennen lassen**), wie sich derartige irrationale Formenbildungen naturgemäss darbieten, wenn man sich die Urformen in gewisser irrational-canonischer Art vorgelegt denkt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn der ursprüngliche Rationalitätsbereich der Coefficienten in passender Weise erweitert wird.

In übersichtlicher, organischer Entwickelung hat Study***) 1887 die allmählich aufsteigenden Stufen des Invariantenbegriffs aus einander hervorgehen lassen, indem er sie in unmittelbare Parallele setzt zu der von Kronecker herrührenden arithmetischen Begründung der verschiedenen Arten von algebraischen Grössen.

Insbesondere gelingt es ihm, dem delicaten Begriff der irrationalen Covariante eine präcise Fassung zu geben.

Nach anderer Richtung hin haben Christoffel†) und neuestens Maurer†) eine Erweiterung angestrebt, insofern sie solche Invarianten in Betracht ziehen, für welche zwar die Gruppe der Coefficienten immer

---

*) Gordan bei der Auflösung der Gleichungen fünfter Ordnung, Math. Ann. XIII S. 375—404, insbes. S. 379 (1878).

Capelli beim Studium der doppelt quadratischen binären Formen, Batt. G. XVII S. 69—148 (1879).

**) Vgl. II B.

***) Leipzig. Ber. Vgl. Die Einleitung zu seinen „Methoden" . . ., Leipzig 1889.

†) Christoffel, Math. Ann. XIX S. 280—290 (1881); Maurer, Münch. Ber. 1888 S. 103—150 und Journ. für Math. CVII S. 89—116 (1890).

noch eine projective ist, während die die Transformation der Variabeln vermittelnden Ausdrücke rational werden. Die charakteristische Form der Differentialgleichungen für die Invarianten bleibt auch dann noch bestehen.

Endlich ist noch die Bestimmung der ganz-rationalen invarianten Bildungen auf Grund ihrer Leitglieder anzuführen. Die letzteren sind die Invarianten einer gewissen Untergruppe der ursprünglichen und genügen daher nur noch einem Teile der Differentialgleichungen für gewöhnliche Invarianten.

Speciell für binäre Formen haben in neuerer Zeit MacMahon und Cayley eine selbständige Theorie derartiger „Seminvarianten" geschaffen, die vermöge eines eigentümlichen Symbolismus mit der Lehre von den symmetrischen Functionen in engstem Zusammenhange steht*). Andererseits haben Sylvester und Perrin die genannten Bildungen auf noch einfachere reducirt**).

Die Bedeutung dieser Leitglieder reicht indessen noch weiter, insofern man aus ihnen nach Faà di Bruno***) und Hilbert†) die zugehörigen vollständigen Formen mit Hülfe eines einzigen Processes unmittelbar herstellen kann: man hat nur die Coefficienten der einzelnen Urformen durch die bezüglichen (mit gewissen Zahlen multiplicirten) Ableitungen der letzteren nach der nicht homogenen Variable zu ersetzen, ein Verfahren, das auch auf höhere, als binäre Formen, ausgedehnt werden kann.

Das Aequivalenzproblem der quadratischen und bilinearen Formen.

Wir wenden uns jetzt zu der linearen Transformation der quadratischen und bilinearen Formen. Diese zeichnen sich vor den übrigen Formen dadurch aus, dass zwei allgemeine Individuen derselben Art stets linear in einander überführbar sind.

Das specielle, wegen seiner Anwendungen so wichtige Problem, eine oder auch simultan zwei quadratische Formen von n Variabeln als Aggregat von möglichst wenig Quadraten linearer Ausdrücke darzustellen, ist schon in früherer Zeit vielfach (von Lagrange, Cauchy, Gauss, Jacobi, Plücker, Hesse u. a.) behandelt worden††).

*) Cayley, Quart. J. XIX S. 131—138 (1883), Am. J. VII S. 1—25, 59—73 (1884); MacMahon, Am. J. VI S. 131—164 (1883), Am. J. VII S. 26—47 (1884), Am. J. VIII S. 1—18 (1885).

**) Sylvester im Amer. J. V S. 79—137 (1882); Perrin in den S. M. F. Bull. XI S. 88—107 (1883).

***) Amer. J. III S. 154—164 (1882) oder Journ. f. Math. XC S. 186—188; cf. Stroh, Math. Ann. XXII S. 402 (1883).

†) Math. Ann. XXX S. 15—29, spec. S. 17.

††) Siehe Baltzer's Determinanten.

Weierstrass zeigte 1858*), wie die Cauchy-Jacobi'schen Darstellungsformeln für die simultane „Reduction“ zweier quadratischen Formen bei Eintritt des „Ausnahmefalles“ zu modificiren seien, dass die Anzahl der Quadrate unter die der Variabeln sinkt, wenn also die Wurzeln der „charakteristischen“ Gleichung (von der die Bestimmung jener Quadrate abhängt) nicht mehr sämtlich unter einander verschieden sind. Insbesondere wird die reelle Transformation reeller Formen untersucht.

Der Cayley-Hermite'schen Formeln für die Schar der Transformationen, welche eine quadratische Form in sich selbst zulässt, ist schon im ersten Abschnitte gedacht worden**).

Weierstrass'sche Forschungen über Transformationen allgemeiner Θ-Functionen (bei Invarianz der Parameter) führten auf die algebraische Aufgabe, eine bilineare Form von je 2n Variabeln auf die canonische Gestalt einer gewissen Summe von Producten zu bringen. Kronecker erkannte 1866***) mittels Einführung der sogenannten „beigeordneten“ Form, dass die verlangte Reduction bei nicht verschwindender Determinante der Form nach Lösung einer charakteristischen Resolvente nten Grades (mit ungleichen Wurzeln) ausführbar sei, und gab zugleich an, wie hierauf die allgemeinere Aufgabe zurückkomme, die bilineare Form vermöge der nämlichen Substitutionen beider Variabelnreihen in sich zu transformiren.

Im nächsten Jahre bestätigt Christoffel†) diese Ergebnisse auf dem Aronhold'schen Wege und begründet den wichtigen Satz, dass die Anzahl der in den Substitutionscoefficienten enthaltenen willkürlichen Parameter mit derjenigen der absoluten Invarianten der Form übereinstimmt. Als Hülfsmittel dient ihm dabei die wirkliche Aufstellung der invarianten Bildungen.

---

*) Berliner Ber. 1858 S. 207—220. Als eine weitere Ausführung dieser Arbeit ist diejenige von 1868 zu betrachten.

**) S. 89.

***) Journ. für Math. LXVIII S. 273—285 oder auch Berliner Ber. Oct. 1866. (Vgl. den Abschnitt über die lineare Transformation der θ-Functionen in Clebsch-Gordan's „Abel'schen Functionen“ Leipzig 1866.)

Der Begriff der beigeordneten Form wird S. 279 aufgestellt, derjenige der „Normalform“, in welche jede bilineare Form transformirt werden kann, S. 275.

Die Kronecker'sche Transformation ist von Frobenius für ϑ-Functionen mehrerer Variabeln weiter verfolgt worden, Journ. für Math. XCV S. 264 u. ff. (1883). Vgl. Weber, Annali di Mat. (2) IX S. 126 u. ff. (1880) und Wiltheiss, Math. Ann. XXVI S. 127 u. ff. (1886).

†) Journ. für Math. LXVIII S. 253—272. Der angeführte Satz steht auf S. 262.

Die absoluten Invarianten einer bilinearen Form, deren beide Variabelnreihen zu einander dualistisch sind, treten schon in einer Abhandlung von Borchardt auf: Journ. für Math. XXX S. 38, vgl. S. 270—271 (1846).

Zu Beginn der neuen Periode (1868, wie schon weiter oben erwähnt wurde) nimmt Weierstrass*) die Aequivalenz von zwei linearen „Scharen" bilinearer resp. quadratischer Formen in allgemeinerer Fassung wieder auf**).

Durch Einführung der „Elementarteiler"***) werden die Resultate sehr durchsichtig. Man bilde die successiven Differenzen der Anzahlen, welche angeben, wie oft irgend ein Linearfactor der Determinante einer vorgelegten Formenschar $f+\lambda\varphi$ noch in sämtlichen Unterdeterminanten resp. der ersten, zweiten u. s. f. Ordnung aufgeht. Erhebt man dann jeden Linearfactor der Reihe nach auf Potenzen, deren Exponenten eben jene bezüglichen Differenzen sind, und multiplicirt sie sämtlich, so ist damit die ganze Determinante in das Product ihrer Elementarteiler zerlegt.

Das Kriterium für die gegenseitige lineare Ueberführbarkeit zweier Scharen $f+\lambda\varphi$ und $F+\lambda\Phi$ lautet nun einfach dahin, dass die beiderseitigen Determinanten in ihren Elementarteilern übereinstimmen müssen****).

Ein Elementarteiler ist offenbar eine irrationale Invariante der Schar; indessen lässt sich dem genannten Kriterium, wie das Kronecker später (1874) vorgezogen hat, eine rationale†) Formulirung dadurch erteilen, dass man die Elementarteiler ersetzt durch die grössten gemeinschaftlichen Teiler aller Unterdeterminanten je der nämlichen Ordnung.

Um nunmehr zwei vorgelegte Formenscharen bezüglich ihrer Aequivalenz mit einander zu vergleichen, reducirt Weierstrass dieselben auf geeignete canonische††) Gestalten, deren neue Variabeln allein von den Elementarteilern abhängen.

Der Begriff des „Canonischen", dem sonst leicht†††) eine gewisse Willkür anhaftet, ordnet sich hier dem höheren Probleme der Aequivalenz unter††††), und erhält dadurch einen bestimmten Charakter.

---

*) Berliner Ber. 1868 S. 310—338. Die Elementarteiler werden auf S. 311 eingeführt.

**) Vgl. hiermit die Behandlung des Problems bei Stickelberger, Dissert. Berlin 1874 und Maurer, Dissert. Strassburg 1887, sowie bei Ed. Weyr (Jub. fond der böhm. Ges. d. W. 1889 oder Wiener Monatshefte 1890 Bd. I), der die Cayley'sche Theorie der Matrices zu Grunde legt.

***) Wegen des Vorkommens derselben bei Sylvester siehe S. 87.

****) S. 312, 314, 326.

†) Berliner Ber. 1874 S. 60.

††) l. c. S. 319.

†††) Vgl. die Bemerkungen von Kronecker darüber Berl. Ber. 1874 S. 72.

††††) Bei Formen höherer Ordnung ist freilich bisher überwiegend das umgekehrte Verfahren eingeschlagen worden, cf. Sylvester in Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 193.

Die einzige Einschränkung, die Weierstrass macht, ist die, dass Elementarteiler überhaupt existiren, d. h. dass die Determinante der Formenschar nicht identisch verschwindet.

Wie selbst dieser extreme Ausnahmefall zugänglich gemacht werden kann, hat Kronecker unmittelbar darauf*) dargethan, indem er vermöge Teilung der Variabeln in zwei verschiedenartige Gruppen auch hier eine vermittelnde canonische Gestalt der Schar herstellt.

In derselben kurzen Note weist Kronecker darauf hin, wie für quadratische Scharen, die wenigstens eine Form von unveränderlichem Vorzeichen enthalten, das Weierstrass'sche Verfahren umgekehrt werden kann: es wird eine Methode angegeben, wie man direct zu einer geeigneten reducirten Schar gelangt, woraus sich rückwärts die Aequivalenz-Eigenschaften der Elementarteiler ablesen lassen.

Sechs Jahre später (1874) hat Kronecker**) seine algebraischen Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand zu einem Ganzen verarbeitet, welches alle existirenden quadratischen oder auch bilinearen Scharen $f + \lambda\varphi$ umfasst.

Erweist sich hierbei, wie schon bemerkt, die rationale Methode des grössten gemeinschaftlichen Teilers von principieller Bedeutung — Kronecker betont***) den Vorzug dieser arithmetischen Fixirung von Invarianten gegenüber der üblichen litteralen Bildungsweise — so lehrt doch ein tieferes Eindringen, dass die Gleichheit jener Invarianten als Kriterium für die Aequivalenz zweier vorgegebener Scharen nicht in allen Fällen hinreicht. Dies leistet erst der fundamentale Begriff der „elementaren" Scharen†), nämlich solcher, deren Determinante entweder die volle Potenz eines linearen Ausdrucks ist oder aber identisch verschwindet. Eine beliebige Formenschar ist stets, und im wesentlichen nur auf eine Art als Aggregat von elementaren Scharen darstellbar: diese letzteren (nebst ihrer Anzahl) erscheinen als die wahren Invarianten der Aequivalenz.

Zur wirklichen Durchführung der Reduction einer Schar auf ihre elementaren Teile bedurfte es der Ausdehnung der 1868 für Scharen mit wenigstens einer definiten Form gegebenen Methode auf beliebige Scharen; es wird das erst dadurch ermöglicht, dass nicht mehr successive eine Variable nach der andern (wie bei Jacobi), sondern gleich ganze Gruppen derselben entfernt (und durch canonische Variabeln ersetzt) werden.

---

*) Berliner Ber. 1868 S. 339—346.
**) Berliner Ber. 1874 S. 59—76, 149—156, 206—232.
***) l. c. S. 60.
†) l. c. S. 61.

C. Jordan*) war in einer kurz vorher erschienenen Arbeit zu andern Ergebnissen gelangt: in einer darüber entstandenen polemischen Auseinandersetzung zwischen ihm und Kronecker legte Letzterer dar, dass bei der allmählichen Ersetzung gewisser Veränderlichen durch neue, wie sie Jordan ausgeführt hatte, in extremen Fällen der merkwürdige Umstand eintreten kann, dass früher schon entfernte Veränderliche im späteren Verlauf der Rechnung von selbst wieder zum Vorschein kommen.

Als ein schönes Ergebnis der Kronecker'schen Untersuchung tritt hervor, dass die Weierstrass'sche Reductionsmethode bei geschickter Anordnung der Variabeln selbst im Falle einer verschwindenden Determinante der Schar gültig bleibt**), während die Jacobi'sche eine unmittelbare Uebertragung nur auf die symmetrischen und alternirenden (bilinearen) Formen gestattet.

Hatte Kronecker so eine ausnahmslose Theorie der unabhängigen („incongruenten") Transformationen bilinearer Formen und Formenscharen geschaffen, so wendet er sich nunmehr ausführlich zu seinem alten Probleme (von 1866) der für beide Variabelnreihen identischen („congruenten") Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst***).

Hier bereitet wiederum der damals bei Seite gelassene Fall einer verschwindenden Determinante (resp. der noch weitergehenden Ausartungen) Schwierigkeiten.

Dann aber hängt die Form in Wirklichkeit nur von einer geringeren Anzahl von Variabeln ab, und kann als Function dieser so zubereitet werden, dass ihre Determinante (nunmehr „Discriminante" †) genannt) von Null verschieden ausfällt.

Es lassen sich wiederum der Reihe nach gewisse einfachste canonische Formen, von denen vier („reducirte") Typen ††) aufgestellt werden,

---

*) C. R. Dez. 1873: auf die Entgegnung Kronecker's (Berliner Ber. 1874 S. 71—76) folgten die weiteren Mitteilungen Jordan's in Liouv. J. (2) XIX S. 35—54 und C. R. März 1874. Eine ausführliche und definitive Antwort hierauf gab Kronecker in den Berliner Ber. 1874 S. 206—232.

Insbesondere siehe S. 226. Die Behandlung der quadratischen Formen bei Jordan Liouv. J. (2) XIX S. 397—422 ist correct.

**) l. c. S. 156, 211, 212. Wegen der Jacobischen Transformation (Journ. für Math. LIII S. 265—270) siehe besonders S. 398 u. f.

***) Berliner Ber. S. 397—447.

†) l. c. S. 410.

††) l. c. S. 430. Diese Typen sind I. $\sum_k x_k y_{k+1} (k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$, II. $\sum_k (x_k y_{k+1} + c y_k x_{k+1}) (k = 0, 1, \ldots, 2m-2, c^2 \gtrless 1)$, III. $\sum_k ((-1)^m x_k y_{k+1} + (-1)^k y_k x_{k+1}) (k = 0, 1, \ldots, 2m-2)$, IV. $c' x_0 y_0 + \sum_k (x_k y_{k-1} + (-1)^k y_k x_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots, n, c' \gtrless 0)$.

aussondern; der weitere Gang der Untersuchung wird dann dem bei incongruenten Transformationen eingeschlagenen ähnlich.

Die Invariantensysteme der Transformation werden abermals auf Grund des Begriffes vom grössten gemeinschaftlichen Teiler definirt*).

Eine Reihe von Ergänzungen in diesem Sinne hat Kronecker in neuester Zeit**) (1889 und 1890) geliefert.

Standen sich so bis zuletzt der arithmetische und der formentheoretische Gesichtspunkt fast unvermittelt gegenüber, so erschien eine Durchdringung beider um so wünschenswerter.

Ein erster Schritt in dieser Richtung ist jüngst von Rosenow***) (1890) gemacht worden. Für den Fall von zwei Variabelntripeln werden einmal die Kronecker'schen Invarianten einer bilinearen Form aufgestellt — die, abgesehen von deren Determinante, jeweils nur aus gewissen ganzzahligen Charakteren bestehen — und darnach die verschiedenen Formenklassen eingeteilt. Andererseits werden die nämlichen Klassen derart charakterisirt, dass immer einige der zugehörigen gewöhnlichen Formen (Invarianten, Covarianten, Contravarianten) identisch verschwinden.

Indem wir uns zum Jahre 1874 zurückwenden, citiren wir vor allem noch eine Abhandlung von Darboux†), in der die Weierstrass-Kronecker'schen Sätze von 1868 ebenso allgemein, wie elegant abgeleitet werden. Als systematisches Hülfsmittel dient die mit mehreren Reihen von willkürlichen Grössen geränderte Determinante einer resp. zweier Formen.

Die Serie dieser Determinanten verhält sich, wenn man die ursprüngliche den Wert Null passiren lässt, ähnlich wie die Reihe der Sturm'schen Functionen beim Ueberschreiten einer Wurzel einer algebraischen Gleichung.

Die Summendarstellung selbst wird gewonnen, indem die als Quotient zweier benachbarten Ränderungsdeterminanten ausdrückbare Form (oder Formenschar), in Anlehnung an das Jacobi'sche Verfahren, in Partialbrüche zerlegt wird, jedoch mit der Massgabe, dass die durch die Ausnahmefälle zu erheischenden Modificationen wirklich im einzelnen durchgeführt werden.

---

*) l. c. S. 435—438.

**) Berliner Ber. 1889 S. 1225—1237, 1375—1388, 1890 S. 9—17, 34—44.

***) Journ. für Math. CVIII S. 1—24, Beilage zum Programm der 4. höheren Bürgerschule zu Berlin. Ostern 1891.

Eine Weiterführung für Formen mit n Variabeln würde die Kenntnis der bez. (algebraischen) Invariantensysteme voraussetzen. Letztere sind indessen nur sehr unvollständig bekannt, cf. Mertens, Krak. Denkschr. X, XII (1885, 1886).

†) Liouv. J. (2) XIX S. 347—396.

Unsere weiteren*) Darlegungen werden sich in der Hauptsache auf die Transformation einer quadratischen resp. bilinearen Form in sich selbst concentriren.

Während man bis dahin von den Formen als dem Gegebenen ausging, und solche Substitutionen der Variabeln suchte, welche gewisse Transformationen der Formen bewirken, vollzieht sich nunmehr eine entscheidende Wendung dadurch, dass man umgekehrt aus der Gesamtgruppe der Substitutionen diejenige Untergruppe zu erfassen sucht, welche überhaupt irgend eine quadratische (bilineare) Form in sich überzuführen im Stande ist, und die diesbezüglichen Formen erst nachträglich ermittelt. Die Formen selbst treten als etwas Secundäres in den Hintergrund und das Interesse wendet sich in erster Linie der selbständigen Gestaltung der Substitutionengruppe zu. Leider hat dies fruchtbare Princip in der übrigen Formentheorie bis heute nur erst vereinzelt**) Wurzel fassen können.

Den ersten Anstoss in diesem Sinne giebt Rosanes***) 1875, unter Beschränkung auf die quadratischen Formen von „allgemeinem" Charakter. Nach Cayley gehen zugleich mit einer quadratischen Form, deren erste Ableitungen, also ein System linearer Formen in sich über, deren „Fundamentalgleichung" die wichtige Eigenschaft besitzt, reciprok†) zu sein. Rosanes weist die Umkehrung nach, sodass zu jeder reciproken Gleichung ein solches „asymmetrisches"††) System von linearen Formen gehört, und damit auch eine zugehörige quadratische Form. Von einer derart gefundenen Lösung kann man zu den übrigen gelangen.

In vollem Umfange hat das genannte Princip für quadratische Formen Frobenius†††) 1877 verfolgt, und auf diesem Wege die charakteristi-

*) Vgl. zum Vorhergehenden noch die Reduction der bilinearen Form durch biorthogonale Substitutionen auf eine canonische Gestalt: Beltrami, Batt. G. XI S. 89—107 (1873), sowie neuere Arbeiten (1889) von Cosserat, Toul. Ann. III S. 1—12 und Sylvester, C. R. CVIII S. 651—653, Mess. (2) XIX S. 1—5, 42—46.

**) Vgl. indessen die Arbeit von Maurer im Journ. für Math. CVII S. 89 bis 116 (1890), der die Invariantentheorie ausgearteten Formen gewissen Transformationsgruppen zuordnet.

***) Journ. für Math. LXXX S. 52—72.

†) Vgl. für den einfachsten Fall Brioschi, Annali di Tort. V S. 201—206 (1854).

Allgemein ist die Eigenschaft der Reciprocität der Fundamentalgleichung von Kronecker 1866 bewiesen (Journ. für Math. LXVIII S. 276).

††) l. c. S. 59, 61.

†††) Journ. für Math. LXXXIV S. 1—63. Cf. C. R. LXXXV S. 131—134. Im Zusammenhange damit stehen die weiteren Arbeiten desselben Verf. im Journ. für Math. LXXXVI S. 44—71, 146—208 (1879), und Bd. LXXXVIII S. 96 bis 117 (1880).

schen Eigenschaften der Substitutionen, welche eine quadratische — oder, was im wesentlichen auf das Nämliche hinauskommt, eine symmetrische resp. alternirende bilineare — Form invariant lassen, mit Einschluss sämtlicher Ausnahmefälle aufgedeckt.

Allerdings darf dabei nicht unerwähnt bleiben, dass bereits 1873 Bachmann*) die ternären quadratischen Formen auf ihre Ausartungen hin direct untersucht und so die Hermite'schen Ergebnisse vervollständigt hatte, wogegen Hermite**) bald darauf nachweisen konnte, wie die Bachmann'schen Formeln bei correctem Grenzübergange aus den seinigen hervorgehen.

Frobenius geht von dem einfachen Grundgedanken aus, dass das Coefficientensystem einer bilinearen Form eine bestimmte Substitution einer einzelnen Variabelnreihe repräsentirt.

Dies setzt ihn in den Stand, die Transformationen bilinearer Formen überhaupt als „Zusammensetzungen" von Substitutionen aufzufassen, und auf dieser Grundlage einen fruchtbaren Algorithmus aufzubauen, dessen Operationen sich geradezu mit gewissen, durch ihre Einfachheit ausgezeichneten Arten der Multiplication von höheren complexen (oder „extensiven") Zahlen decken. Daraus fliessen die Kriterien für die Eigenart einer Substitution, die fähig sein soll, eine Form in sich zu transformiren.

Ist die verlangte Form eine allgemeine, d. i. von nicht verschwindender Determinante, so müssen***) die Elementarteiler der charakteristischen Substitutionenfunction paarweise von gleichem Grade sein und für reciproke Werte verschwinden (ausgenommen die Werte ± 1).

Bei verschwindender Formendeterminante hingegen†) muss, wenn m den höchsten Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten bezeichnet, die charakteristische Function durch eine reciproke Function mten Grades teilbar sein.

Sind darnach die Aequivalenzbedingungen vollständig ermittelt, so lassen sich nunmehr auch die Cayley-Hermite'schen Formeln für die Coefficienten der fraglichen Substitutionen mittels eines scharfsinnigen Grenzverfahrens auf alle Ausnahmefälle ausdehnen††).

Die merkwürdigen Anwendungen, welche der Verfasser von seiner Methode auf die Lehre von den complexen Zahlsystemen macht, müssen,

---

*) Journ. für Math. LXXVI S. 331—341. Vgl. Tannery, Darboux Bull. XI S. 221—233 (1876).

**) Journ. für Math. LXXVIII S. 325—328 (1874).

***) l. c. S. 31.

†) l. c. S. 32, 35.

††) l. c. § 11.

als zu weit führend, hier übergangen werden; desgleichen die verwandten Untersuchungen von Lipschitz*) und Kronecker*) über den innigen Zusammenhang zwischen den Hamilton'schen Quaternionen (resp. Biquaternionen) und den entsprechenden orthogonalen Substitutionen.

Hingegen mag eine andere Anwendung**), welche Frobenius von der Transformation der bilinearen Formen auf das sogenannte „Pfaff'sche Problem" gemacht hat, hier um so lieber eine Stelle finden, als sie ein merkwürdiges Beispiel dafür liefert, wie die, wesentlich der Functionentheorie angehörige Erforschung von Invarianten unendlicher Gruppen unter günstigen Umständen auf die rein algebraische von Invarianten einer projectiven Gruppe zurückgebracht werden kann.

Beim Pfaff'schen Problem handelt es sich darum, zu erkennen, ob und wann zwei vorgelegte n-gliedrige lineare Differential-Ausdrücke dadurch in einander übergeführt werden können, dass man die Variabeln „allgemeinen Punkttransformationen" unterwirft.

Frobenius lehrt zunächst, dass unter der Annahme der Möglichkeit jener Ueberführung gleichzeitig ein gewisses System***), bestehend aus einer alternirenden bilinearen und einer linearen Form in Folge gewisser congruenter (linearer) Substitutionen in ein ähnlich gestaltetes übergeht, wobei die Coefficienten der Formen, wie die der Substitutionen, trotzdem sie von den Variabeln des Problems abhängen, die Rolle blosser Constanten spielen. Nun zeigt sich aber, dass auch das Umgekehrte gilt, dass also das alleinige Erfülltsein der algebraischen Transformationsrelationen dasjenige der für die transcendente Frage erforderlichen Integrabilitätsbedingungen von selbst nach sich zieht. Des weiteren ergiebt ein tieferes (formentheoretisches) Eingehen auf den Charakter der algebraischen Relationen, dass diese nur die Gleichheit einer ganzzahligen Invariante p für beide Formenpaare verlangen, ein Satz, den kurz zuvor Lie auf gruppentheoretischem Wege nachgewiesen hatte. Die charak-

*) Lipschitz, „Untersuchungen über die Summe von Quadraten" Bonn 1886, Journ. de Math. (4) II, 373—440 (1886), Berl. Ber. 1890.

Kronecker, Berl. Ber. 1890 S. 525—541, 602—607, 691—699, 873—884, 1063—1080.

**) Journ. für Math. LXXXII S. 230—315 (1877).

Eine analoge Anwendung der Aequivalenz zweier quadratischen Formen findet sich schon bei Christoffel (1870), Journ. für Math. LXX S. 46—70, 241—245, der auf algebraischem Wege die Aequivalenz zweier quadratischen Differentialformen gegenüber unendlichen Punktgruppen erledigt. Mittels Methoden der Variationsrechnung ist Lipschitz gleichzeitig zu denselben Ergebnissen gelangt, siehe Journ. für Math. LXX S. 71—102, 274—287, 288—295; Bd. LXXII S. 1—56, nebst Verallgemeinerungen auf höhere Formen.

***) Dieses System ist später von Morera formentheoretisch genauer untersucht worden, Atti di Torino XVIII S. 383—403 (1883).

teristische Invariante p ist, wie auch Frobenius zeigt, nichts anderes, als die Anzahl der in der „canonischen“ Gestalt des Pfaff'schen Differentialausdrucks vorkommenden unabhängigen Functionen.

An die Fragestellungen von Frobenius knüpft Stickelberger*) an, der die Stellung der orthogonalen, oder überhaupt der, eine definite (quadratische) Form invariant lassenden Substitutionen innerhalb des seit Weierstrass neu gewonnenen Gesichtskreises zu ermitteln sucht. Mittels Einführung einer geeigneten trigonometrischen Normalform für derartige Substitutionen erschliesst sich ihm das einfache Ergebnis, dass deren charakteristische Function ausschliesslich einfache Elementarteiler besitzt, und infolgedessen eine solche Substitution durch die Angabe ihrer charakteristischen Function bereits völlig bestimmt ist.

Stickelberger hat ferner eine wertvolle Ergänzung**) zu der Weierstrass'schen Reduction von Scharen bilinearer Formen geliefert, insofern er darlegt, wie die Eventualität, dass etwa der Nenner der in die Normalform eingehenden Coefficienten verschwinden — und damit die letztere illusorisch werden — könnte, stets vermieden zu werden vermag.

Eine wichtige Aufgabe war noch im Rückstande geblieben, nämlich, die Frobenius'sche Theorie der congruenten Transformationen von quadratischen Formen in sich auf beliebig geartete bilineare Formen auszudehnen.

Das hat in den letzten Jahren Voss***) geleistet, und dabei zugleich die Methoden so weit vervollkommnet, dass die erforderlichen Hülfsprocesse wirklich rational durchführbar werden.

Indem er, gestützt auf den Kronecker'schen Begriff der beigeordneten Form, das vorliegende Problem auf das einfachere zurückführt, zwei gewisse Scharen von bilinearen Formen „congruent“ in einander zu transformiren, gelingt es ihm, das System der in den Coefficienten der Urform zunächst quadratischen Transformationsrelationen durch ein lineares zu ersetzen, wobei man deutlich erkennt, weshalb gerade die beiden Klassen der symmetrischen und der alternirenden Formen bei den Früheren, insbesondere bei Frobenius, ausgezeichnet sind.

---

*) Programm des Polytechnikums Zürich, 1877, S. 1—16.

**) Journ. für Math. LXXXVI S. 20—43 (1879). Vgl. die Dissertation dess. Verf. Berlin, 1874.

***) Göttinger Nachr. Aug. 1887 S. 425—433.

Münchener Abh. XVII (1890) S. 3—121.

Die besondere Transformation einer bilinearen Form in sich, bei der die beiden Variabelnreihen conjugirten Substitutionen unterworfen werden, ist von Voss in den Münch. Ber. 1889 S. 175—211 verfolgt worden.

In den Endformeln prägt sich die augenfällige Analogie mit den Cayley-Hermite'schen Ergebnissen aus.

Um von irgend einer gefundenen Substitution zu allen übrigen von der nämlichen Eigenschaft zu gelangen, hat man sämtliche, mit der ersten „vertauschbaren" aufzusuchen, eine Aufgabe, die bereits Frobenius mit Hülfe seines Algorithmus erledigt hatte*).

Auch die Stellung der Kronecker-Christoffel'schen Normalform innerhalb der ganzen Theorie tritt jetzt scharf hervor.

Uebrigens ist zu bemerken, dass der Kern des hier von Voss eingeschlagenen Verfahrens schon in einer älteren**) Arbeit desselben Verfassers über orthogonale Substitutionen vorgebildet erscheint, die nahezu gleichzeitig mit der grossen Frobenius'schen Abhandlung 1877 erschien.

Ein weiteres Verdienst hat sich Voss dadurch erworben, dass er die gemeinsame Quelle einer Reihe von zum Teil tief liegenden Elementarteilersätzen, welche Frobenius, Siacci, Stickelberger und Stieltjes aufgestellt hatten, in einer einzigen Determinantenidentität***) erkannte.

Wir haben oben einer Polemik zwischen Kronecker und Jordan aus dem Jahre 1874 gedacht. Jordan musste damals die ihm gemachten Einwände in der Hauptsache als berechtigt anerkennen.

Inzwischen hat er den Gegenstand wieder aufgenommen, und den ersten Teil†) seiner neuen Studien 1888 in einer Arbeit über die Transformation quadratischer Formen in sich im Zusammenhange niedergelegt. Die durch die Elementarteiler der charakteristischen Function bedingte Einteilung der Formen in Klassen und Unterklassen wird auch hier auf die Substitutionen selbst übertragen. Für die letzteren wird am Ende ein Paar von einfachsten canonischen Typen gewonnen, während die zugehörigen quadratischen Formen a posteriori explicite construirt werden. Auffallend erscheint der Mangel an Bezugnahme auf die Untersuchungen anderer.

Es darf aber wohl betont werden, dass die Aequivalenztheorie der bilinearen und quadratischen Formen, wie unsere Darstellung ergeben haben dürfte, ihre heutige Ausbildung fast ausschliesslich dem Scharfsinne deutscher Forscher verdankt.

---

*) In den Münchener Ber. von 1889 S. 283—300 hat Voss den fraglichen Satz auf einem andern Wege hergeleitet, der die Bildung sämtlicher Formen auf einen übersichtlicheren Process zurückführt, welcher zugleich die Untersuchung der charakteristischen Function der mit einer gegebenen Form vertauschbaren Formen gestattet.

**) Math. Ann. XIII S. 320—374 (1878).

***) Münchener Ber. 1889, S. 329—339.

†) Journ. de Math. (4) IV, 349—368. Vgl. die vorhergehenden Mitteilungen in den C. R.

Manches freilich haben wir unberücksichtigt gelassen, das, wie das speciellere Problem der Canonisirung einer Form, an sich wohl bedeutsam genug, doch zurücktreten musste, wo es sich in erster Linie um die invarianten Eigenschaften der verwendeten Substitutionen handelte.

Dahin gehört Gundelfinger's*) Vereinfachung und Verallgemeinerung der Jacobi-Plücker'schen Methode, eine quadratische Form auf eine Summe von Quadraten zu bringen, sodann eine Reihe von Beweisen für das Sylvester-Jacobi'sche Trägheitsgesetz**), ferner die genaueren Untersuchungen über die Abhängigkeit***) der Relationen, welche erfüllt sein müssen, wenn eine quadratische Form von n Variabeln als Summe von weniger als n Quadraten darstellbar sein soll, sowie die verschiedenartigen Formulirungen dieser Relationen; weiter der Ausdruck der canonischen Coefficienten in geschlossener Determinantenform†), und Aehnliches mehr.

Dagegen sei es gestattet, am Schlusse des vorliegenden Abschnittes, die Aufmerksamkeit auf einen Punkt von grösserer Bedeutung zu lenken.

So vielfach auch in den citirten Arbeiten der Gruppencharakter der Substitutionen, die eine quadratische oder bilineare Form invariant lassen, implicite verwendet worden ist, so sind wir doch noch von einer organischen Eingliederung des transformationsgruppentheoretischen Princips in die gemeinte Theorie weit entfernt. Dazu würde es vor allem eines vollständigen Studiums der in einer solchen Gruppe enthaltenen Untergruppen, und deren Nutzbarmachung für die Formen selbst bedürfen.

Hinsichtlich des Ersteren hat in neuester Zeit Werner††) für quadratische Gebilde die Bestimmung der grössten Untergruppen durchgeführt, nachdem schon vorher Lie†††) einige Fälle behandelt hatte: es sind das solche Gruppen, welche entweder einen „Punkt" oder aber eine „ebene Mannigfaltigkeit" des (durch Nullsetzen der Form repräsentirten) Fundamentalgebildes in sich überführen. Auf anderem Wege hat Killing††††) diesen Satz bestätigt.

In der allgemeinen Lie'schen Theorie ist diejenige („dreigliedrige") Gruppe von grösster Bedeutung, welche eine quadratische Form von drei

*) Journ. für Math. XCI S. 221—237 (1881).

**) Siehe z. B. de Presle, S. M. F. Bull. XV S. 179—181 (1887).

***) Siehe z. B. Benoît, C. R. CI S. 869—871 (1885); Nouv. Ann. (3) V S. 30—36 (1885); de Presle, S. M. F. Bull. XIV S. 98—100 (1886); André, S. M. F. Bull. XV S. 188—192 (1887); Valyi, Hoppe Arch. (2) VI S. 445—448 (1888).

†) Siehe z. B. Studnicka, Prag. Ber. S. 256—265 (1888).

††) Math. Ann. XXXV S. 113—160 (1889).

†††) Abhandl. der Ges. d. W. zu Christiania 1885.

††††) Math. Ann. XXXVI S. 239—254 (1890).

Variabeln invariant lässt. Jenachdem eine solche in irgend einer Transformationsgruppe von $n(\geqq 3)$ Variabeln als Untergruppe enthalten ist oder nicht, zerfallen dieselben in zwei wesentlich verschiedene Klassen. Diese Einteilung deckt sich, wie Engel*) und Killing**) nachgewiesen haben, mit einer schon viel früher von Lie***) selbst getroffenen (und zur Integration von Differentialgleichungen verwendete) in „integrable" und „nicht integrable" Gruppen.

Eine Anwendung davon hat Scheffers†) zur Aufstellung der complexen Zahlensysteme gemacht, für deren Multiplicationsverknüpfung zwar das associative Gesetz, aber nicht mehr das commutative vorausgesetzt wird.

I. B, a.

Das Aequivalenzproblem der nicht-quadratischen Formen.

Sieht man von den quadratischen (und bilinearen) Formen ab, so scheint Clebsch††) zuerst (1870) die Frage aufgeworfen zu haben, ob denn die — nach Aronhold notwendige — Gleichheit der absoluten Invarianten stets auch hinreiche, um zwei vorgegebene Formen linear in einander zu transformiren und, wenn nicht, welche weiteren Bedingungen zu dem Behuf noch erfüllt sein müssen. In der That lassen sich einfache Beispiele†††) construiren, welche die Unzulänglichkeit der ersteren Annahme darthun.

Ein Mittel, um der Frage überhaupt näher zu treten, bot ihm die typische Darstellung der Formen, bei der die Coefficienten bereits selbst

*) Leipz. Ber. S. 95—99 (1887), cf. F. d. M. XIX S. 356 (1887).

**) Math. Ann. XXXVI S. 172 (1890).

***) Norweg. Archiv III S. 112—116 (1874).

†) Math. Ann. XXXIX S. 293—390 (1891).

††) Math. Ann. II, S. 373—382.

†††) Das einfachste Beispiel der Art ist wohl eine binäre Form 6. Grades mit einem dreifachen Elemente. [Auf eine Nichtbeachtung des bezeichneten Umstandes ist die irrtümliche Zählung zurückzuführen, welche Cayley für die Moduln einer „Klasse" ternärer Formen veranstaltet hatte. Siehe Cayley Math. Ann. III S. 268—271 (1870)]. Denn obgleich sich die Kriterien für das Auftreten einer dreifachen Wurzel durch Invariantenrelationen ausdrücken lassen, so lassen sich doch die verschiedenen dabei noch möglichen Unterfälle nicht mehr durch Invariantenkriterien von einander trennen.

Dagegen hat Bolza (Math. Ann. XXX, S. 546—552, 1887) nachgewiesen, dass für alle Binärformen 6. Grades, deren Ausartung die einer dreifachen Wurzel nicht erreicht, die Gleichheit der absoluten Invarianten in der That zur Aequivalenz hinreichend ist. Insbesondere hat er vier Fälle angegeben (l. c. S. 549), in denen die Clebsch'sche Methode versagte; freilich verzichtet er dabei auf die Rationalität der Transformationsformeln.

Ueberdies versagt das Kriterium bez. der Gleichheit der absoluten Invarianten dann, wenn alle Invarianten jeder von zwei Formen verschwinden, also die absoluten Invarianten unbestimmt werden.

Invarianten sind. Da leuchtet ohne weiteres ein, dass, falls zwei Formen auf die nämliche typische Gestalt durch lineare Substitutionen gebracht werden können, auch sicher eine Substitution existirt, welche den Uebergang von der einen Form in die andere ermöglicht. Es wird sich demnach darum handeln, eine Grenze zu ermitteln, bis zu welcher eine typische Darstellung der in Rede stehenden Art erzielt werden kann. So ergiebt sich, dass die Aequivalenz zweier binären Formen (sc. gleich hoher Ordnung) jedenfalls dann statthat, wenn (ausser gleichen absoluten Invarianten) noch jeweils ein Paar übereinstimmender und unabhängiger, linearer, beziehungsweise quadratischer Covarianten vorhanden ist, je nachdem die Ordnung der Formen eine ungerade oder gerade war*).

Indessen scheint dieser Weg nicht geeignet zu sein, um zu einem System von sowohl notwendigen, wie hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgabe zu gelangen; zudem sind unsere Kenntnisse von den typischen Gestalten höherer Formen noch sehr dürftige.

Eine directe Handhabe bietet dagegen die früher besprochene Aronhold'sche Behandlung der Aequivalenz, und so haben denn auch die weiteren Bearbeiter des Problems fast alle an Aronhold angeknüpft.

Zuvörderst galt es, die absoluten Invarianten selbst auf direct algebraische Weise, ohne Hinzuziehung der Differentialgleichungen abzuleiten. Dies gelang Gram**) (1874) in einfacher Art, indem er den Gruppencharakter der Substitutionen, welche die Formen ein und derselben Klasse nur unter einander vertauschen, in den Vordergrund rückt, ganz, wie es zuerst Gauss mit durchschlagendem Erfolge bei den ganzzahligen Substitutionen in Anwendung auf die quadratischen Formen that.

Die von Aronhold gebildeten Resultanten aus den Transformationsrelationen werden einmal für ein Formenpaar F, F′, sodann für ein zweites F, F″ aufgestellt, und, werden nunmehr aus diesem Doppelsysteme von Beziehungen die Coefficienten von F eliminirt gedacht, so erschliesst man unmittelbar die Gleicheit der absoluten Invarianten für F′ und F″.

Um nun die umgekehrte Frage zu beantworten, werden die einzelnen Colonnen der Substitutionscoefficienten als selbständige Variabelnsysteme angesehen, und in Bezug auf diese die gegebenen Formen Polarisations-

---

Hier ist der einfachste Fall der von zwei biquadratischen Formen, von denen die eine ein dreifaches, die andere ein vierfaches Element aufweist.

*) Die Beispiele aus der Theorie der Formen fünfter und sechster Ordnung stützen sich auf die Abhandlung von Clebsch und Gordan in den Annali di Mat. (2) I S. 23—79 (1867).

**) Math. Ann. VII S. 230—241. Vgl. damit die Darstellung Gundelfinger's bei „Fiedler“ S. 452—458 (1877), sowie die Betrachtungen von Study, „Methoden“ . . . (1889) S. 104 u. flgd.

processen unterworfen. Dann ergiebt sich der Satz, dass jede zugehörige In- und Covariante aus derartigen Polarenbildungen rational und ganz zusammensetzbar ist. Daraus fliesst als vollständiges Kriterium für die Transformirbarkeit zweier Formensysteme in einander „die Gleichheit der absoluten Invarianten und das identische Verschwinden derselben Covarianten“.

Damit war indessen die für Anwendungen bedeutsame Frage nicht berührt, in welchem Umfange sich diejenigen Formenklassen abgrenzen lassen, bei denen die blosse Uebereinstimmung der absoluten Invarianten die Aequivalenz bereits gewährleistet.

Hierauf geht Christoffel 1881*) näher ein, und wenn er sich dabei des nämlichen Gauss'schen „Aequivalenzprincips“ wie Gram bedient, so dringt er doch dadurch tiefer in die einzelnen Stadien der bezüglichen Eliminationsprocesse ein, dass er von vornherein keinerlei Voraussetzungen über die Form der Endgleichungen einführt.

Christoffel präcisirt das Problem dahin, sämtliche, mit einer gegebenen Form äquivalenten Formen aufzusuchen.

Um überhaupt gewisse Eigenschaften der für die unbekannten Coefficienten der gewünschten Formen hervorgehenden Endgleichungen aussagen zu können, eliminirt er die Substitutionscoefficienten in irgend einer Reihenfolge, jedoch mit der Massgabe, dass für jeden einzelnen derselben der Gang der Elimination zu einem „systematischen“, d. i. ein für alle Mal normirten wird. Dadurch wird es möglich, anzugeben, welche von jenen unbekannten Coefficienten in den Aequivalenzbedingungen vorkommen, und desgleichen, welche der noch übrig bleibenden Substitutionscoefficienten in den Schlussgleichungen.

Es kommt nun alles auf die Anzahl der letzteren an, von der sich nachweisen lässt, dass sie von der Reihenfolge der einzelnen Eliminationen unabhängig ist. Diese Anzahl wird im allgemeinen einen gewissen höchsten Wert, nämlich n^2 (wenn n die Zahl der Variabeln angiebt), erreichen, was nach Aronhold sicher eintritt, solange die Discriminante der vorgelegten Form von Null verschieden ausfällt.

Indem der Verfasser ausdrücklich alle Formen ausschliesst, für welche jene Maximalanzahl nicht erreicht wird, führt er den Beweis, dass die Aequivalenz zweier Formen in der That nur von der Uebereinstimmung der beiderseitigen absoluten Invarianten abhängt, womit zugleich deren Anzahl auf eine neue Art abgeleitet ist.

---

*) Math. Ann. XIX S. 280—290. Vgl. Study l. c.

Es wäre freilich wünschenswert, zu untersuchen, welches der invariantentheoretische Kern der eben genannten Christoffel'schen Forderung ist. Sicher dürfen die Substitutionscoefficienten keine willkürlichen Parameter mehr enthalten, d. h. die vorgelegten Formen nicht Scharen von Transformationen in sich zulassen, und ebensowenig dürfen alle Invarianten einer der Formen verschwinden*).

Veltmann hat zwar ebenfalls versucht, den Aronhold'schen Eliminationsprocess dahin zu modificiren, dass aus der Gleichheit der absoluten Invarianten rückwärts auf die Richtigkeit der Transformationsrelationen geschlossen werden kann; indessen sieht er sich zu dem Behuf gezwungen, nach subjectivem Ermessen von ganzen Klassen von Formen abzusehen, deren innere Bedeutung wiederum schwer ersichtlich ist.

Das Aequivalenzproblem kann wohl erst dann einer befriedigenden Lösung entgegengeführt werden, wenn eine genügende invariantentheoretische Einsicht in die verschiedenen Ausartungen der Formen gewonnen ist**).

Es würde sich folgerichtig jetzt die Aufgabe darbieten, die besonderen Transformationen zu verfolgen, welche vorgelegte Formen in gewisse, zu praktischem Gebrauche construirte canonische Gestalten überführen sollen; da indessen bei der historischen Entwickelung dieses Gegenstandes die Frage nach den dabei auftretenden Irrationalitäten weit mehr berücksichtigt worden ist, als nach den Transformationen selbst, so möge die bez. Besprechung auf eine andere Stelle (II. B) verschoben werden.

I. B, b.
Formen mit linearen Transformationen in sich.

In den Invarianten einer Form resp. einer Reihe von Formen, hatte man einfache Functionen der Coefficienten entdeckt, die sich bei gewissen Gruppen von linearen Transformationen derselben nur um einen Factor ändern, der allein von den Substitutionscoefficienten abhängt, und übrigens der Einheit gleich gemacht werden kann.

Sind auch diese Invarianten von specieller Beschaffenheit hinsichtlich ihrer Argumente — haben sie doch gewissen linearen partiellen Differentialgleichungen zu genügen — so erlaubte immerhin die Allgemeinheit der ursprünglich gegebenen Formen die Aufstellung weittragender Methoden zur Bildung der Invarianten.

*) Der von Christoffel S. 284 citirte Ausnahmefall $f = x_1^3 + 3x_2^2 x_3$ ist gerade von der letzteren Art. Hier verschwinden die beiden (Aronhold'schen) Invarianten S und T, und damit alle überhaupt.

**) Für die Aequivalenz bei höheren Transformationen (so z. B. im binären Falle bei der Tschirnhausen-Transformation) ist bisher fast noch nichts geschehen.

Sobald man indessen den Begriff der Invariante von der Grundlage der Urformen loslöst, und nach allen solchen Formen einer bestimmten Anzahl von Argumenten fragt, die bei gewissen Substitutionen der letzteren in sich übergehen, oder auch umgekehrt, was im wesentlichen die nämliche Aufgabe ist, wenn man alle möglichen Gruppen von Substitutionen von n Variabeln und deren zugehörige (ganz-rationale) Invarianten sucht, — hat man sich nach neuen Hülfsmitteln umzusehen.

Im Folgenden beschränken wir uns in der Hauptsache auf „endliche“ Galois'sche*) Gruppen von Substitutionen, da solchen mit willkürlichen**) Parametern eine formentheoretische Behandlung fast noch gar nicht zu Teil geworden ist.

Die nächstliegenden Formen der gemeinten Art, die binären, sind von functionentheoretischen Gesichtspunkten aus gefunden worden.

H. A. Schwarz***) gelangte zu ihnen aus Anlass der Frage nach den algebraischen Integralen der hypergeometrischen Differentialgleichung, welche linear und von der zweiten Ordnung ist. Der Quotient s zweier Particularlösungen y_1, y_2 derselben genügt selbst einer Differentialgleichung 3. Ordnung†); infolgedessen wird die positive Halbebene der unabhängigen Variabeln x conform abgebildet††) auf ein Kreisbogendreieck S (welches in seinem Innern keinen Windungspunkt enthält und), welches über jede seiner drei Seiten hinaus durch „symmetrische Wiederholung“ analytisch fortgesetzt werden kann.

Die Anzahl der so entstehenden Gebiete muss, falls s eine algebraische Function von x sein soll, eine endliche sein*).

Die Aufgabe, zu der Schwarz demgemäss geführt wird, „alle sphä-

---

*) Siehe oben S. 101. Es sei nochmals betont, dass Lie dagegen unter einer „endlichen“ Gruppe eine solche Gruppe versteht, die von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt.

**) Klein und Lie haben Curven und Flächen mit Scharen von (vertauschbaren) Substitutionen in sich untersucht, C. R. Juni 1870, Math. Ann. IV S. 50—84. Die späteren bez. Leistungen von Lie, Halphen, Sylvester, Poincaré, Picard können hier nur angedeutet werden.

Bei Lie ist die Aufgabe zu der weit allgemeineren geworden, die Differentialgleichungen mit (nicht bloss projectiven) continuirlichen Gruppen von Transformationen in sich systematisch abzuhandeln.

***) Journ. für Math. LXXV S. 292—335 (vgl. Verhandl. der Schweizer Naturf. Ges. 1871).

Die vorhergehende verwandte Litteratur findet sich zusammengestellt in Abschnitt VI der Schwarz'schen Abhandlung.

†) l. c. S. 300. Der Ausdruck auf der linken Seite derselben ist später der Ausgangspunkt von Sylvester's Reciprocantentheorie geworden. Cf. II. C Anhang.

††) S. 311.

†††) S. 316—317.

rischen Dreiecke zu finden, deren symmetrische Wiederholungen auf der Kugeloberfläche nur zu einer endlichen Anzahl von, der Lage nach verschiedenen sphärischen Dreiecken Anlass geben," ist daher implicite**) äquivalent mit der hier postulirten. — Schwarz entwickelt die zugehörigen Formen***) und giebt auch die zwischen zwei rationalen Covarianten und einer Urform selbst bestehende Relation***).

Ohne ursprünglich†) von der Schwarz'schen Arbeit Kenntnis zu haben, wurde Klein direct zu der Bestimmung der endlichen binären, linearen Gruppen und ihrer Formen geführt. Die Grundlage seiner Betrachtung ist die Verknüpfung, welche zwischen der Riemann'schen Interpretation der complexen††) Variabeln z auf einer Kugeloberfläche einerseits und der geometrischen Deutung einer linearen Transformation der Variabeln andererseits hergestellt wird. Diese Transformationen werden nämlich den reellen „Bewegungen"†††) des Raumes eindeutig zugeordnet.

Die endlichen Gruppen solcher Bewegungen lassen sich aber durch

---

*) Der Gesichtspunkt der „endlichen Substitutionsgruppe" tritt indessen erst bei Klein auf, ebenso wie der Begriff und die Bildung des zugehörigen vollen Systems. Schwarz operirt weder mit homogenen Variabeln, noch überhaupt mit Covarianten.

**) Insbesondere tritt die wichtigste derselben, die „Ikosaederform" in der canonischen Gestalt $s(1-11s^5-s^{10})$ auf S. 330 auf. Ebendaselbst steht die bez. „Relation".

***) Erlanger Ber. Juli 1874. In einer folgenden Note Erl. Ber. Dez. 1874 setzt der Verf. bereits seine Beziehung zur Schwarz'schen Arbeit auseinander. Danach ergiebt sich sein ursprünglicher Ansatz, wenn man die bei Schwarz zu Grunde liegenden Kreisbogendreiecke durch Vielecke ersetzt (welche aber nicht nach dem Princip der Symmetrie, sondern nach dem Princip der analytischen Fortsetzung vervielfältigt werden sollen). Hier wird auch erwähnt, dass die im Texte bemerkte „Relation" als besonderer Fall eines, in der Formentheorie (seit Hesse) bekannten Satzes über Functionaldeterminanten aufgefasst werden kann.

Eine dritte Note Erl. Ber. Juli 1875 geht auf die Resolventen 5. und 6. Ordnung der Ikosaedergleichung ein. Wenig später (1875) erschien die zusammenhängende Darstellung in den Math. Ann. IX S. 183—208. (Die erste der weiter unten besprochenen Arbeiten von Fuchs wurde in den Gött. Nachr. vom Aug. 1875 publicirt.)

†) Das Doppelverhältnis von vier complexen Werten ist zuerst von Möbius eingeführt worden. Mit der Uebertragung auf die Kugel hat sich eingehend Wedekind beschäftigt (Dissertation Erlangen 1874, Beiträge etc. Erlangen 1875, Math. Ann. IX S. 209—217). Beltrami untersuchte 1870 invariantentheoretisch die binären Formen, besonders der 3. Ordnung mit complexen Coefficienten, Mem. di Bologna X.

Wegen der allgemeinen Auffassung des Sachverhalts vgl. Klein's Erlanger Programm von 1872.

††) Vgl. z.B. Lindemann, Math. Ann. VII S. 56ff. Bei gewöhnlicher Massbestimmung war die Bestimmung aller endlichen Bewegungsgruppen seit langem erledigt.

unmittelbare Anschauung gewinnen*). Es sind dies, auf eine canonische Form gebracht, einmal die trivialen Wiederholungen einer Rotation der Kugel um einen bestimmten Durchmesser (cyklische Gruppe), nebst denjenigen Drehungen, welche hieraus durch Vertauschung der beiden Endpunkte des Durchmessers erwachsen (Diedergruppe); von diesen beiden Klassen von Gruppen dürfen wir im folgenden absehen. Sodann aber die Gruppen derjenigen Rotationen, welche die fünf (Platonischen) regulären Körper mit sich zur Deckung bringen, wobei man sich auf das Tetraeder, Oktaeder (oder Würfel) und Ikosaeder (oder Dodekaeder) beschränken kann; diese drei Gruppen umfassen bez. $n = 12, 24, 60$ Drehungen.

Es handelt sich um die Aufstellung des „vollen Formensystems" einer solchen Gruppe, d. i. derartiger Formen, dass alle übrigen (gerade bei den Substitutionen der Gruppe unverändert bleibenden) ganz-rationale Functionen derselben werden.

Auf Grund des einfachen Princips, „dass die Covarianten durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen müssen, wie die Grundform", ergiebt sich das Gesetz:

„Wendet man die Operationen einer der drei Gruppen auf jeden von zwei beliebigen Ausgangswerten (i. e. Punkten der Kugel) an, so resultiren jedesmal n Werte, die Wurzeln zweier Gleichungen $\pi = 0$, $\pi' = 0$ sind. Dann befinden sich unter der linearen Schar $\pi + \varkappa\pi'$ stets drei (und nur drei) volle Potenzen von Formen niedrigerer Ordnung f, H, T, welch' letztere (mit Hinzunahme einer einzigen Invariante) das volle System der Gruppe bilden."

Zwischen den bezüglichen Potenzen von f, H, T herrscht also eine lineare Relation; dabei ist H die Hesse'sche Covariante von f, und T die Functionaldeterminante beider.

So gelangt man im Falle der „Ikosaedergruppe" zunächst zu einer Schar von Formen 60. Ordnung; diese enthält resp. fünffach, dreifach, zweifach zählend je eine Form 12., 20., 30. Ordnung f_{12}, H_{20}, T_{30}; $f = 0$ stellt die Ecken des Ikosaeders, $H = 0$ diejenigen des Dodekaeders, endlich $T = 0$ die Halbirungspunkte der Kanten eines der beiden Körper dar.

In den beiden ersten Fällen repräsentiren analog $f_4 = 0$, $f_6 = 0$ die Ecken des Tetraeders und Oktaeders.

---

*) Vgl. oben S. 123 Note †††).

**) l. c. § 4. Hierbei ist indessen wohl zu beachten, dass ausser den durch die allgemeine Formentheorie gelieferten invarianten Bildungen noch besondere existiren, die durch die Eigenart der hier vorliegenden (endlichen) Substitutionsgruppen bedingt sind. So tritt z. B. im Falle der Ikosaederform eine specifische rationale Invariante ersten Grades auf, vgl. Ann. IX S. 198.

Die drei Formen f besitzen, wie eine leichte Rechnung zeigt, die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst, $(f, f)^4$, identisch verschwindet: aber auch umgekehrt sind sie hierdurch und durch Angabe der Ordnungen 4, 6, 12 (sc. bei nicht verschwindender Discriminante) vollständig charakterisirt.

Die innige Beziehung der „Ikosaedergleichung“ $f_{12} = 0$ zu den allgemeinen Gleichungen fünfter Ordnung kann hier nur gestreift werden. Dass die Gleichung $f_{12} = 0$ Resolventen fünfter und sechster Ordnung besitzt, ist geometrisch nahezu evident.

Die 30 Punkte $T = 0$ bilden gerade die Ecken von fünf regulären Oktaedern, deren Formen t Wurzeln einer Gleichung 5. Ordnung sind.

Andererseits zerlegen sich die 12 Ecken des Ikosaeders in 6 Paare von Gegenecken: ist φ die Form eines solchen Paares, so hängt φ^2 von einer Gleichung 6. Ordnung ab.

Die Beziehungen zwischen den beiden letztgenannten Gleichungen stellen sich nun thatsächlich als dieselben heraus, wie sie in den bekannten Untersuchungen von Kronecker, Hermite und Brioschi über die allgemeine Gleichung 5. Ordnung auftreten.

Die weitere Ausführung dieses Zusammenhanges hat dann Klein veranlasst, das Ikosaeder zum Mittelpunkt der vielverzweigten Theorie der Gleichungen 5. Ordnung zu gestalten*).

Wir haben jetzt des Zusammenhanges zu gedenken, der zwischen den endlichen Substitutionsgruppen nebst ihren Formen und den linearen Differentialgleichungen besteht.

Die allgemeinen Integrale einer vorgelegten linearen Differentialgleichung nter Ordnung mit rationalen Functionen als Coefficienten lassen sich durch n particuläre, linear unabhängige, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, linear und homogen ausdrücken. Durchläuft die Veränderliche x geschlossene Wege um die singulären Stellen der Gleichung, so werden die y linear mit constanten**) Coefficienten substituirt; diese Substitutionen bilden die „Gruppe“ der Gleichung.

Besitzt die Gleichung lauter algebraische Integrale, so ist die Gruppe eine endliche, und umgekehrt.

---

*) „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“ Leipzig 1884. Vgl. Erlanger Ber. 1876—77, Math. Ann. XII S. 503—560 (1877). Vgl. ferner noch die beiden späteren, wichtigen Arbeiten von Gordan, Math. Ann. XXVIII S. 152—166, XXIX S. 318—326 (1887).

**) Vgl. die grundlegenden Arbeiten von Fuchs im Journ. für Math. LXVI S. 121—160 (1866); LXVIII S. 354—385 (1888). Der Satz selbst geht auf Riemann zurück.

Damit ist die Grundlage der Fuchs'schen Arbeit von 1875*) gekennzeichnet, an die sich die weiteren Untersuchungen von Jordan, Klein, Brioschi angeschlossen haben.

Es gebührt aber Fuchs vor allem das weitere Verdienst, die tieferliegende Beziehung aufgedeckt zu haben, welche den zur Gruppe gehörigen Formen $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ innerhalb der Theorie der linearen Differential-Gleichungen zukommt.

Soll die bei Fuchs in reducirter Gestalt gegebene Differentialgleichung, die im besonderen von der zweiten Ordnung sei, lauter algebraische Integrale haben, so müssen gewisse Formen $f(y_1, y_2)$ existiren, die Wurzeln einer rationalen Function sind. Diese „Primformen" decken sich mit den Formen $\pi + \varkappa\pi'$ der Gleichungsgruppe (siehe oben S. 124); ihre Covarianten sind wiederum Primformen**). Die Primformen niederster Ordnung n sind mithin dadurch ausgezeichnet, dass alle ihre Covarianten von einer Ordnung $< n$ identisch verschwinden***).

Hieraus lässt sich der Schluss ziehen, dass die Ordnung n nur eine beschränkte Anzahl von Werten annehmen kann; Fuchs findet als überhaupt nur mögliche Werte $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

Die angegebenen Hülfsmittel gestatten, bei jeder in concreto angeschriebenen Differentialgleichung 2. Ordnung die Schritte zu bezeichnen, deren es behufs Lösung der Frage nach algebraischen Integralen bedarf.

Die umgekehrte Frage nach der expliciten Aufstellung sämtlicher derartiger Typen von Differentialgleichungen 2. Ordnung hat Klein†) in Angriff genommen und zu einem gewissen Abschluss gebracht. Zuvörderst ist er, gestützt auf seine früheren Ergebnisse, sofort in der Lage, die fünferlei möglichen Integralgleichungen hinzuschreiben, denen der Quotient η zweier algebraischen Particularlösungen y_1, y_2 der Gleichung zu genügen hat. Von hier aus macht er den Uebergang zu den fünferlei correspondirenden Differentialgleichungen 3. Ordnung für die Grösse η. Es zeigt sich die merkwürdige Erscheinung, dass die letzteren unmittel-

---

*) Gött. Nachr. 1875 S. 568—581, 612—613. Journ. für Math. LXXXI S. 97—142 (1876).

In der zweiten Abhandlung Journ. für Math. LXXXV S. 1—26 (1878) unterwirft der Verf. die Gesamtheit der Primformen einem systematischen Studium.

) Siehe indessen die Anmerkung) auf S. 124.

***) Die von Fuchs angeregte Frage nach der Umkehrung dieses Satzes ist dann von Gordan (vgl. weiter unten) in bejahendem Sinne entschieden worden.

†) Erl. Ber. 1876 oder Math. Ann. XI S. 115—118, und Math. Ann. XII S. 167—180 (1877).

Die von Jordan zuvor in den C. R. LXXXII S. 605—607, C. R. LXXXIII S. 1033—1037 gewonnenen Typen waren nicht erschöpfend. Siehe die litterarischen Bemerkungen von Klein: Math. Ann. XI S. 118 unten (1876).

bar hervorgehen aus der im hypergeometrischen Falle von Schwarz herrührenden Gleichung 3. Ordnung, wenn man (nach Einsetzung geeigneter numerischer Werte für die drei daselbst auftretenden arbiträren Constanten) das Argument x vertauscht mit einer beliebigen rationalen Function von x*). — Hierbei ergiebt sich zugleich, dass die Fuchs'sche Tabelle (l. c. S. 126) der möglichen Primformen (niederster Ordnung) thatsächlich noch überflüssige**) Fälle enthält.

Die In- und Covarianten der Primformen sind in eigenartiger Weise, unter Einführung der Hermite'schen associirten Formen, von Brioschi hergeleitet worden***).

Nach rein algebraischen Principien sind die binären Formen mit linearen Substitutionen in sich zuerst von Gordan†) untersucht worden. Vor allem wird eine binäre Substitution S auf eine Normalform††) ge-

---

*) Umgekehrt wird für die Bestimmung von R(x) aus einer gegebenen Differentialgleichung für η ein Verfahren angegeben, welches nach einer endlichen Anzahl von Versuchen zum Ziele führt.

Brioschi hat 1877 (Math. Ann. XI S. 401—411, Rend. Ist. Lomb. (2) X S. 48 bis 58) die Function R im Falle von nur drei singulären Punkten ermittelt für alle Schwarz'schen „reducirten" Typen (Journ. für Math. LXXV S. 323) bis auf drei. Diese drei letzteren sind dann von Klein erledigt worden, Math. Ann. XII S. 175, 176 (1877), vgl. eine Berichtigung von Cayley ebenda XVII S. 65, 66 (1880). Mit der Berechnung weiterer Ikosaederfälle beschäftigt sich die Dissertation von O. Fischer, Leipzig 1885, siehe die Bemerkungen von Klein: Math. Ann. XXVI S. 463 (1886).

**) Siehe Math. Ann. XI S. 118.

***) Math. Ann. XI S. 401—411. Nach Fuchs ist eine Primform $f(y_1, y_2)$ gleich $\varphi(x)$, wo φ die Wurzel aus einer rationalen Function von x bedeutet. Die Differentiation nach x liefert daher $\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x}=\frac{d\varphi}{dx}=\varphi\psi$, wo ψ wiederum rational in x ist; andererseits giebt der Euler'sche Satz für homogene Functionen $y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}=nf=n\varphi$. Berechnet man hieraus $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y_2}$, und setzt ihre Werte in die Hermite'schen Transformationsformeln ein, so hat man nur noch zu berücksichtigen, dass der gemeinsame Nenner $y_2\frac{\partial y_1}{\partial x}-y_1\frac{\partial y_2}{\partial x}$ nach einem Satze von Abel mit einer Constanten übereinstimmt.

†) Math. Ann. XII S. 23—46 (1877). Referent muss sich leider versagen, des näheren einzugehen auf diese delicaten Untersuchungen Gordan's, die sich ihrer Natur nach gegen eine Schilderung in Worten sehr viel spröder erweisen, als die verwandten geometrischen und functionentheoretischen Arbeiten.

††) l. c. S. 24. Dieselbe lässt sich in der Gestalt schreiben:

$$(y-x)\cos\varphi = i\sin\varphi\, k\{(x-\alpha)(y-\beta)+(x-\beta)(y-\alpha)\},$$

wo α, β die beiden Coincidenzelemente sind, und k ein geeignet gewählter numerischer Wert.

Uebersichtlicher würde die Gordan'sche Normalform einer Substitution lauten: $\frac{y-\alpha}{y-\beta}=e^{2i\varphi}\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ (φ darf dabei alle complexen Werte durchlaufen).

bracht, in der neben der quadratischen Form, welche die beiden Coincidenzelemente von S bestimmt, noch ein variabler Winkel φ, das Argument von S, auftritt. Dann wird einfach $n\varphi$ das Argument von S^n; soll S einer endlichen Gruppe angehören, so muss $n\varphi$ ein Multiplum von π sein.

Hat man zwei Substitutionen S, T mit den Argumenten φ, ψ, und sind Φ, Ψ die Argumente der aus jenen zusammengesetzten Substitutionen ST, $S^{-1}T$, so herrscht zwischen diesen vier Winkeln allein eine einfache Relation*), nämlich

$$\cos\Phi + \cos\Psi = \cos(\varphi+\psi) + \cos(\varphi-\psi).$$

Auf Grund dieser Relation und der Einteilung der Substitutionen nach der Grösse ihrer Perioden wird die ursprüngliche Aufgabe zurückgeführt auf die zahlentheoretische**), die Gleichung

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$$

durch rationale Winkel φ_1, φ_2, φ_3 zu lösen.

Die weitere Untersuchung hängt wesentlich von einem Kronecker'schen Satze über die Irreducibilität der verallgemeinerten Kreisteilungsgleichung ab**).

Das Resultat sind natürlich die fünf Klein'schen Gruppen: sie werden hier aber in einer sehr brauchbaren canonischen Form aufgestellt.

In einer anschliessenden Arbeit***) legt Gordan die von Fuchs herrührende Eigenschaft der Primformen niederster Ordnung n, nach der alle Covarianten von einer Ordnung $< n$ identisch verschwinden, als Definition†) zu Grunde.

Einmal wird direct mit Hülfe der zugehörigen Formensysteme nachgewiesen, dass den Formen f_6, f_{12} des Oktaeders und Ikosaeders die genannte Eigenschaft zukommt. Die schwierige Umkehrung, dass jene Formen f die einzigen der Art sind, wird aus dem Verhalten derjenigen Covarianten niedrigster Ordnuug erschlossen, deren letzte Ueberschiebung mit f identisch verschwindet.

Schliesslich haben Wedekind††) und Brioschi††) auf dem Wege

---

*) l. c. S. 25.

**) l. c. S. 29.

***) Math. Ann. XII S. 147—166 (1877).

†) Die Gordan'sche Definition ist insofern eine modificirte, als sie von vornherein Formen mit mehrfachem Factor ausschliesst.

††) Wedekind, Habil.-Schrift Karlsruhe 1876, Brioschi, Annali di Mat. (2) VIII S. 24—43, 1877. Vgl. die Darstellung bei Gordan-Kerschensteiner II § 19. Die Gleichung $(ff)_4 = 0$ ist natürlich das formentheoretische Aequivalent für die früher besprochene Differentialgleichung 3. Ordg.; in seinen Vorlesungen pflegt Gordan den Uebergang von der einen Darstellung zur andern auszuführen. Wegen der Differentialgleichung 3. Ord. vgl. auch Hurwitz in den Math. Ann. XXXIII S. 345—352 (1889).

directer Coefficientenvergleichung abgeleitet, dass das von Klein bemerkte identische Verschwinden der vierten Ueberschiebung einer binären Form mit sich selbst, wenn man von Formen f_n mit (n—1)-fachem Factor absieht, ausschliesslich zu den Formen f_4, f_6, f_{12} des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders hinführt*).

Vom Standpunkt der Substitutionentheorie aus hat C. Jordan das Thema der endlichen Gruppen linearer Substitutionen allgemein für n Variable in Ansatz gebracht**). Sei G eine solche Gruppe, so enthält sie sicher Substitutionen s, welche die (homogenen) Variabeln nur um gewisse Einheitswurzeln als Factoren ändern. Es werden nun der Reihe nach die mit einer Substitution s vertauschbaren Untergruppen F von G durch alle Substitutionen von G transformirt. Zwischen den Ordnungen aller dieser F und derjenigen von G besteht eine diophantische Gleichung.

Die Discussion der letzteren liefert für n = 2 wiederum die fünf bekannten Typen. Allein schon im nächsten Falle n = 3 ist eine übergrosse Anzahl von Fällen im einzelnen zu erledigen. Schliesslich bleiben eilf verschiedene Typen als wirklich existirende übrig, von denen indessen nur einer als wesentlich neu zu erachten ist, da die übrigen

---

*) Hilbert hat nachgewiesen (Math. Ann. XXX S. 561—570 (1887)), dass die binären Formen mit linearen Transformationen in sich auch als besonderer Fall einer umfassenderen Formenklasse erhalten werden. Letztere ergiebt sich, wenn man nach solchen Büscheln $\varphi + \lambda\psi$ fragt, für welche die dritte Ueberschiebung von φ über ψ identisch verschwindet.

Bei Gordan-Kerschensteiner II § 13 findet sich eine elegante Erzeugung der „regulären Körper“ von den quadratischen Formen aus. Es wird ein System von letzteren gesucht, derart, dass entweder alle bilinearen Ueberschiebungen zu je zweien verschwinden, oder aber einen gemeinsamen, von Null verschiedenen Wert besitzen, oder endlich einen, bis auf das Vorzeichen gemeinsamen Wert. Im ersten Falle gelangt man zu drei quadratischen Formen, deren Product das „Oktaeder“ bildet, im zweiten zu vier, deren Product der „Würfel“ ist, im dritten endlich zu sechs, durch deren Multiplication das „Ikosaeder“ entsteht.

**) C. R. LXXXIV S. 1446—1448, Journ. f. Math. LXXXIV S. 85—215 (1877). Eine Revision und Weiterführung giebt der Verf. in seiner Preisschrift Atti di Napoli VIII (1880). „Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.“

Eine Bestätigung der Einzel-Resultate im Falle n = 3 auf anderem Wege war wünschenswert, da bei dem Jordan'schen Abzählungsverfahren Beobachtungsfehler unvermeidlich sind. Eine solche liegt, abgesehen von einzelnen Abweichungen, vor bei Valentiner, Kjöb. Skrift (6) V S. 64—235 (1889), der die Gruppen direct durch rein algebraische Betrachtungen (unter Hinzunahme einfacher diophantischer Gleichungen) herleitet.

Die Fuchs'sche Eigenschaft der Primformen wird bei Jordan auf Differentialgleichungen höherer als der 2. Ordnung ausgedehnt. So erhält man bei der 3. Ordnung den Satz, dass eine Primform Wurzel ist aus einer rationalen Function von x und einer zu adjungirenden Hülfsgrösse, die selbst von einer algebraischen Gleichung n ter Ordnung abhängt (n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9).

entweder trivialer Natur sind oder aber in Wirklichkeit zu Gruppen von 2 resp. 1 Variabeln gehören*).

Die gemeinte neue Gruppe ist die sogenannte Hesse'sche G_{216} (von 216 Substitutionen), mit der Eigenschaft**), die von Hesse zuerst studirte Configuration der vier Wendedreiseite einer ebenen Curve dritter Ordnung als Ganzes unverändert zu lassen.

Indessen hatte Jordan in Folge eines Rechenfehlers eine weitere, ebenfalls wesentlich neue Gruppe G_{168} (von 168 ternären Substitutionen) übersehen, die zuerst Klein von der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen her entdeckte***). Die zugehörige Galois'sche Resolvente (168. Ordnung) besitzt nämlich eine Gruppe von 168 Substitutionen, da eine Wurzel η derselben, als Function des Periodenverhältnisses ω betrachtet, gerade bei denjenigen 168 Substitutionen von ω ungeändert bleibt, welche mod. 7 zur Identität congruent sind. Die Grösse η ist mit der absoluten Invariante J des elliptischen Integrals durch eine Gleichung (168. Ordnung in η) verbunden, welche vom Geschlecht drei ist, und ebenfalls 168 eindeutige Transformationen in sich zulässt. Diese Gleichung lässt sich wiederum eindeutig beziehen auf diejenige einer „Normalcurve 4. Ordnung“: $f \equiv x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$, welche durch eine zu der oben erwähnten isomorphe Gruppe G_{168} von ternären Collineationen in sich übergeht.

Das volle System von f und damit zugleich der Gruppe besteht, ausser f, noch aus drei Covarianten 6., 14., 21. Ordnung, zwischen denen eine Syzygie besteht.

Dass die Galois'sche Resolvente eine Resolvente 7ter und 8ter Ordnung besitzt, ist geometrisch einfach zu übersehen. Einmal können die 56 Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten von f durch 7 Kegelschnitte†)

---

*) Dies schliesst nicht aus, dass derartige „übernommene“ Gruppen für die Geometrie von Wichtigkeit sind. Es sei etwa an die Gruppe von 18 Collineationen erinnert, die eine ebene Curve 3. Ordnung in sich überführen; oder an diejenige der 16 Collineationen (und 16 reciproken Umformungen), die dasselbe für die Kummer'sche Fläche leisten. Hierher gehört auch, dass, wie Hurwitz nachgewiesen hat (Gött. Nachr. 1887 S. 85—107), alle Gruppen von Transformationen, die eine ebene algebraische Curve (vom Geschlecht $p > 1$) in sich überführen, vermöge eindeutiger Transformation auf die Normalform von unären Substitutionen gebracht werden können, d. i. solchen, die nur eine Variable ändern (und zwar um eine Einheitswurzel als Factor).

**) Die Hesse'sche Gruppe ist eingehend von Maschke untersucht worden, Math. Ann. XXXIII S. 324 u. ff. (1889).

***) Math. Ann. XIV S. 428—471, siehe insbes. die Anm. auf S. 438 (1879). Die Theorie der G_{168} ist ausführlich behandelt in Klein-Fricke's Modulfunctionen, Absch. III, Cap. 6.

†) Dies ist auf zwei Weisen möglich. Die gegenseitige Beziehung

ausgeschnitten werden, welche von einer Gleichung 7. Ordnung abhängen. Sodann ordnen sich die 24 Wendetangenten von f zu 8 Dreiseiten zusammen, die ihrerseits durch eine Gleichung 8.*) Ordnung bestimmt werden.

Umgekehrt lässt sich jede Gleichung 7. Ordnung mit einer Gruppe von 168 Substitutionen auf den obigen Fall zurückbringen und damit auch durch elliptische Functionen lösen, wie Klein angegeben und Gordan ausführlich entwickelt hat**).

Die endlichen Gruppen quaternärer (und höherer) Substitutionen sind in ihrer Gesamtheit noch nicht bekannt. Indessen ist Klein neuerdings, von verschiedenen Seiten her, auf einige bedeutungsvolle Beispiele quaternärer Gruppen gestossen.

Zwei solcher Gruppen bilden den Kern der Auflösungsmethode, welche Klein für die allgemeinen Gleichungen 6. und 7. Ordnung gefunden hat***).

Man denke sich nämlich vorab die Gleichungen auf die „Hauptform" gebracht, in der die Coefficienten der zweit- und dritthöchsten Potenz der Unbekannten verschwinden, d. h. wo sowohl die Summe der Wurzeln x, als auch die Summe von deren Quadraten Null ist.

Die x lassen sich nun auffassen als die Liniencoordinaten der Geraden eines bestimmten linearen Complexes resp. der Geraden überhaupt eines gewöhnlichen Raumes.

Werden jetzt die x im Falle der 6. Ordnung allen 6! Vertauschungen, resp. im Falle der 7. Ordnung allen $\frac{1}{2} \cdot 7!$ geraden Vertauschungen unterworfen, so erfahren die Punktcoordinaten des Raumes lineare Transformationen der gleichen Anzahl, und die letzteren bilden die beiden gemeinten endlichen Gruppen. Die vorgelegten Gleichungen werden dann auf die diesen Gruppen zugehörigen „Gleichungssysteme" reducirt.

Eine dritte wichtige (quaternäre) Gruppe ist von Klein bei Gelegen-

---

zwischen den Wurzeln der zwei entsprechenden Gleichungen 7. Ordnung bildet bei Gordan den Kern der Theorie.

*) Vgl. Noether, Math. Ann. XV S. 89—110 (1879).

**) Gordan in den Math. Ann. XVII S. 217—233 (1880), 359—378 (1880), XIX S. 529—552 (1882), XX S. 487—514, S. 515—530 (1882), XXV S. 459 bis 521 (1885).

Die Riemann'sche Fläche der Normalcurve f = 0 ist von Haskell im Amer. J. XIII S. 1—52 (1890) genauer studirt worden. (Es handelt sich hier um die von Klein in Math. Ann. VII, X angegebene „neue" Art von Riemann'schen Flächen, die sich aus den reellen Punkten der imaginären Curventangenten ergiebt.)

***) Math. Ann. XXVIII S. 499—532 (1887). Vgl. Cole im Amer. J. VIII S. 265—286 (1886).

Die zweitgenannte Gruppe ist liniengeometrisch genauer von Maschke studirt worden (1890), Math. Ann. XXXVI S. 190—215. Dieselbe führt zu einer merkwürdigen Configuration von 140 Geraden im Raume.

heit liniengeometrischer*) Untersuchungen aufgestellt worden. Bezieht man die Geraden des Raumes auf sechs „Fundamentalcomplexe“ $x = 0$ (wo wiederum $\Sigma x^2 = 0$ ist), so bewirkt jede der 6! Permutationen der x und jeder der 64 Zeichenwechsel der x eine Collineation oder dualistische Umformung des Raumes: sämtliche hieraus resultirenden Vertauschungen der Verhältnisse der x erzeugen eine endliche Gruppe von 32.6! Substitutionen, eine „Erweiterung“ der soeben bei den Gleichungen 6. Ordnung betrachteten Gruppe.

Eine Untergruppe dieser Gruppe von 16.6! Collineationen stimmt überein mit derjenigen**), welche die von Borchardt für die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 eingeführten „Moduln“ bei linearer Transformation der Perioden erfahren.

Sie besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe von 64 Substitutionen.

Maschke***) hat das volle Formensystem der Gruppe aufgestellt.

Waren die Borchardt'schen Moduln als Jacobi'sche Functionen 2. Ordnung anzusehen, so giebt es auch solche von der 3. Ordnung, die ein analoges Verhalten zeigen, wie Klein bemerkt und Witting†) weiter ausgeführt hat; sie führen zu einer neuen quaternären Gruppe von 25920 Collineationen. Maschke hat bewiesen, dass diese Gruppe selbst wieder in einer solchen von doppelt so viel Substitutionen enthalten ist, und hat auch für diese letztere (die selbst in keiner umfassenderen Gruppe enthalten sein kann) das volle System berechnet††). Es gelingt das dadurch, dass man durch Nullsetzen einer geeigneten der 4 Variabeln zur Hesse'schen G_{216} zurückgelangt.

Die in Rede stehende Gruppe ist einerseits isomorph mit der Gruppe der Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, andererseits mit derjenigen der Gleichung 27. Ordnung, von der die 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängen†††).

Indem wir hiermit die endlichen Substitutionsgruppen verlassen, gehen wir, was die Gruppen mit willkürlichen Parametern anlangt, nur noch kurz auf eine Untersuchung von Maurer ein, da sie direct an die Eingangs des Abschnittes angeregte Frage anknüpft und überdies durch ihre

*) Math. Ann. IV S. 346—358 (1871).

**) Vgl. Reichardt, Math. Ann. XXVIII S. 84—98 (1887).

***) Math. Ann. XXX S. 496—515 (1887).

†) Math. Ann. XXIX S. 157—170 (1887), cf. Reichardt, ebenda XXVIII S. 84—98 (1887).

††) Math. Ann. XXXIII S. 317—344 (1889).

†††) Jordan, Traité des Substitutions. 1871.
Wegen des Zusammenhanges der beiden Probleme vgl. Klein 1888, Journ. de Math. (4) IV S. 169—177, und Burckhardt, Gött. Nachr. 1892, S. 1—5.

Methode bemerkenswert ist, indem sie die Lie'sche Behandlung „vollständiger Systeme" von gewissen linearen Differentialgleichungen zu den Weierstrass'schen Elementarteilern in Beziehung setzt.

Soll vermöge einer Substitution eine Form*) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ identisch übergehen in $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, so ist damit ein System S von algebraischen Gleichungen constituirt, denen die Substitutionscoefficienten genügen müssen.

Unter den durch S definirten irreducibeln Gebilden befindet sich stets genau eines**), welches die identische Substitution enthält: die zugehörige Gruppe ist es, welche hier allein in Betracht kommt.

Nach Aronhold wird die Identität $f(x) \equiv f(y)$ in ein vollständiges System linear unabhängiger Differentialgleichungen umgesetzt.

Hieraus wird das wichtige Ergebnis gewonnen, dass eine, m unabhängige Parameter enthaltende Substitution aus ebensoviel „elementaren", d. i. von nur einem Parameter abhängenden, zusammengesetzt werden kann. Die Untersuchung solcher elementaren Gruppen basirt auf den Eigenschaften der Elementarteiler der „Fundamentaldeterminante"

$$|c_{11} - r, \quad c_{12}, \quad c_{13}, \ldots, c_{1n}|,$$

wo die c durch die Zusammensetzung der Gruppe bestimmte Zahlen sind. Es existiren zwei***) ausgezeichnete Zahlensysteme c, für die jener Parameter rational eingeht; alle andern Fälle kommen hierauf zurück.

Man gewinnt so das Kriterium†), dass die Form f m linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_\lambda \sum_\mu c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

zu genügen hat, wo die c ausgezeichnete Systeme einer der beiden Arten sind.

Im Falle der gewöhnlichen Invarianten ist offenbar $m = n^2$, d. i. gleich der Anzahl der willkürlichen Substitutionscoefficienten††).

---

*) Das Nachfolgende bleibt gültig, wie Maurer hervorhebt, auch wenn f überhaupt eine rationale (und homogene) Function der x ist.

**) l. c. S. 107.

***) Entweder ist dann die Fundamentaldeterminante der c gleich r_n, oder sie hat nur Elementarteiler erster Ordnung und überdies nur ganzzahlige Wurzeln. Vgl. S. 121. Der Satz ist vom Verf. bereits in seiner Dissertation (Strassburg 1887) aufgestellt und bewiesen.

†) S. 138.

††) In einer weiteren Abhandlung (Journ. für Math. CVII S. 89—116 (1890)) hat Maurer seine Untersuchungen auf nicht-lineare Transformationen der Variabeln ausgedehnt.

II. Formenverwandtschaft.

A) Endlichkeitsfragen.

a) Allgemeines.

Nach Erledigung der Aequivalenzprobleme liegt es uns ob, auf die mannigfaltigen algebraischen Beziehungen zwischen den invarianten Bildungen einzugehen, welche aus einer vorgelegten Urform oder auch aus einer Reihe von solchen entspringen.

Berücksichtigen wir in erster Linie die ganz-rationalen Bildungen, so lässt sich die neuere Periode (seit 1868) in dieser Richtung geradezu dadurch charakterisiren, dass sich ein bestimmtes Problem („Endlichkeitsproblem") in den Vordergrund gedrängt hat.

Im Sinne der neueren Algebra erhebt sich in der That als vornehmste Frage, ob der aus gewissen Stammformen durch Anwendung von invariantiven Processen ableitbare Formenkreis ein „Integritätsbereich" *) sei, d. h. ob stets eine endliche Anzahl von Individuen desselben sich derart herausgreifen lasse, dass aus ihren Potenzen und Producten jedes weitere Individuum des Bereiches mittels rein numerischer, rationaler Zahlenfactoren linear zusammengesetzt werden kann?

Und im Bejahungsfalle, welche Mittel erforderlich sind, um jene endliche Anzahl von Individuen, die*) „Basis" oder „das volle System der Grundformen" des Bereiches, im einzelnen Falle in concreto herzustellen?

Diese Fragen gehen auf Cayley zurück**) (II. Memoir, 1856). Nachdem er und Sylvester schon vordem im einzelnen nachgewiesen, dass einer binären Form, bis zur vierten Ordnung incl., ein volles System von Grundformen zukommt, nimmt er hier die binären Formen allgemein in Angriff. Mit Hülfe von Betrachtungen, die sich auf den Ausdruck für das „Gewicht" einer In- resp. Covariante stützen, macht er die Lösung der Frage von einem gewissen Systeme linearer diophantischer Gleichungen abhängig. Unter der Annahme der Unabhängigkeit derselben gelangt er zu dem Schlusse, dass die Frage nach der Endlichkeit für Formen von höherer

---

*) Vgl. Kronecker's „Festschrift" (1882) S. 14. Das Wort „Basis" wird im Text in modificirtem Sinne gebraucht. Die Bezeichnung „(volles) System von Grundformen" oder kurz: „(volles) System" stammt von Gordan, Journ. f. Math. LXIX S. 343 (1868); S. 346 ebenda heisst es „System von Fundamentalformen".

Freilich existiren auch Integritätsbereiche ohne endliche Basis (vgl. z. B. Hilbert Gött. Nachr. 1891 S. 232, 233); solche sind aber im folgenden ausgeschlossen.

**) Collected Papers Vol. II S. 250—275.

Vgl. dazu die Bemerkungen von Cayley selbst im IX. „Memoir" Phil. Trans. CLXI S. 17—50 (1870).

als der vierten Ordnung zu verneinen sei. Indessen hat sich späterhin jene Annahme als unzulässig erwiesen. (Vgl. unten bei II. A, d.)

P. Gordan*) wies zuerst (1868) die Endlichkeit des zu einer allgemeinen binären Form f gehörigen Formenkreises nach. Der Beweis ist (auch in den späteren, vereinfachten Fassungen) umständlich, liefert aber dafür unmittelbar praktische Methoden, um die existirenden vollen Systeme wirklich anzugeben resp. zu begrenzen. Im allgemeinen nämlich werden dieselben noch überflüssige Individuen aufweisen; indessen gelingt im Falle der fünften und sechsten Ordnung die Reduction auf ein möglichst kleines System von 23 bez. 26 Grundformen**). (Vgl. unten bei II. A, b.)

Die Kraft der Beweismethode beruht wesentlich auf der Aronhold-Clebsch'schen symbolischen Darstellung der In- und Covarianten von f, sowie auf der fundamentalen Rolle, welche unter den letzteren die von Cayley eingeführten Ueberschiebungen spielen.

Das zeigt sich sogleich an einem recurrirenden Gesetze***), welches der ganzen Entwickelung zu Grunde gelegt wird. Darnach ist jedes symbolische Product, von irgend einem Grade m in den Coefficienten von f, und damit auch jede wirkliche invariante Form dieses Grades eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von Formen, die mittels Ueberschiebung von Formen (m — 1)ten Grades mit f gebildet sind.

Man wird demnach diese Ueberschiebungen in der Weise anordnen, dass man die zweiten Ueberschiebungen von f mit sich selbst voranstellt, die so entstehenden Ausdrücke von neuem 0, 1, 2, ... mal mit f überschiebt, u. s. f.

Lässt man unter dieser unbegrenzten Formenreihe alle diejenigen fort, welche bereits durch früher hingeschriebene linear ausdrückbar sind, und nennt die übrig bleibenden T, so lässt sich darthun, dass überhaupt jede Form von f, und zwar nur auf eine Weise, eine ganze lineare Function solcher Bildungen T ist†). Dadurch kommt die Aufgabe darauf zurück, für die T ein volles System zu ermitteln††).

Man nehme an, dass ein solches volles System bereits für eine

*) Journ. für Math. LXIX S. 323—354 (1868). Nach mündlicher Mitteilung ist Gordan zur Lösung der vorliegenden Frage von C. Jordan veranlasst worden. Vgl. die Darstellung, welche Cayley von dem Gordan'schen Beweisverfahren gegeben hat. IX. Mem. Trans. of London 1870, siehe insbes. S. 45—50.

**) l. c. S. 343 bez. 346.

***) l. c. S. 327. Darin liegt überhaupt ein wesentlicher Fortschritt gegenüber der complicirteren englischen Symbolik.

†) l. c. S. 328.

††) l. c. S. 333.

Originalform f′ von der Ordnung n—1 gefunden sei, so ist leicht zu sehen, dass jeder Form von f′ eine ganz bestimmte Form von f correspondirt, und man kann sich von neuem auf die nunmehr noch restirenden Formen von f beschränken.

Von diesen wird nachgewiesen, dass sie erhalten werden, wenn man die zweiten Ueberschiebungen von f mit sich selbst genügend oft mit jenen aus f′ herübergenommenen Formen überschiebt*); je nach der Höhe jener zweiten Ueberschiebungen werden sie in verschiedene Klassen eingeteilt, und dann für jede einzelne der Klassen mittels scharfsinniger Ueberlegungen combinatorischen Charakters die Existenz eines vollen Systems abgeleitet.

Gordan hat bald darauf den Satz auf ein System**) binärer Stammformen, auf die „Combinanten“ eines solchen Systems von Formen gleicher Ordnung, wie auch auf die niedrigsten ternären***), ausgedehnt und hat seitdem an der Vereinfachung des Beweisverfahrens unablässig weiter gearbeitet.

Die simultane Einführung mehrerer Urformen bringt sogar eine principielle Erleichterung mit sich. Es lässt sich nämlich mit verhältnismässig einfachen Mitteln der weittragende Satz beweisen, dass, sobald jedes von zwei Formensystemen eine endliche Basis besitzt, das Entsprechende auch von dem „combinirten“†) Systeme gilt, welches entsteht, wenn man irgend welche Producte von Individuen des einen Systems über irgend welche Producte von denen des andern überschiebt. Dies findet seine unverzügliche Anwendung auf die beiden oben erwähnten Systeme (der von f′ übernommenen Formen und der zweiten Ueberschiebungen von f mit sich selbst).

Das Gordan'sche „Programm“††) von 1875 bietet mannigfache Fortschritte. Die ausschliessliche Benützung des Ueberschiebungsprocesses hatte die erschwerende Einführung einer grossen Reihe neuer Symbole zur Folge. Dieser Missstand wird wesentlich eingeschränkt durch den

*) l. c. S. 339.

**) Math. Ann. II S. 227—280 (1870), V S. 595—601 (1872). Wegen der Combinanten s. Math. Ann. V S. 95—122 (1872).

***) Für eine kubische ternäre Form Math. Ann. I S. 90—128 (1869), für zwei quadratische in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 291 (1875). Vgl. die nähere Ausführung Math. Ann. XIX S. 529—551 (1882).

†) Math. Ann. V S. 595.

Das Princip „der combinirten Systeme“ hat später Mertens auf einzelne Klassen von ternären und quaternären Formen ausgedehnt: Wien. Ber. XCV (1887) u. flgd. Bände. Vgl. Gordan's bez. Bemerkung „Programm“ S. 50.

††) Leipzig, bei Teubner. Vgl. das durchsichtige Referat von Noether, Fortschritte der Math. VII S. 50—52.

nunmehr zu Grunde gelegten Process der „Faltung“, eine symbolische Verallgemeinerung der Ueberschiebung, der zugleich einen organischeren Aufbau des Formensystems ermöglicht*).

Der Ausgestaltung der Symbolik steht das unsymbolische Verfahren der „Reihenentwickelung“**) ergänzend zur Seite. Eine Form in zwei nicht homogenen Variabeln x, y lässt eine endliche Entwickelung nach Potenzen von $x-y$ derart zu, dass die Coefficienten Polaren von Formen werden, welche nur noch die Variable x enthalten.

Nun ist bei zweimaliger Anwendung des Verfahrens auf eine Form mit drei Variabeln x, y, z ein Wechsel in der Reihenfolge statthaft: durch Gleichsetzung der Endergebnisse resultiren fruchtbare Relationen zwischen symbolischen Producten, die durch rein symbolische Umformungen nur schwer zu erlangen gewesen wären. Das gesuchte „volle System“ zerlegt sich in eine Reihe bedeutend einfacherer, die weiterhin noch unter einander zu combiniren sind.

Von den durch Combinirung erwachsenden Formen können alle diejenigen bei Seite gelassen werden, die nicht ein gewisses System diophantischer Gleichungen erfüllen. Sämtliche Lösungen der letzteren (in positiven ganzen Zahlen) können aber aus einer endlichen Anzahl solcher mittels beliebiger positiver, ganzzahliger Factoren linear componirt werden. (Vgl. den graphischen Beweis von Petersen in II. C, a.)

Die Ausführung für binäre Stammformen von höherer als der sechsten Ordnung wird so weit zubereitet, dass von Gall***) später behufs expliciter Aufstellung der, einer Form siebenter und achter Ordnung zugehörigen Grundformen direct an die Gordan'schen Systeme anknüpfen konnte.

Die meisten der angewandten Hülfsmittel, vor allem die Reihenentwickelungen, bleiben bei geeigneter Modification auch für ternäre und höhere Formen gültig†).

Wenn trotzdem ein analoger Endlichkeitsnachweis für beliebige höhere Formen auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst, so liegt das daran, dass die symbolischen Ausdrücke in ihrer Gesamtheit nicht mehr übersehen werden können; zudem treten, von den quaternären Formen incl. an, symbolische Determinantenfactoren ein, die mehrere „Symbolstämme“ in sich vereinigen und daher in schwer zu übersehender Art von einander abhängen.

---

*) Hierzu dienen insbesondere noch die durch den Faltungsprocess involvirten Hülfsbegriffe „Stufe, Rang und Dimension“, S. 3—6.

**) l. c. S. 7.

***) Math. Ann. XVII (1880), XXXI (1888). Cf. II. A, b.

†) l. c. § 19.

Der Beweis, wie ihn Gordan's „Vorlesungen"*) für eine binäre Form f geben, gestaltet sich insofern übersichtlicher, als dem Begriff eines vollen Systems derjenige eines „relativ vollständigen" übergeordnet wird, d. i. eines solchen, aus dem bei beliebiger „Faltung" (Ueberschiebung)**) immer nur derartige Formen hervorgehen, die, bis auf Glieder, welche mit einer gewissen Potenz eines „Klammerfactors" multiplicirt erscheinen, von den Systemformen ganz-rational abhängen.

Damit werden unter anderem die früheren complicirten Reihenentwickelungen überflüssig. Daneben wird in praxi ein ausgiebiger Gebrauch von den sogenannten „Reducenten"**) gemacht, d. i. von solchen Factoren symbolischer Producte, welche die Zurückführbarkeit der letzteren auf Bildungen niedrigeren Charakters unmittelbar erkennen lassen.

Der Schwerpunkt des Beweises selbst liegt in folgendem.

Eine Co- oder Invariante von $f = a_x^n = b_x^n = \cdots$ lässt sich als symbolisches Product stets so schreiben, dass die höchste Potenz eines Klammerfactors, etwa (ab), eine gerade ist. Daraufhin kann man alle aus f abgeleiteten Formen in $g + 1$ Klassen $A_0, A_1, \ldots, A_g$ einteilen, wo $g = \frac{n}{2}$ resp. $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und wo jede Klasse alle früheren umfasst. Die erste Klasse A_0 enthält f allein, die zweite A_1 alle***) Formen, welche keinen Klammerfactor in einer höhern als der zweiten Potenz aufweisen; für die dritte A_2 ist diese maximale Potenz die vierte u. s. f. bis zur letzten A_g, welche offenbar mit der Gesamtheit aller Formen von f übereinstimmt. Es kommt darauf an, successive zu zeigen, dass jede dieser Klassen für sich eine endliche ist, d. i. ein volles System besitzt.

Dies wird durch Construction von g endlichen, den $A_0, A_1, \ldots, A_{g-1}$ parallel laufenden Hülfssystemen $B_0, B_1, \ldots, B_{g-1}$ geleistet, mit der Eigen-

---

*) Leipzig, bei Teubner. Herausgegeben von Kerschensteiner. I. Determinanten 1885. II. Binäre Formen 1887.

Der Beweis findet sich in II § 20, 21. Die Reducenten werden schon im „Programm" von 1875 (§ 8) mit Vorteil eingeführt.

**) Die Faltung ist im wesentlichen als eine auf symbolische Producte übertragene Ueberschiebung anzusehen.

***) Die Klasse A_1 setzt sich für alle Ordnungen (excl. $n = 4$) zusammen aus den Bildungen: f, $(f, f)^2$, $\{f, (f, f)^2\}$. Ist die Bedingung $(f, f)^4 = 0$ identisch erfüllt, so stellt A_1, bis auf eine noch hinzutretende Invariante, bereits das volle System von f dar. Dies ist für die Theorie der regulären Körper von Wichtigkeit, cf. I. B, b.

schaft, dass stets ein System A_{k+1} dadurch*) hervorgeht, dass man das vorangehende System A_k mit dem zugeordneten B_k überschiebt. Mit Rücksicht auf die Endlichkeit von $A_0 = f$ würde sich so in der That der Reihe nach die Endlichkeit von A_1, A_2, ... und schliesslich von A_g selbst ergeben.

Diese Hülfssysteme B_i gewinnt man mittels der g Covarianten φ_i zweiten Grades von f, wo $\varphi_i = (f, f)^{2i+2}$. Solange die Ordnung einer solchen Form φ_i noch nicht unter die Zahl n heruntergesunken ist, bilde man die Individuen des Systems B_i aus φ_i symbolisch genau so, wie die Individuen des Systems A_i aus f selbst. Sobald aber die Ordnung von φ_i kleiner als n ausfällt (also jener Process nicht mehr durchführbar wäre), besteht das System B_i einfach aus dem (als endlich voraussetzbaren) vollen System von φ_i.

Die Systeme einer Form fünfter und sechster Ordnung gestatten jetzt einen eleganten Aufbau**).

Da bei all diesen Beweisen für die Stammformen die symbolische Schreibweise zu Grunde gelegt wird, so müssen jene auch als „allgemeine" ihrer Art vorausgesetzt werden, deren Coefficienten also als unabhängige Variabeln anzusehen sind. Das Entsprechende gilt von den auszuübenden Substitutionen.

Die gewonnenen Ergebnisse erlauben eine unmittelbare Uebertragung auf binäre Formen, welche mehrere Reihen von (homogenen) Veränderlichen enthalten, vorausgesetzt, dass die letzteren den nämlichen Substitutionen unterliegen. Denn auf Grund des Princips der Reihenentwickelung hat man nur ein solches volles System zu ermitteln, welches zu einer vermehrten Anzahl von Stammformen gehört, die aber sämtlich nur noch eine einzige (und zwar ein und dieselbe) Variabelnreihe aufweisen.

---

*) Beim Beweise dieses Hülfssatzes äussert der Begriff der „relativ vollständigen" Systeme seine Kraft. Denn A_k ist seiner Definition nach relativ vollständig mod. $(ab)^{2k+2}$, während B_k es ist mod. $(ab)^{2k+4}$. Durch Ueberschiebung beider Systeme resultirt aber — und hier sind die eigentlichen Schwierigkeiten verborgen — ein mod. $(ab)^{2k+4}$ relativ vollständiges Covariantensystem von f (das als niedrigsten Modul $(ab)^{2k+4}$ wirklich besitzt), d. i. das System A_{k+1}.

**) Für beide Formen ist gleichmässig $A_0 = f$, $B_0 = (f, f)^2$; $A_1 = f$, $(f, f)^2$, $\{f, (f, f)^2\}$. Bei der f_5 ist $\varphi_1 = (f, f)^4$ eine quadratische Form, mithin besteht B_1 aus φ_1 und deren Discriminante. Die Ueberschiebungen von A_1 über B_1 liefern das volle System (cf. l. c. S. 237).

Die Form φ_1 einer f_6 ist eine biquadratische, mithin besteht B_1 aus dem vollen System von φ_1. Die Ueberschiebungen von A_1 mit B_1 führen zu A_2, und da $\varphi_2 = (f, f)^6$ eine Invariante ist, so sehen wir in A_2 nebst φ_2 das volle System von f_6, cf. l. c. S. 275.

Indessen kann man, wie Peano 1881*) gezeigt hat, ohne zu wesentlich neuen Hülfsmitteln zu greifen, den Endlichkeitsnachweis auch in dem allgemeineren Falle führen, dass die auf die verschiedenen Variabelnreihen x_1, x_2; y_1, y_2; ... auszuübenden Substitutionen ganz oder teilweise von einander unabhängig sind.

Die vorgegebenen Stammformen f, g, ... mögen, nach den x_1, x_2 entwickelt, die Coefficienten f_i, g_k, ... besitzen. Unter der Annahme, dass die letzteren Formen (in denen eine Variabelnreihe weniger auftritt) eine Basis zulassen, soll das Nämliche für die ursprünglichen f, g, ... abgeleitet werden. Sei jetzt F eine invariante Form der f, g, ... die, ebenfalls nach Potenzen der x_1, x_2 geordnet, die Coefficienten F_i habe, so ist unschwer zu erkennen, dass die F_i dem Systeme der f_i, g_k, ... angehören.

Nunmehr wende man auf jede der Urformen f, g, ... den Polarenprocess $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2$ genügend oft an, so entsteht ein System von Bildungen f, Δf, $\Delta^2 f$, ...; g, Δg, $\Delta^2 g$, ...; ..., welches dasjenige der f_i, g_k, ... völlig zu vertreten im Stande ist, in der Art, dass jede Grundform P des letzteren Systems für eine bestimmte Grundform P′ des ersteren zum Modell dient. Bei der üblichen Entwickelung von P′ nach Potenzen von $x_1 y_2 - x_2 y_1$ erscheinen als Coefficienten Polaren von Formen φ, ψ, χ, ...; die Vergleichung der P mit den P′ lehrt dann, dass auch der Gesamtheit der φ, ψ, χ, ... eine Basis zukommt.

Da sich endlich in binärem Sinne, d. i. bezüglich der x_1, x_2, F als eine invariante Form der φ, ψ, χ, ... darstellen lässt, so ist damit auch das System der F als ein endliches erwiesen.

Der Satz findet eine wichtige Anwendung auf die sogenannten „Correspondenzen"**).

In neuester Zeit ist Gordan zu dem nämlichen Resultate auf directem Wege gelangt, mittels Einführung des wichtigen Begriffs eines „erweiterten" Formensystems***). Um dasselbe für den einfachsten Fall einer

---

*) Atti di Torino XVII S. 73—80.

**) Vgl. dazu noch die besondere Arbeit Peano's Batt. G. XX S. 79 bis 101 (1882). Die Correspondenzen sind durch doppelt-binäre Formen dargestellt, deren Variable von einander unabhängigen Substitutionen unterworfen werden.

***) Erlanger Ber. 1887, Math. Ann. XXXIII S. 372—389 (1888). Für quadratische Formen war zuvor der Satz nebst zugehörigem System von Study aufgestellt worden, der dadurch Gordan zur Untersuchung der allgemeinen Frage angeregt hatte (vgl. Study, Erl. Ber. 1887 S. 385—388).

einzelnen (binären) Form f aufzustellen, denke man sich das volle System einer beliebigen Anzahl von Formen $f_1, f_2, \ldots$, die sämtlich von gleicher Ordnung mit f sind, bereits gebildet, und zwar in Gestalt von (genügend oft wiederholten) Ueberschiebungen der f_i übereinander. Hieraus geht durch blosse Weglassung der Indices i, k, ... das erweiterte System von f hervor. Vermöge seiner Herleitung kann das letztere unmittelbar dazu dienen, sowohl die simultanen Systeme einer Reihe von binären Stammformen mit einer einzigen Variabelnreihe abzuleiten, wie auch diejenigen für mehrere Variabelnreihen, die unabhängigen Substitutionen unterliegen. So ergiebt sich für eine in zwei incogredienten Variabelnreihen x_1, x_2; y_1, y_2 quadratische Form ein volles System von 38 Bildungen, die explicite berechnet werden.

Hieran möge die Erwähnung eines in anderer Richtung liegenden Fortschritts geknüpft werden, den man ebenfalls Peano*) verdankt (1882).

Nach Clebsch**) besitzen die In- und Covarianten einer Reihe von linearen, wie auch quadratischen binären Formen die Eigenschaft, in eine Anzahl von „Typen" zerlegt werden zu können, sodass die Individuen ein und desselben Typus aus einander durch ausschliessliche Benützung des Aronhold'schen Processes, d. i. durch Polarisation nach den Coefficienten erwachsen; dabei bleibt die Anzahl dieser Typen eine endliche, wie gross auch die Anzahl der vorgelegten Formen werden möge.

Peano erbringt die Verallgemeinerung auf Reihen von Formen beliebigen (aber gleichen) Grades. Der Beweis stützt sich vornehmlich darauf, dass man einem Satze von Capelli***) zufolge irgend eine ganze, homogene Function F der $n+1$ Reihen von je $n+1$ als variabel gedachten Coefficienten, die zu $n+1$ Formen $n$ten Grades gehören, nach Potenzen von deren Determinante entwickeln kann, wobei die hinzutretenden Factoren Polaren von aus F abgeleiteten Formen sind, welche ein Coefficientensystem weniger enthalten.

Im Falle der kubischen Formen wird die Rechnung durchgeführt; es entstehen zehn Typen, und es wird zugleich angegeben, wie sich die Formen des vollen Systems auf dieselben verteilen.

Wir sind jetzt bei einem Wendepunkte der Entwickelung angelangt. Während die bisher erörterten Endlichkeitsbeweise stets zugleich die wirkliche Bildung der bezüglichen vollen Systeme in's Auge fassten, lässt man nunmehr den letzteren, mehr praktischen Gesichtspunkt zurücktreten, und

*) Atti di Torino XVII S. 580—586.
**) Siehe z. B. bei Clebsch: Binäre Formen, § 58.
**) Batt. G. XX S. 293—301 (1882).

das Interesse concentrirt sich auf die reine*) Theorie der Endlichkeit. Damit steht im Zusammenhange, dass die neu heranzuziehenden Methoden einen ausgesprochen unsymbolischen Charakter an sich tragen, wodurch das begriffliche Moment schärfer ausgeprägt wird.

Der erste Anstoss in dieser Richtung erfolgt durch den Beweis, welchen Mertens**) für die Endlichkeit eines binären Formensystems mit einer Variabelnreihe liefert.

Da eine Reihe von Linearformen stets ein volles System von abgeleiteten Formen besitzt, so kann der erforderliche Nachweis für eine beliebige Reihe von Originalformen (g, f′, f″, ...) unter der Annahme geführt werden, dass der in Rede stehende Satz bereits für die Reihe (f, f′, f″, ...) gültig sei, wo die Ordnung der Form f um eine Einheit geringer ist, als diejenige von g.

Zunächst lässt sich aus der getroffenen Annahme die Folgerung ziehen, dass auch der, mittels einer Linearform p erweiterten Reihe (p, f, f′, f″, ...) ein volles System eignet.

In dem letzteren ist als ein volles „Untersystem“ der Kreis aller der Bildungen enthalten, welche in den Coefficienten von p und f jeweils zu gleichem Grade ansteigen. Denn diese Bildungen werden durch die Gesamtheit der positiven Lösungen einer gewissen diophantischen Gleichung bestimmt, welche sich indessen aus einer endlichen Anzahl von ihnen mittels (ganzzahliger) positiver Coefficienten linear aufbauen lassen.

Denkt man sich nun die Form f in ihre Linearfactoren q, r, s, ... gespalten, und vertauscht man die Linearform p succ. mit q, r, s, ..., so ergiebt sich durch symmetrische Combinirung der so entstehenden vollen Systeme ein neues volles System, das zu den Urformen:

---

*) Indessen haben die neuesten Untersuchungen Hilbert's (s. unten) das Ziel, aus seinen allgemeinen Sätzen heraus rationale und übersehbare Processe zur wirklichen Aufstellung voller Systeme zu liefern: wieweit eine solche noch auf rechnerische Schwierigkeiten stösst, lässt sich zur Zeit nicht beurteilen.

**) Journ. für Math. C. 223—230 (1886). In den Wien. Ber. XCVIII S. 1—6 (1889) hat der Verf. seinen Beweis insofern vereinfacht, dass er des Schlusses von n auf n+1 nicht mehr bedarf.

Hierbei ist noch zweier Endlichkeitsbeweise zu gedenken, welche von Jordan und Sylvester herrühren, und direct eine obere Grenze für Grad und Ordnung der Systembildungen einer binären Form ermitteln: der erstere geht dabei von den Gordan'schen diophantischen Gleichungen aus, der letztere von einer Modification des Cayley'schen Verfahrens.

Cf. Jordan C. R. LXXXII (1876), LXXXVII (1878), Liouville J. (3) II S. 177—233 (1876), V S. 345—379 (1879).

Sylvester Proc. of London XXVII S. 11—13 (1878), C. R. LXXXVI S. 1437 bis 1441, 1491—1492, 1519—1522 (1878). Wegen der weitergehenden Bestrebungen Sylvester's vgl. II. A, c.

$$(p, q, r, s, \ldots; f', f'', \ldots)$$

gehört und zugleich in den Coefficienten der p, q, r, s, ... symmetrisch ausfällt. Hier hat man nur noch in bekannter Weise die Coefficienten des Productes g der p, q, r, s, ... einzuführen, um das gewünschte volle System der Reihe (g, f', f'', ...) vor sich zu haben.

Der hiermit skizzirte Beweis ist von Hilbert*), unter Anlehnung an die Grundgedanken desselben, durch einen noch durchsichtigeren ersetzt worden.

Sei etwa eine einzelne Stammform $f = f(x, y)$ nter Ordnung vorgelegt, und wiederum in Linearfactoren $\alpha_i x + \beta_i y$ zerfällt.

Jede Invariante J (im engeren Sinne des Wortes) von f ist ein symmetrisches Aggregat von Wurzeldifferenzen der Gleichung $f = 0$, also, auf homogene Form gebracht, ein Product von Bildungen

$$\omega = (1,2)^{e_{12}}(1,3)^{e_{13}}(2,3)^{e_{23}} \ldots\ldots (n-1,n)^{e_{n-1,n}} = \prod_{k,l}(k,l)^{e_{kl}},$$

wo unter (k, l) die Differenz $\alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k$, unter $e_{kl} = e_{lk}$ ganze positive Exponenten zu verstehen sind, und wo jede der Zahlen 1, 2, ..., n gleich oft vorzukommen hat.

Die letzterwähnte Bedingung setzt sich in ein System linearer diophantischer Gleichungen um, nämlich

$$e_{12} + e_{13} + \cdots + e_{1,n} = e_{21} + e_{23} + \cdots + e_{2,n} = \cdots$$
$$\cdots = e_{n,1} + e_{n,2} + \cdots + e_{n-1,n}.$$

Alle positiven Lösungen dieses Systems setzen sich wiederum aus einer endlichen Anzahl m von solchen mittels positiver, ganzzahliger Coefficienten p linear zusammen, wie folgt:

$$e_{kl} = p_1 e_{kl}^{(1)} + p_2 e_{kl}^{(2)} + \cdots + p_m e_{kl}^{(m)}.$$

Bezeichnet nun ω_r die (irrationale) Invariante $\omega_r = \prod_{k,l}(k,l)^{e_{kl}^{(r)}}$, so genügt ω_r einer rationalen Gleichung vom Grade n!, und es stellt sich, zufolge eines bekannten Satzes aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, irgend eine Potenz von ω_r, z. B. die $p_r$te, als lineare, homogene Form der 0ten, 1ten, ... (n! — 1)ten Potenzen von ω_r dar, deren Coeffi-

---

*) Math. Ann. XXIII (1884) S. 223—226. Hierauf bezieht sich eine Note von Cayley Math. Ann. XXXIV (1889) S. 319—320, in der eine Abänderung des Hilbert'schen Verfahrens vorgeschlagen wird. Ein hierbei gemachter Fehlschluss ist von Petersen Math. Ann. XXXV (1890) S. 110—112 berichtigt worden.

Hilbert verwahrt sich in einem Referate über die letzteren beiden Noten, Fortschr. der Math. XXI S. 104 nachdrücklich dagegen, dass sein Beweis einer Erweiterung oder Ergänzung bedürfe, um auch für Covarianten von binären Formen gültig zu sein.

cienten G ganz-rationale Functionen der bezüglichen Potenzsummen $\omega_r + \cdots$, $\omega_r^2 + \cdots$, $\cdots$, $\omega_r^{n!} + \cdots$ sind.

Vermöge des Ausdrucks für die e_{kl} durch die m ausgewählten $e_{kl}^{(r)}$ nimmt aber die Invariante J die Gestalt der symmetrischen Summe an:

$$J = \Sigma \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \ldots \omega_m^{p_m}.$$

Setzt man hier die angegebenen Werte der Potenzen $\omega_r^{p_r}$ ein, so erkennt man unmittelbar, wie J als ganze Function einer endlichen Anzahl analog gebauter Invarianten erscheint, nämlich solcher, für die keiner der Exponenten von ω_r die feste Zahl n! überschreiten kann.

Die Erweiterung auf die Invarianten einer Reihe von Stammformen f, φ, ... geschieht vermöge naheliegender Modificationen: im besondern kommt daher auch den In- und Covarianten einer Formenreihe ein volles System zu.

In einer grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1890 hat Hilbert*) allgemein, und unter ausschliesslicher Benützung rationaler**) Processe die Endlichkeit des aus einer vorgelegten Reihe von ganz beliebigen (ev. auch irgendwie ausgearteten) Formen mit n Variabeln entspringenden Invariantensystems nachgewiesen.

Es gelingt ihm das wesentlich dadurch, dass er den Kern der Frage von dem engeren Gebiet der Invariantentheorie loslöst***) und als eine fundamentale Eigenschaft von unendlichen Systemen algebraischer Formen überhaupt statuirt.

Man denke sich vorab irgend ein Gesetz**) gegeben, nach welchem eine nie abbrechende Reihe von Formen F_1, F_2, ... der n Variabeln x_1, x_2, ... x_n fortschreitet. Die Ordnungen der F, sowie deren Coefficienten sollen keinerlei Beschränkung unterliegen: die letzteren mögen irgend einem Rationalitätsbereiche R angehören.

---

*) Math. Ann. XXXVI S. 473—534. Vgl. die voraufgehenden Mitteilungen in den Gött. Nachr. 1888 No. 16 S. 450—457, 1889 No. 2 S. 25—34, und No. 15 S. 423—430. Demnächst erscheint in den Math. Ann. eine Arbeit von Story über die Hilbert'sche Theorie.

**) Die Zugrundelegung eines derartigen „willkürlichen" Gesetzes für eine unendliche Reihe tritt auch sonst in den Fundamenten der Mathematik auf, man vergleiche etwa die zur Begründung der Irrationalzahlen von G. Cantor eingeführten „Fundamentalreihen".

Wenn man will, repräsentirt Hilbert's Formenreihe auch eine Art Irrationalität, die indessen im Wesen der Fragestellung begründet ist.

Allerdings giebt es eine Richtung in der Wissenschaft, die derartige unendliche Processe überhaupt verwirft.

***) In der That erscheint als ein wesentlicher Vorzug der neuen Hilbert'schen Methoden, dass sie die Formentheorie aufs Innigste verknüpfen mit der von Kronecker einerseits, von Dedekind und Weber andererseits begründeten Theorie der Modulsysteme und algebraischen Körper.

„Dann lässt sich aus der Reihe der F stets eine endliche Anzahl m derselben $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$ derart herausgreifen, dass jede Form F_s der Reihe eine lineare Combination von jenen ist, dass also

$$F_s = A_{s,1} F_{i_1} + A_{s_2} F_{i_2} + \cdots + A_{s_m} F_{i_m},$$

wo die A ebenfalls Formen der x sind, deren Coefficienten dem nämlichen Rationalitätsbereiche R angehören."

Selbstredend sind die A so zu wählen, dass die Summe der hingeschriebenen Producte wiederum eine in den x homogene Form wird.

Man entnehme nämlich der vorgelegten Reihe nach Belieben ein Individuum, das mit F bezeichnet sei, von der Dimension r in den x. Dabei ist die Annahme gestattet (was sich nötigenfalls mittels einer geeigneten Substitution der x stets erreichen lässt), dass der Coefficient von x_n^r in F nicht verschwindet.

Dann lässt sich zuvörderst in bekannter Weise der Grad in x_n einer jeden Form F_s der Reihe unter r herabdrücken; man hat nur die mit einer passenden Hülfsform B_s multiplicirte Form F von F_s abzuziehen. Dadurch stellt sich F_s in der Gestalt dar:

$$F_s = B_s F + g_{s_1} x_n^{r-1} + g_{s_2} x_n^{r-2} + \cdots + g_{s_r},$$

wo die rechterhand stehenden Factoren-Formen g nur noch von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ abhängen, im übrigen aber in diesen bis zu beliebig hoher Dimension ansteigen können.

Indem man nun den in Rede stehenden Satz für Formen von n—1 Variabeln bereits als erwiesen annimmt und auf die Coefficientencolonne der g_{s_1} in Anwendung bringt*), so muss es möglich sein, aus den obigen Darstellungen der F_s eine endliche Anzahl μ (etwa für die Werte $s = 1, 2, \ldots, \mu$) so herauszugreifen, dass nach beiderseitiger Multiplication

---

*) Es ist leicht einzusehen, dass man den geschilderten Process auch in der umgekehrten Richtung vornehmen kann, also von den, von x_n freien Coefficienten übergeht zu den mit der ersten Potenz von x_n multiplicirten u. s. f. Hierbei kann man aber die Annahme fallen lassen, dass die höchste auftretende Potenz die (r—1)te ist, darf vielmehr von dieser Normalform völlig abstrahiren und den Exponenten von x_n bis zu beliebiger Höhe anwachsen lassen. Allerdings resultirt so zuvörderst eine nicht abbrechende Reihe von Formen, durch die alle andern Glieder der vorgelegten Reihe linear ausdrückbar sind. Macht man indessen nochmals von der Annahme Gebrauch, dass der in Rede stehende Satz bereits für Formen von n—1 Variabeln gültig sei, so lässt sich jene endlose Reihe durch eine endliche ersetzen.

Trotzdem diese Abänderung des ursprünglichen Verfahrens complicirter ist, gewährt sie den grossen Vorteil, dass jetzt, anstatt rationaler, nur ganze und ganzzahlige Verbindungen der gegebenen Coefficienten eingeführt werden, womit eine unmittelbare Verwertung für zahlentheoretische Zwecke möglich wird. Das ist der Kern des im II. Abschnitt der Hilbert'schen Arbeit dargelegten Beweises.

mit geeigneten Hülfsformen der $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, Addition und schliesslicher Subtraction von der Darstellung für jede weitere Form F_s, die letztere linear componirt erscheint aus $F, F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ und einer weiteren Form, die sich aber bezüglich der Variabeln x_n höchstens noch bis zum Grade $r - 2$ erhebt.

Auf die Colonne der hierbei mit der höchsten Potenz von x_n multiplicirten Coefficienten unserer neuen Darstellungen für $F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \ldots$ wende man abermals das nämliche Verfahren an u. s. f., so ist einleuchtend, wie man nach höchstens*) r Schritten der besagten Art zu einer endlichen Anzahl m der Formen F gelangt, welche die verlangte Basis der ursprünglichen Reihe repräsentiren.

Es erübrigt jetzt nur noch die directe Erledigung des einfachsten Falles $n = 1$. Aber hier sind die Glieder der fraglichen Reihe, bis auf constante Factoren, positive, ganzzahlige Potenzen der einen Variabeln x_1, und da ist es klar, dass alle Glieder der Reihe durch ein solches mit kleinstem Exponenten teilbar sein müssen.

Der vorgeführte Beweis unseres Hülfssatzes**) lässt zugleich erkennen, dass die Coefficienten der multiplicativen Formen A dem gleichen Rationalitätsbereiche R zugehören, wie diejenigen der F selbst.

Um nunmehr zur Anwendung auf die Theorie der Invarianten zu schreiten, sei der Einfachheit halber nur eine einzelne ternäre Originalform f zu Grunde gelegt. Das System der ganz-rationalen Invarianten $i_1, i_2, \ldots$ von f lässt sich leicht in einer Reihe***) anordnen, für welche dann der obige Satz gilt.

---

*) Bei etwaiger Ausführung der Methode in einem concreten Fall ist zu beachten, dass die Art des Gesetzes, nach dem die Formen der einzelnen Coefficientencolonnen fortschreiten, im allgemeinen eine (sowohl von einander, als) von der Art des ursprünglichen Gesetzes der Reihe durchaus verschiedene sein wird.

**) Kronecker entwickelt in seiner Festschrift S. 18 einen ähnlichen Satz für eine, nicht homogene Variable. Würde man indessen seine Formel homogen machen, so würde die ganze Function rechterhand einen Nenner erhalten, nämlich eine Potenz der homogen machenden Variabeln. Es liegt demnach bei Kronecker kein Integritäts-, sondern ein Rationalitäts-Bereich vor.

***) Die Anordnung der Invarianten in eine Reihe lässt sich nach Hilbert auch umgehen. Man greife aus dem Systeme der Invarianten von f zwei Individuen i_1, i_2 heraus, von denen keine durch die andere teilbar ist. Sodann wähle man ein drittes i_3, das nicht als lineare Combination $A_1 i_1 + A_2 i_2$ darstellbar ist, sodann ein viertes, das sich nicht linear aus i_1, i_2, i_3 zusammensetzt u. s. f. Die Reihe der so entstehenden i muss nach dem ersten Hülfssatze abbrechen (l. c. S. 522).

Dies Verfahren [welches unmittelbar auf ganz beliebige Formensysteme übertragen werden kann (cf. S. 478)] ist wesentlich an die Voraussetzung geknüpft, dass die Coefficienten der Formen des Systems einem bestimmten Rationalitätsbereich angehören.

Bedeuten also $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gewisse ganz-rationale Hülfsfunctionen der Coefficienten von f, so ist irgend eine Invariante i von f aus m solchen linear ableitbar, sodass man hat:

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m.$$

Der zweite Schritt ist die Ersetzung der A durch Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$, die selbst wieder ganze Functionen der $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sind.

Sind $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ von den resp. Graden $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$ in den Coefficienten, so darf A_s als eine homogene Form derselben vom Grade $r - r_s$ vorausgesetzt werden.

Auf die Form f werde eine beliebige Substitution T der Variabeln mit den Coefficienten a_{jkl} und der Determinante a ausgeübt.

Versteht man unter den f_a die transformirten Coefficienten der Stammform f, unter $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ die Gewichte von $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$, so verwandelt sich vermöge der Grundeigenschaft der Invarianten die Gleichung für i in die folgende:

$$a^p i = a^{p_1} A_1(f_a) i_1 + a^{p_2} A_2(f_a) i_2 + \cdots + a^{p_m} A_m(f_a) i_m.$$

Wir ziehen nunmehr einen weiteren, von Gordan und Mertens*) (und hier in allgemeinerer Fassung von neuem) bewiesenen Hülfssatz heran. Man verstehe unter $A(f_a)$ eine beliebige, homogene, isobare Form der f_a vom Gewichte g, unter q eine positive ganze Zahl (incl. 0) und unter Ω_a den Cayley'schen Differentiationsprocess:

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11} \partial a_{22} \partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11} \partial a_{23} \partial a_{32}} \pm \cdots - \frac{\partial^3}{\partial a_{13} \partial a_{22} \partial a_{31}}.$$

„Unterwirft man das Product $a^q A(f_a)$ dem Processe Ω_a so oft, etwa p-mal, bis die Substitutionscoefficienten ganz herausgehen, so erhält man eine Invariante J von f vom Gewichte $g = p - q$“.

Die p-malige Ausübung des Processes Ω_a auf die beiden Seiten der für $a^p i$ aufgestellten Identität ergiebt, dass sich linkerhand i nur um einen positiven, ganzzahligen und nicht verschwindenden Factor reproducirt, während rechts sämtliche Factoren der $i_1, i_2, \ldots, i_m$ in Invarianten von

---

*) Der Satz kommt für $q = 0$ implicite bei dem (zweiten) Beweise vor, der in Gordan's „Vorlesungen“ II § 9 für den Hauptsatz der Symbolik gegeben wird, dass jede Covariante einer binären Form durch ein symbolisches Product darstellbar ist. Es ist merkwürdig, dass der Kern dieses Beweises ein unsymbolischer ist.

Mertens hat den nämlichen Satz in den Wien. Ber. XCV S. 942—991 (1887) bewiesen, und seitdem in einer Reihe von Arbeiten in den Wien. Ber. systematisch dazu verwendet, um volle Systeme auf unsymbolischem Wege zu erhalten, cf. II. A, b.

Für lineare Urformen findet sich der Satz in der im Texte angegebenen Gestalt bereits bei Clebsch, Journ. für Math. LIX S. 7 u. ff.

f übergehen. Nach Division mit jenem Factor resultirt demnach eine Darstellung von der Form:

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m,$$

wo die Grade und Gewichte der J geringer sind, als die der ursprünglichen Invariante i. Man hat jetzt nur noch das nämliche Verfahren auf die J zu übertragen u. s. f., so wird nach einer endlichen Anzahl von Operationen das gewünschte Ziel erreicht sein.

Die vorliegenden Ueberlegungen übertragen sich fast ohne weiteres auf den Fall von n Variabeln, sowie auf ein System von Stammformen, damit aber auch auf Covarianten, Contravarianten, Combinanten u. s. w.

Ferner subsumirt sich unter das Hauptgesetz auch der allgemeinere Fall von mehreren Reihen von einer gleichen oder auch verschiedenen Anzahl von Variabeln, die beliebigen, identischen oder verschiedenen Substitutionen unterliegen.

Selbst wenn die vorzunehmenden Substitutionen nur einen Teil (Untergruppe) der Gruppe aller Substitutionen bilden, bleibt die Methode des Beweises so lange in Kraft, als sich irgend zwei Substitutionen desselben Typus derart zu einer dritten zusammensetzen, dass die neuen Parameter bilineare Formen der alten sind, und falls ausserdem ein dem Processe Ω ähnlicher Differentiationsprocess existirt.

Die Einwirkung des zu Grunde gelegten Hülfssatzes über den Integritätsbereich einer unendlichen Formenreihe auf die Lehre von den invarianten Verbindungen erstreckt sich aber noch weiter.

Zunächst hat man nur eine der n Variabeln gleich der Einheit zu nehmen, um die Beschränkung der Homogenität aufzuheben.

Nun herrschen zwischen den Invarianten einer oder mehrerer Stammformen Relationen in unbegrenzter Anzahl, welche in den ursprünglichen Coefficienten identisch erfüllt sind. Die linken Seiten (Syzyganten) dieser „Syzygien"*) lassen sich als nicht homogene Formen ansehen, deren Variable nichts anderes sind, als das volle System von m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Mithin besitzt auch das unendliche System der Syzyganten eine endliche Basis.

Die Syzyganten ihrerseits sind gleichfalls durch eine unendliche Menge von, in den $i_1, i_2, \ldots, i_m$ identisch erfüllten Relationen verknüpft. Den linken Seiten dieser „Syzygien zweiter Art" kommt wiederum eine endliche Basis zu, und so fort.

Durch ein, nicht müheloses Verfahren, welches den grundlegenden

*) Cf. II. A, d.

Hülfssatz immer von neuem heranzieht, gelingt dem Verfasser die Feststellung der bedeutungsvollen Thatsache, dass jener Process der fortgesetzten Syzygienbildungen nach einer endlichen Anzahl, und zwar höchstens von m Schritten abbrechen muss*).

Erst mit der Bildung sämtlicher Basen — nicht nur der ursprünglichen Invarianten, sondern auch der Syzyganten successiver Ordnung — wird eine volle**) Einsicht in die Structur der, dem vorgelegten algebraischen Gebilde entstammenden ganz-rationalen Invarianten gewonnen werden (l. c. S. 534).

In neuester Zeit***) hat Hilbert noch weitere Consequenzen aus seinen allgemeinen Endlichkeitssätzen entwickelt, die vor allem der principiellen Frage näher treten, welche Hülfsaufgaben behufs thatsächlicher Aufstellung der bezüglichen vollen Systeme zu erledigen sind.

Eine wesentliche Handhabe dazu bietet das Theorem, dass man aus der Mannigfaltigkeit der Invarianten eines algebraischen Gebildes stets eine endliche Anzahl σ algebraisch unabhängiger $J_1, J_2, \ldots, J_\sigma$ derart aussondern kann, dass alle übrigen „ganze algebraische“ Functionen derselben werden, und somit verschwinden, sobald es die J thun.

Umgekehrt sind aber die J durch die zuletzt angegebene Eigenschaft (und durch ihre algebraische Unabhängigkeit) völlig charakterisirt.

Angenommen, man habe ein derartiges System von σ Invarianten J ermittelt, so folgt rückwärts daraus, nach Sätzen von Kronecker†), nicht nur von neuem die Endlichkeit des gesamten Invariantenbereiches, sondern es ist auch ein bestimmter, arithmetischer Weg vorgezeichnet, um dessen Basis zu finden: dieselbe setzt sich zusammen aus den J nebst denjenigen i, welche die „Basis“ des durch die J festgelegten algebraischen „Körpers“ ausmachen.

In erster Linie wird es sich dabei um den „Grad“ g des gemeinten Körpers handeln.

Für eine binäre Stammform f, nter Ordnung, hat Hilbert††) die Ant-

---

*) l. c. S. 492. Vgl. dazu eine Note von Schönflies. Gött. Nachr. 1891 S. 339—344.

**) Vom formentheoretischen Gesichtspunkt aus dürfte gegen den angeführten Ausspruch Hilbert's nichts einzuwenden sein. Sieht man indessen den gruppentheoretischen Gesichtspunkt als gleichberechtigt an, so erscheint als eine gleichfalls fundamentale Aufgabe der Zukunft, die Gesamtheit aller vollen „Untersysteme“ von invarianten Bildungen einer Reihe von Stammformen zu ermitteln, d. i. solcher, wohl definirten Teilmannigfaltigkeiten des ganzen Invariantensystems, die für sich den Charakter eines vollen Systems besitzen. Cf. II. A, b.

***) Gött. Nachr. 1891 S. 232—242; 1892 S. 2—12.

†) Festschrift § 6.

††) Vortrag, gehalten 1891 auf der Naturforscherversammlung in Halle, vgl. den amtl. Bericht S. 61—62.

wort gegeben. Hier ist die Zahl σ gleich $n-2$; die gesuchte Anzahl g ist eine einfache zahlentheoretische Function, welche, abgesehen von n, ausschliesslich von den Graden der $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ (in den Coefficienten von f) abhängt.

Von den gemachten Anwendungen, die unter anderem die Herstellung von Formen mit gewissen vorgegebenen Invarianten betreffen*), sehen wir hier ab.

Im Falle einer binären Grundform f kann man durch blosse Resultantenbildung ein System von Invarianten aufstellen, durch welche sich alle anderen Invarianten ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Sei etwa die Ordnung n von f ungerade, so bilde man die Covarianten zweiten Grades $F_1, F_2, \ldots, F_{\frac{1}{2}(n-1)}$, und construire aus geeigneten Potenzen der f, F mittels willkürlicher Parameter u, v zwei homogene lineare Combinationen U, V. Das identische Verschwinden der Resultante von U, V ist mit μ Gleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \ldots, J_\mu = 0$ aequivalent. Die J sind dann ein System von Invarianten der verlangten Art. Entsprechendes gilt für eine gerade Ordnung n.

Von diesen J gelangt man durch Anwendung des Aronhold'schen Processes zu einem analogen System von Simultaninvarianten. Auch für Formen mit mehr Variabeln kann man durch eine endliche Anzahl rationaler, von vorn herein angebbarer Processe ein derartiges System von Invarianten gewinnen, deren Verschwinden das aller übrigen nach sich zieht. Man hat zu dem Behuf nur ein Kriterium nötig, das entscheiden lässt, ob eine vorgelegte Form mit numerischen Coefficienten noch eine von Null verschiedene Invariante besitzt; das Letztere ist in der That dann und nur dann der Fall, wenn die Substitutionsdeterminante eine **ganze** algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Form ist.

Dadurch bieten sich denn auch die Mittel zur Aufstellung voller Invariantensysteme und (nur von n abhängiger) oberer Grenzen**) für Anzahl und Gewicht derselben.

II. A, b.

Specielles über volle Systeme.

Es mögen nunmehr die bislang zu gegebenen Urformen in extenso berechneten vollen Systeme kurz aufgeführt werden. Es liegt in der

*) Siehe II. B, b.

**) Hilbert führt diesbezüglich zur Illustration den vorbereitenden Satz an: „Sämtliche Invarianten einer ternären Grundform lassen sich als ganze algebraische Functionen derjenigen Invarianten ausdrücken, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt. (Gött. Nachr. 1892 S. 12.) Nach mündlicher Mitteilung hat Gordan allgemeine Ausdrücke für obere Grenzen gefunden.

Natur der angewendeten, im wesentlichen von Clebsch und Gordan begründeten Bildungsmethoden, dass die Anzahlen der bezüglichen Formen zunächst den Charakter oberer Grenzen haben: in der That hat des öfteren eine nachträgliche Revision*) ergeben, dass einzelne der vordem gefundenen System-Individuen überflüssig, d. i. reducibel waren.

Erst der Vergleich mit der englischen Arbeitsrichtung**) wird dazu führen, welchen jener Anzahlen eine absolute Genauigkeit zukommt.

Wir beginnen mit einer einzelnen binären Urform f_n. Nach frühzeitiger Erledigung der einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4$ durch Cayley und Sylvester war erst Gordan 1868 im Stande, die Formen f_5 und f_6 zu bewältigen***).

Der Beweis für die Vollständigkeit der resultirenden vollen Systeme von 23 resp. 26 „Grundformen" konnte von Gordan derart geführt werden, dass seine Ausdehnung auf die Endlichkeit des Systems einer beliebigen f_n keine wesentlich neuen Hülfsmittel erforderte.

Auf Grund der vereinfachten Darstellung des Gordan'schen „Programms" hat v. Gall das volle System einer f_8 †), später das (grössere Schwierigkeiten darbietende) System einer f_7 ††) in concreto aufgebaut;

---

*) Die instructivsten Beispiele dieser Art werden geliefert durch die simultanen Systeme der (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) und das System einer f_8.

Für den Fall (f_3, φ_3) behauptete zuerst Sylvester, C. R. LXXXIX S. 828 bis 833 (1877), Am. J. II S. 324—329 (1879), auf Grund seiner abzählenden Methode (cf. II. A, e), dass zwei lineare Covarianten der Salmon-Clebsch'schen Liste reducibel sein müssten. Unter dieser Voraussetzung gab d'Ovidio (1880), Atti di Tor. XV S. 267—270 ihre Zusammensetzung an: bestätigt wurde dies Ergebnis von Gerbaldi (ebenda) mittels einer, von jener Voraussetzung unabhängigen Methode.

Wiederum konnte Sylvester, C. R. LXXXVII S. 445—448, 477—481 (1878) das Gordan-Gundelfinger'sche System (f_3, φ_4) um drei Formen reduciren.

Die Reduction des Gordan-Bertini'schen Systems (f_4, φ_4) um zwei Formen kündigte Sylvester an, C. R. LXXXIV S. 1285—1289 (1877), Am. J. II S. 324 bis 329 (1879). Die wirkliche Ausführung gab d'Ovidio, Atti di Tor. XV S. 301 bis 304 (1880). Eine anderweite Bestätigung liegt bei Stroh vor, Math. Ann. XXII S. 290—296 (1883).

Was endlich den Fall der f_8 betrifft, so konnte v. Gall, Math. Ann. XVI S. 456 (1880) nachweisen, dass die Anzahl seiner Individuen mit der Sylvester'schen Angabe (C. R. LXXXIV S. 240—244, 532—534 (1877)) übereinstimme bis auf eine einzige Form, deren Reduction ihm nicht gelang. Durch ausgedehnte Rechnungen legte aber Sylvester die Reducirbarkeit dieser Form dar, C. R. XCIII S. 192—196, 365—369, Am. J. IV S. 62—85 (1881).

Indessen war erst Stroh l. c. im Stande, die Frage direct zur Entscheidung zu bringen; die bez. Methode, die auf den Relationen zwischen Ueberschiebungen gewisser Ordnung beruht (cf. II. A, d), hat er später allgemein begründet, Math. Ann. XXXI S. 444—454 (1888).

**) Vgl. II. A, e.

***) Journ. f. Math. LXIX S. 323—354.

†) Math. Ann. XVII S. 31—52, 139—152, 456 (1880).

††) Math. Ann. XXXI S. 318—336 (1888).

Vgl. Krey, Dissert. Striegau 1874.

er macht dabei geschickten Gebrauch von gewissen Syzygien, um überflüssige Formen auszuscheiden.

Was die simultanen Systeme von zwei binären f_n angeht, so verdankt man die Behandlung der Fälle (2, 2), (2, 3), (3, 3) Salmon und und Clebsch; das System (3, 4) findet sich bei Gundelfinger*), (2, 5) bei Winter**), (2, 6) bei v. Gall***).

Ein systematisches Studium hat diesen Systemen Gordan****) in einer Arbeit gewidmet, die am Schlusse eine Tabelle aller der Fälle aufweist, bei denen keine der beiden Urformen die vierte Ordnung überschreitet.

Eine andere Ableitung des Systems (4, 4), in den Resultaten mit Gordan übereinstimmend, rührt von Bertini†) her.

Hinsichtlich der simultanen Systeme von mehr als zwei binären Formen ist man über Clebsch††), der eine beliebige Reihe von linearen bezw. quadratischen Formen erledigt hat, nicht wesentlich hinausgegangen; das System von vier Formen, von denen zwei linear und zwei quadratisch sind, ist von Perrin†††) näher untersucht worden.

Um zu den ternären Formen C_n überzugehen, so ist der erste Fall einer einzelnen solchen Form, der wirkliche Schwierigkeiten bereitete, nämlich $n = 3$, von Gordan††††) zum Abschluss gebracht worden. Den bereits früher von Aronhold, Cayley, Hermite, Brioschi gegebenen Bildungen waren verhältnismässig wenige hinzuzufügen; um aber die

---

*) Programm, Stuttgart 1869 S. 1—43.
Nach einer auf S. 2 daselbst gemachten Bemerkung stammt das bez. System von Gordan her.

**) Programm, Darmstadt 1880.

***) Programm, Lemgo 1873.

****) Math. Ann. II S. 227—281 (1870).

†) Batt. Giorn. XIV S. 1—14 (1876). Wiederabgedruckt in Math. Ann. XI S. 30—41 (1877).

††) Siehe die zusammenhängende Darstellung von Clebsch: Theorie der binären Formen, Leipzig 1872, sowie die Vereinfachungen bei Gordan: Vorlesungen II. Leipzig 1887.

†††) S. M. F. Bull. XV S. 45—61 (1887).

††††) Math. Ann. I S. 90—128 (1869). Wegen der Theorie siehe noch Math. Ann. I, 359—400, sowie XVII S. 217—233 (1880). Vgl. die erschöpfende Zusammenstellung bei Clebsch und Gordan, Math. Ann. VI S. 436—512 (1873). Einen einfacheren Aufbau des Systems verdankt man Gundelfinger Math. Ann. IV S. 144—168 (1871), vgl. noch V S. 442—447 (1872).
Cayley gab die expliciten Bildungen in den Coefficienten für die Hesse'sche Normalform der C_3: $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$: Am. J. IV S. 1—16 (1881). Hier findet sich auch eine vollständige Uebersicht über die ältere Litteratur.
Endlich rührt von Dingeldey, Math. Ann. XXXI S. 157—176 (1888), eine analoge Uebersicht her über das System der (in der Theorie der elliptischen Functionen verwendeten) canonischen Form $xy^2 - 4z^3 + g_2x^2y + g_3x^3$, sowie der speciellen Form $axz^2 - 4by^3$. Letztere repräsentirt durch ihr Verschwinden eine C_3 mit Rückkehrpunkt.

Vollständigkeit des gewonnenen Systems (von im ganzen 34 Formen) sicher zu stellen, bedurfte es erst einer eigenartigen Ausdehnung der symbolischen Methoden vom binären auf's ternäre Gebiet.

Erst ziemlich später hat Mertens*) das gleiche Ergebnis für die C_3 auf unsymbolischem Wege, mit alleiniger Benützung des Ω-Processes erhalten.

Im Falle $n = 4$ wird der Reichtum der auftretenden Bildungen bereits so gross, dass Gordan es vorzog, sich auf einen besonderen — anlässlich der Gleichungen 7. Ordnung mit 168 Substitutionen in sich, von Interesse gewordenen — Typus**) zu beschränken, welcher durch das identische Bestehen einer einfachen Covariantenidentität charakterisirt werden kann.

Von den zu einer allgemeinen C_4 gehörigen Bildungen hat Maisano***) diejenigen, welche bis zum 5. Grade incl. ansteigen, zusammengestellt.

Das System zweier C_2 ist wiederum von Gordan†) zuerst angegeben, und später††), im Zusammenhange mit der eben berührten, speciellen C_4 entwickelt worden. Den algebraischen und geometrischen Zusammenhang der Formen des Systems unter einander hat neuerdings Perrin†††) eingehend verfolgt.

Die Kenntnis eines vollen Systemes dreier C_2 verdankt man Ciamberlini††††).

Im quaternären Gebiet sind ausser den Variabeln x einer Form $F_n(x)$ und deren contragredienten u, noch die aus zwei Reihen cogredienter Variabeln x, y zu bildenden zweireihigen Determinanten zu berück-

*) Wien. Ber. XCVII S. 437—518 (1888). Wegen der angewandten Methode vgl. die vorhergehende Arbeit dess. Verf.: Wien. Ber. XCV S. 942—991 (1887).

**) Math. Ann. XVII S. 217—233. Die 54 Formen des vollen Systems sind in einer Schlusstabelle vereinigt.

Gordan's Angabe über die Endlichkeit des Systems einer allgemeinen C_4 befindet sich bereits in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 174 Note (1875).

***) Batt. G. XIX S. 198—237 (1881).

Auch die Formen 6. Grades befinden sich daselbst, mit Ausschluss der die x und die u gleichzeitig enthaltenden. Vgl. noch den Nachtrag dess. Verf., Pal. Rend. I S. 54—56 (1886).

†) Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 288 u. flgde (1875). Die Tabelle der 20 Systemformen findet man auf S. 291.

††) Math. Ann. XIX S. 529—552 (1880).

†††) S. M. F. Bull. XVIII S. 1—80 (1890).

Bezüglich der Relationen zwischen den Formen des Systems vgl. noch Rosanes, Math. Ann. VI S. 264 u. flgde (1875), sowie Gerbaldi, Annali (2) XVII S. 161—196 (1889). Letztere geht auch ausführlich auf die damit verbundenen Realitätsfragen ein.

††††) Batt. G. XXIV S. 141—157 (1886).

Das System umfasst 127 Bildungen.

sichtigen. Mittels geeigneter Modification des Ω-Processes gelang es Mertens*) in letzter Zeit, für eine F_2 ein volles System von 20 Formen herzustellen, und überdies einen Weg anzugeben, wie man vermöge leicht übersehbarer Differentiationsoperationen aus den Einzelsystemen zweier F_2 ein simultanes System der letzteren aufbauen kann.

Mit ähnlichen Mitteln hat Mertens auch „Nullsysteme"**) behandelt, d. h. alternirende bilineare Formen von zwei cogredienten quaternären Variabelnreihen x, y, denen man noch beliebig viele in den x resp. u lineare Formen adjungiren mag. Für fünf (und weniger) Nullsysteme lässt sich das Ergebnis übersichtlich gruppiren.

Was endlich Formen mit mehreren incongruenten Variabelnreihen anlangt, so ist bereits früher des von Study und Gordan ermittelten vollen Systems für eine binäre, quadrato-quadratische Urform***) Erwähnung geschehen.

Im ternären Gebiete ist nur der Fall einer, in zwei contragredienten Reihen x, u linearen Form†) von Clebsch und Gordan im einzelnen erledigt worden. Die analoge, quaternäre Aufgabe wurde neuerdings von Mertens††) soweit gefördert, dass es nur noch gewisser Combinirungen seiner verschiedenen Formengruppen bedarf, um das volle System zu besitzen.

Zum Schlusse sind noch gewisse volle Untersysteme (d. h. die selbst nur einen Bestandteil allgemeiner voller Systeme ausmachen) anzuführen.

Sieht man dabei von solchen ab, deren Existenz auf der Hand liegt†††), so können wir uns auf zwei Erscheinungen derart beschränken.

Die erste gehört der Gattung der binären Combinanten an, die schon

---

*) Wien. Ber. XCVIII S. 691—739 (1889).

**) Wien. Ber. XCVII S. 519—537 (1888).

***) Math. Ann. XXXIII S. 372—389 (1889). Das System besteht aus 38 Formen. Vgl. die vorhergehenden Noten von Study und Gordan in den Erlanger Ber. 1889. Die Methode ist auf höhere Formen ausdehnbar. Das volle System der Invarianten hatte schon früher Capelli aufgestellt: Batt. G. XVII S. 69—148 (1879).

Von binären Formen mit cogredienten Variabelnreihen hat le Paige die trilinearen und quadrilinearen untersucht, C. R. XCII S. 1048—49, 1103—5, XCIII S. 264—265, 509—512 (1881); C. R. XCIV S. 69—71, Torino Atti XVII S. 299—326 (1882), wesentlich zu geometrischen Zwecken und ohne daher eine Vollständigkeit anzustreben.

†) Math. Ann. I S. 359—400 (1869). Abgerechnet die identische Zwischenform u_x, enthält das volle System 7 Formen. Siehe insbes. S. 373. Die Methode ist auf höhere Formen ausdehnbar.

††) Wien. Ber. XCVIII S. 13—32 (1890).

†††) Dahin gehören z. B. solche Untersysteme, deren Formen nur einen Teil aller Variabeln des bez. Gebietes enthalten, ferner die Gordan'schen Systemklassen $A_1, A_2, \ldots$ (Vorlesungen II § 21) u. a. (Vgl. die Anmerkung**) auf S. 149 oben.)

1872 von Gordan*) als das volle System einer einzelnen Form mit mehreren (cogredienten) Variabelnreihen erkannt wurden. Der einfachste Fall, der hier einer besonderen Untersuchung bedarf, ist der zweier f_4. Nach der Gordan'schen Methode kommt die Ausführung des vollen Combinantensystems zurück auf diejenige des gewöhnlichen simultanen Systems zweier „Elementarcovarianten" von 6. resp. 2. Ordnung, die aber durch eine gewisse identische Relation mit einander verknüpft sind.

Die bezügliche Rechnung hat Stephanos**) geleistet.

Sodann ist Wiltheiss von den hyperelliptischen Functionen aus zu einem merkwürdigen Untersysteme einer binären f_6 geführt worden***).

Es seien mit A_i die Coefficienten, mit x_1, x_2 die Variabeln von f_6 bezeichnet; ferner bedeute φ_6 eine gewisse Covariante 6. Ordnung und 2. Grades, in deren Coefficienten B_i noch zwei, mit x_1, x_2 cogrediente Variabeln y_1, y_2 zur 2. Ordnung eingehen. Versteht man dann unter $\underset{y=x}{\delta}$ den Aronhold'schen Process $\Sigma B_i \frac{\partial}{\partial A_i}$, verbunden mit nachträglicher Gleichsetzung der x und y, so lässt sich ein System von 9 Covarianten von f nachweisen, derart, dass durch Anwendung der Operation δ stets wieder Covarianten des Systems hervorgehen.

Die Untersuchungen über volle Systeme von Grundformen, insoweit sie mit den sogenannten „erzeugenden Functionen" in Verbindung stehen, sowie die im Anschlusse hieran über volle Systeme von Syzygien zu berichtenden Daten werden weiter unten berücksichtigt werden.

Dagegen sind die mit endlichen Gruppen linearer Substitutionen verknüpften vollen Systeme bereits im Abschnitt I. A, b besprochen worden.

II. A, c.
Associirte Systeme und typische Darstellung.

Es sind nunmehr die Bestrebungen zu würdigen, die darauf abzielen, die Mannigfaltigkeit der aus gegebenen Urformen ableitbaren invarianten Bildungen, anstatt zu einem Integritätsbereiche, zu einem Rationalitätsbereiche mit endlicher Basis zusammenzufassen†).

---

*) Math. Ann. V S. 95—122 (1875). Nach mündlicher Mitteilung hat Gordan in der letzten Zeit das volle Combinantensystem zweier C_2 („Kegelschnitte") entwickelt; die Anzahl der Formen erwies sich als eine verhältnismässig geringe.

**) C. R. XCVII S. 27—31 (1883). Es ergeben sich 26 Systemformen.

***) Math. Ann. XXXV S. 433—456 (1889); Math. Ann. XXXVI, 134 bis 153, XXXVII S. 229—272 (1890).

†) Vgl. damit die in gewissem Sinne parallellaufenden, gruppentheoretischen Entwickelungen von Lagrange bez. der gegenseitigen rationalen Ab-

Diese Bestrebungen gehen auf Hermite*) zurück, der 1852 darlegte, wie man aus den In- und Covarianten einer binären Form

$$f_n(x_1, x_2) = f$$

in mannigfaltiger Weise eine endliche Anzahl so herausgreifen kann, dass alle übrigen rational von jenen abhängen. Will man die einfachste Darstellung derart haben, bei welcher alle Individuen der Basis algebraisch von einander unabhängig sind, so führe man neue Variabeln ξ, η mit der Determinante $f_n(x_1, x_2)$ ein, mittels der „Covarianten":

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \eta = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

wo die Hülfsvariabeln y mit den x cogredient sind. Dann geht die mit der $(n-1)$ten Potenz von $f_n(x_1, x_2)$ multiplicirte Form $f_n(y_1, y_2)$ über in eine neue Form $\Phi_n(\xi, \eta)$, von deren Coefficienten der erste gleich der Einheit, der zweite gleich Null ist, während die übrigen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, im Verein mit $f_n(x_1, x_2)$, die gewünschte Basis, oder, mit Hermite zu reden, das „associirte System" von f repräsentiren.

Um eine beliebige Covariante von f durch die $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, f auszudrücken, hat man nur im Leitgliede derselben die Coefficienten von f zu ersetzen durch diejenigen von Φ, und nachträglich mit Hülfe von f homogen zu machen, wodurch eine Potenz von f in den Nenner kommt.

Man kann indessen, wie Clebsch**) 1870 ausgesprochen hat, die associirten Formen φ auf noch einfachere zurückführen, nämlich auf die Covarianten ψ 2. Grades von f und deren Functionaldeterminanten χ mit f (d. s. Covarianten von f vom 3. Grade). Die φ sind vermöge recurrenter Formeln rational durch die ψ, χ, f darstellbar, so dass wiederum nur eine Potenz von f als Nenner fungiren kann, der sich übrigens in den von Clebsch ausgerechneten niedrigsten Fällen $n = 2, 3, \ldots, 7$ auf die Einheit reducirt.

Gundelfinger***) hat im folgenden Jahre nicht nur die Behaup-

---

hängigkeit der „ähnlichen" Functionen. Eine weitere Ausführung in diesem Sinne befindet sich bei König, Math. Ann. XVIII S. 69—77 (1881).

*) Vgl. diesen Bericht S. 88.

In anderer Weise, nämlich in unmittelbarem Zusammenhange mit der Auflösung der algebraischen Gleichungen, hat Igel die Theorie der associirten Formen begründet: Wien (bei Gerold), 1889.

**) Gött. Nachr. 1870 S. 405—409 oder Math. Ann. III S. 265—267 (1871).

***) Journ. f. Math. LXXIV S. 87—91 (1871). Vgl. die vereinfachte Darstellung dess. Verf. in „Salmon-Fiedler" S. 459—463 (1877). Die Umkehrung des „Clebsch-Gundelfinger'schen" Gleichungensystems hat Gordan in neuester Zeit ausgeführt, Math. Ann. XLI S. 1—24 (1892), insofern er die Hermite'schen Formen φ explicite als ganz-rationale Functionen der ψ, χ darstellt. Man kann a priori erkennen, wie sich die ersteren Formen durch Producte der letzteren

tungen von Clebsch auf symbolischem Wege erwiesen, sondern auch allgemein begründet, dass die φ stets ganz-rationale Functionen der ψ, χ, f werden.

Zugleich giebt er die Erweiterung auf das simultane System zweier Formen f_n und φ_m. Sei etwa m diejenige der beiden Zahlen m, n, welche die andere an Grösse nicht übertrifft, so treten zu den obigen Formen ψ, χ, f nur noch die m Ueberschiebungen von f mit φ hinzu.

Sylvester*) hat, ausgehend von den Leitgliedern der Covarianten, das letztere Ergebnis auf eine beliebige Reihe von binären Urformen ausgedehnt.

Eine interessante Anwendung der associirten Formen rührt von Kohn**) her. Indem er an Stelle der φ ihre irrationalen Aequivalente einführt, nämlich die Wurzeln der Gleichung $\Phi_n\left(\frac{\xi}{\eta}, 1\right) = 0$, welche ein übersichtliches Bildungsgesetz befolgen, gelingt es ihm, die Teilbarkeit der Resultanten und Discriminanten von Covarianten durch eine Potenz der Discriminante der Urform allgemein zu beherrschen. Die Uebertragung auf simultane Urformen ist dann leicht zu bewerkstelligen.

Die Leitglieder der von Clebsch eingeführten associirten Formen ψ, χ liegen bei Perrin's***) Erweiterung des Hauptsatzes auf Urformen F mit p Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_p$ zu Grunde. Man sehe die nach Potenzen von x_1 geordnete Form F:

$$F = ax_1^n + \binom{n}{1} F_1 x_1^{n-1} + \binom{n}{2} F_2 x_1^{n-2} + \cdots + F_n$$

---

ausdrücken: die Aufgabe concentrirt sich daher darauf, die rationalen Zahlencoefficienten C jener Producte zu ermitteln. Vgl. Bärthlein Dissert. Erlangen, 1887, wo die successive Berechnung der C weiter geführt wird als bei Clebsch. Es ist beachtenswert, dass genau dieselben Grössen C noch die Lösung folgender zwei fundamentalen Aufgaben vermitteln:

1) Die Coefficienten einer binären Urform darzustellen als rationale Functionen der beiden ersten und der Leitglieder der ψ, χ.

2) Desgleichen als rationale Functionen der beiden ersten und der beiden Anfangscoefficienten der ψ.

Die fraglichen Grössen C hängen zuvörderst von einem speciellen Systeme quadratischer Gleichungen ab: indessen gelingt es Gordan, dieses System in ein in den C lineares überzuführen.

Damit ist übrigens zugleich die weitere Aufgabe gelöst, alle ganz-rationalen Lösungen der Differentialgleichung für binäre „Differentialinvarianten" durch die einfachsten derselben rational auszudrücken. (Vgl. dazu etwa Forsyth: Mess. No. 202, 1888).

*) C. R. LXXXVI S. 448—450 (1878).
Am. J. I S. 118—124 (1878).

**) Wien. Ber. Juli 1891, 29 S.; Oct. 1891, 5 S.
Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, dass der Ausdruck für die Wurzeln der Gleichung $\Phi_n = 0$ geradezu übereinstimmt mit dem von Hermite für die Tschirnhausen-Transformation gegebenen (cf. Einl. S. 93, Anm. ***).

***) C. R. CIV S. 108—111, 220—223, 280—283 (1888).

als eine binäre Form in der nicht homogenen Variabeln x_1 an, und bilde die Leitglieder v der $n-1$ Formen $\psi(x_2, x_3, \ldots, x_p)$, $\chi(x_2, x_3, \ldots, x_p)$:

$$v_2 = aF_2 - F_1^2, \quad v_3 = a^2F_3 - 3aF_2F_1 + 2F_1^3,$$
$$v_4 = aF_4 - 4F_3F_1 + 3F_2^2, \ldots,$$

dann wird jede Invariante von F, bezw. der Coefficient der höchsten Potenz von x_1 einer jeden Covariante von F, nach Multiplication mit einer geeigneten Potenz von a eine ganze Function von a und den Covarianten des Systems der v (und entsprechend umgekehrt).

Beim Uebergange von den Leitgliedern zu den wirklichen Bildungen tritt an Stelle von a die Urform F selbst.

Will man auch diejenigen Formen mit berücksichtigen, welche noch von den, zu den x contragredienten Variabeln u abhängen, so hat man nur den v eine einfache, in den u und den $x_2, x_3, \ldots, x_p$ lineare Hülfsform zu adjungiren.

Analoges gilt für eine Reihe von Urformen F. Directer und umfassender hat Forsyth*) die nämliche Aufgabe behandelt, und zugleich für eine Anzahl von Einzelfällen des ternären und quaternären Gebietes eine vollständige Durchführung geliefert.

Sei $F = F_n(x_1, x_2, x_3)$ etwa eine ternäre Form, und, wie oben, nach Potenzen von x_1 geordnet; unter $\Phi\left(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{m};\ \overbrace{u_1, u_2, u_3}^{p}\right)$ werde irgend eine invariante Bildung („Ternariante") von F verstanden, deren Entwickelung nach fallenden Potenzen von x_1 und u_1 mit dem Gliede $\Phi_{00}x_1^m u_1^p$ beginne. Dann genügt der Leitcoefficient Φ_{00} von Φ zwei charakteristischen (linearen, partiellen) Differentialgleichungen; „dies sind aber zugleich die charakteristischen Gleichungen für die Leitglieder der Covarianten der (binären) Formenreihe $F_1, F_2, \ldots, F_n$".

Abgesehen von der identischen Covariante u_x wird das System der zu F associirten Ternarianten von $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$ Individuen gebildet. Hängt indessen bereits die Urform F ausser von den x auch noch von den

---

*) Am. J. XII S. 1—60, 115—160 (1889) (Ternarianten).
Cambr. Phil. Trans. XIV S. 409—466 (1889) (Quaternarianten).

Im ternären Gebiete werden die Fälle einer quadratischen, einer kubischen, einer biquadratischen Form, sowie des Systems dreier quadratischen Formen erledigt; überdies werden von solchen Formen, welche ausser den x noch die u enthalten, behandelt: eine lineo-lineare Form, zwei lineo-lineare Formen; eine quadro-lineare, eine kubo-lineare, und endlich eine kubo-kubische Form.

Im quaternären Gebiet wendet der Verf. seine allgemeine Theorie an auf eine und auf zwei (in den x) quadratischen Formen, ferner auf eine (in den x, u) lineo-lineare Form: endlich auf folgende Complexe: einen linearen, sowie das System von zwei und drei linearen, schliesslich auf einen quadratischen Complex.

u ab, so steigt die bez. Anzahl auf $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n'+1)(n'+2)-3$, wenn n' die Ordnung von F in den u bedeutet.

Für vier*) Variable x kommt analog das Leitglied Φ_{000} einer „Quaternariante“ Φ in Betracht, die nach fallenden Potenzen von x_1, u_1, p_1 geordnet ist, wo p_1 eine der sechs Zwischenvariabeln $p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}$ bezeichnet. Φ_{000} genügt jetzt sechs charakteristischen Gleichungen u. s. f.

Das ursprüngliche Verfahren Hermite's, die associirten Systeme auf (lineare) Transformationen der binären Urformen zu begründen, ist bald nachher von Brioschi**) auf Formen mit mehreren Variabeln ausgedehnt worden: eine wirkliche Durchführung in diesem Sinne kennt man für zwei ternäre Einzelfälle, die allgemeine C_3 und eine specielle C_4.

Die erstere***) rührt von Clebsch und Gordan her; die lineare Transformation der x wird vermittelt durch drei, in den u lineare „Zwischenformen“, welche in den x zu den resp. Ordnungen 1, 4, 7 ansteigen.

Jede, aus C_3 ableitbare Form kann mit einer solchen Potenz einer gewissen Covariante G multiplicirt werden, dass sie in eine ganze Function von 7 associirten Formen übergeht, welche aus jenen drei Zwischenformen und noch vier Covarianten bestehen.

Daneben geht eine zweite, gleichberechtigte Darstellung, bei der sich dualistisch die 7 correspondirenden Formen aus drei in den x linearen Zwischenformen und vier „zugehörigen Formen“ (Contravarianten) zusammensetzen.

Als nahe verwandt mit dieser Behandlung der C_3 erweist sich diejenige, welche Gordan†) für die schon mehrfach erwähnte C_4 mit 168 Substitutionen in sich geliefert hat.

Die bisher besprochene rationale Darstellung der invariantiven Formen lässt sich als „Covariantentypik“ bezeichnen. In der That ist der Kern der Methode der, eine Urform F(x) (oder auch eine Reihe solcher)

---

*) Siehe die zweitcitirte Arbeit.

**) Vgl. diesen Ber. S. 94, Anm. ††).

Auf anderem Wege ist eine solche Ausdehnung geleistet von Grassmann Math. Ann. VII S. 538—548 (1874), sowie von Christoffel Math. Ann. XIX S. 280—290 (1882).

***) Math. Ann. I S. 57—89 (1869). Vgl. hiermit die kurz zuvor erwähnte Behandlung von Forsyth.

†) Math. Ann. XVII S. 359—379 (1880).

Die Anzahl der associirten Formen, die identische Zwischenform u_x eingeschlossen, beträgt acht, wie übrigens schon aus der Clebsch-Gordan'schen Arbeit Math. Ann. I 57—89 hervorgeht.

mit einer Potenz einer geeigneten Covariante, geschrieben in cogredienten Variabeln y zu multipliciren derart, dass das Product nach Potenzen ganzer Functionen ξ, η der x, y als neuer Variabeln entwickelbar wird und zugleich die neuen Coefficienten Covarianten von F(x) repräsentiren. Man darf sich dabei auf den Fall beschränken, dass die Substitution hinsichtlich der y eine lineare ist.

Dem steht gegenüber eine „Invariantentypik“; die Urform F(x) (oder eine Reihe solcher) nimmt nach Multiplication mit einer gewissen Potenz einer Invariante R von F, und entwickelt nach Potenzen ganzer Functionen ξ, η der x, (die dann Covarianten von F sein werden), eine Gestalt an, in der die neuen Coefficienten Invarianten von F sind.

Die den Uebergang vermittelnde Transformation ist hier eine gewöhnliche „Tschirnhausen'sche“; es mag indessen hervorgehoben sein, dass man in manchen Fällen die directe (mit Schwierigkeiten verknüpfte) Anwendung derselben ganz umgehen kann, und dass überhaupt die Transformation selbst ganz in den Hintergrund tritt.

Eine grosse Reihe von algebraischen, geometrischen und functionentheoretischen Aufgaben führt, wie leicht zu erkennen, a priori auf eine solche „invariantive“ Gestaltung, die zum naturgemässen Ausdruck bringt, dass schon die Urformen selbst, resp. vorgegebene Functionen derselben in invariantem Lichte erscheinen.

Wiederum hat Hermite*) 1851 zuerst eine derartige Typik für binäre Formen f_{2n+1} ungerader (insbesondere der fünften) Ordnung begründet, indem er zwei lineare Covarianten als neue Variabeln einführte.

Clebsch und Gordan**) haben 1867 auf dem Hermite'schen Wege die Typik einer f_5 bis ins einzelnste erledigt, mit besonderer Berücksichtigung der verschiedenen Ausnahmefälle, die in Folge des Verschwindens gewisser Invarianten eintreten.

Hier zeigt sich deutlich, wie sich eine directe Ausführung der Substitution bei Benützung symbolischer Identitäten vermeiden lässt.

Bedeuten nämlich α_x, β_x zwei, zunächst beliebige Linearformen mit nicht verschwindender Resultante $R = (\alpha\beta)$, und a_x einen symbolischen Linearfactor der Urform $f_l = f_{2n+1}$, so kann man das Product $(\alpha\beta)a_x$ als eine lineare Combination von α_x und β^x hinschreiben. Erhebt man hier beide Seiten auf die lte Potenz, so ist damit bereits das Product $R^l f_l$

*) Vgl. diesen Ber. S. 88 Anm. †).

**) Annali (2) I S. 23—79. Vgl. damit die Darstellung in Gordan's Vorlesungen II §§ 24, 29.

Die Resultate der ersterwähnten Abhandlung werden von Gordan Annali (2) I, 367—372 (1867) auf die Jacobi'sche Modulargleichung 6. Ordnung angewendet.

typisch, wenn auch in roher Form, dargestellt, wo α_x, β_x die neuen Variabeln, und die neuen Coefficienten simultane Invarianten von f_1, α_x, β_x sind.

Letztere werden Invarianten von f allein, sobald man für α_x, β_x zwei lineare Covarianten von f wählt; die weitere Rechnung concentrirt sich darauf, die neuen, vorerst in symbolischer Gestalt auftretenden Coefficienten durch die einfachsten Invarianten des vollen Systems von f auszudrücken.

Das nämliche Verfahren gilt, wie dieselbe Abhandlung lehrt, auch für eine typische Darstellung von binären Formen f_{2n} gerader Ordnung: man hat nur, statt mit Linearformen, mit geeigneten Quadratformen zu operiren: die Tschirnhaustransformation wird zu einer quadratischen. Seien α_x^2, β_x^2, γ_x^2 drei beliebige Quadratformen mit der nicht verschwindenden Resultante $R = (\alpha\beta\gamma)$, und a_x^2 ein symbolischer Quadratfactor von f_{2n}, so ist wiederum $(\alpha\beta\gamma)a_x^2$ eine lineare Combination der drei erstgenannten Formen. Erhebt man auf die nte Potenz, so geht $R^n f_{2n}$ über in eine typische Gestalt C_n mit den drei Variabeln α_x^2, β_x^2, γ_x^2, für die man wieder hinterher Covarianten der Urform f nehmen mag.

Clebsch und Gordan haben die erforderliche Rechnung im Falle der f_6 vollständig durchgeführt.

Lindemann*) hat nachgewiesen, dass C_n, als ternäre Form irgend dreier Variabeln aufgefasst, durch das identische Verschwinden einer gewissen Covariante charakterisirt ist. Die geometrische Deutung dieser Verhältnisse führt ihn dabei zu den Elementen der sogenannten „Apolaritätstheorie" **).

Mit typischen Darstellungen der einfachsten simultanen Binärformen haben sich Bessel***) und Harbordt†) beschäftigt.

Auf einen interessanten Fall dieser Art hatte schon früher Hermite††) hingewiesen durch die Bemerkung, dass zwei binäre kubische Formen einen einfachen typischen Ausdruck finden als erste Ableitungen einer biquadratischen Form, und Cayley†††) hatte hierauf die Transformation 3. Ordnung eines elliptischen Integrals 1. Gattung gestützt.

Clebsch††††) hat der Hermite'schen Angabe ein ausführliches

*) S. M. F. Bull. V, 113—126 (1877): ebenda VI, 195—208 (1878).
**) Cf. II. D, b.
***) Math. Ann. I S. 173—194 (1869).
†) Math. Ann. I S. 210—224 (1869).
††) Journ. f. Math. LVII S. 371—375 (1860).
†††) Siehe die Darstellung bei Clebsch „Binäre Formen" § 101.
††††) Journ. f. Math. LXVII S. 371—380 (1867).

Studium gewidmet; sein Verfahren wurde durch Gundelfinger*) wesentlich vereinfacht.

In ähnlicher Weise kann man drei biquadratische binäre Formen als zweite Ableitungen einer Form 6. Ordnung auffassen, wie Lindemann**) zuerst hervorgehoben hat.

Hermite***) verdanken wir auch das erste analoge Beispiel aus dem ternären Gebiete, insofern er nachweist, wie sich zu drei quadratischen Formen eine kubische herstellen lässt — mit simultanen Invarianten der ersteren als Coefficienten — deren erste Ableitungen mit den gegebenen Formen übereinstimmen. Hierdurch tritt erst der Sylvester'sche Ausdruck†) für die Resultante von drei quadratischen Formen als „Combinante" derselben in's richtige Licht.

Einen durchsichtigen Beweis des Hermite'schen Satzes hat wiederum Gundelfinger††) erbracht. Die simultanen Invarianten der drei Formen erscheinen als rational abhängig von eilf solchen: die Combinantinvarianten von nur zweien.

Gundelfinger†††) hat seine Ergebnisse angewandt auf die quadratische Transformation eines, längs einer ebenen Curve 3. Ordnung hinersteckten elliptischen Integrals 1. Gattung.

Für die Auflösungstheorie der schon mehrfach gestreiften Gleichungen 7. Ordnung mit 168 Substitutionen in sich ist eine typische Darstellung von Bedeutung geworden, welche Gordan††††) dem simultanen System der zugeordneten ternären C_4 und einer beliebigen C_2 („Kegelschnitt") hat zu Teil werden lassen. Von den Covarianten des Systems werden zwei weitere C_2, sowie eine ausgezeichnete C_1 („Gerade") her-

---

*) Math. Ann. VII S. 452—456 (1874).

In den Math. Ann. VIII S. 444—452 (1875) stellt Wiederhold in Gestalt einer identisch verschwindenden Covariante die Bedingung dafür auf, dass zwei f_n Polaren einer f_{n+1} sind.

**) Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 900.

Vgl. die Dissertationen von Friedrich, Giessen (1886) und E. Meyer, Königsberg 1888. Drei f_3 als zweite Ableitungen einer f_5 sind von Igel studirt worden, Wien. Ber. LIII S. 155—184 (1887). Davon wird eine Anwendung gemacht auf die Jerrard'sche Transformation einer Gleichung 5. Ordnung.

***) Journ. f. Math. LVII S. 371—375 (1860).

†) Siehe Seite 87 Anm. ***).

††) Journ. f. Math. LXXX S. 73—85 (1875).

†††) Math. Ann. VII S. 449—451 (1874).

††††) Math. Ann. XX S. 529—552 (1882).

Die Lösung der bezeichneten Aufgabe (§ 14) erfordert diejenige einer Reihe von Hülfsaufgaben, nämlich der typischen Darstellung von 1) zwei C_2 und einer C_1; 2) einer C_4 durch C_2-Büschel und C_1; 3) von drei C_2. Siehe §§ 11, 12, 13.

ausgegriffen: die „Pole“ der C_1 bezüglich der drei C_2 bilden die Ecken des „typischen Coordinatendreiecks“.

Eine merkwürdige Rolle spielt die Invariantentypik nach Stroh*) für das volle System der Combinanten zweier Binärformen f_n, φ_n: die Individuen eines solchen Systems verwandeln sich nach Multiplication mit einer jeweils geeigneten Potenz der Resultante von f_n und φ_n in die Individuen des vollen Systems einer einzigen binären Form der Ordnung $2(n-1)$.

Die Bedeutung der Typik für die Theorie der Syzygien wird im nächsten Abschnitte hervortreten.

II. A, d.

Syzygien.

Die Integritäts- wie Rationalitätsbereiche von Systemen invarianter Formen geben Mittel an die Hand, um in die algebraische Verwandtschaft zwischen den letzteren einzudringen.

Offenbar ist dies aber nur der erste Schritt: es wird sich von neuem darum handeln müssen, die Gesamtheit der in jedem Falle vorhandenen algebraischen Relationen oder „Syzygien“ invariantentheoretisch zu beherrschen, d. h. deren linke Seiten („Syzyganten“) selbst wieder zu Integritäts- resp. Rationalitätsbereichen mit einer endlichen Basis (von „Grundsyzyganten“ oder „fundamentalen Syzyganten“) zusammenzufassen, wobei die Coefficienten Grundformen des ursprünglichen Formensystems sein dürfen.

Von diesen Syzygien „1. Art“ wird man entsprechend zu solchen höherer Art aufsteigen.

Dass diese Aufgabe eine bestimmte ist, d. i. dass in der That die Syzygien jeder Art ein volles System bilden, und dass die Syzygienkette nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbricht, hat freilich erst neuerdings, wie schon früher betont, Hilbert**) nachgewiesen.

Der historische Gang war der, dass man für die einfachsten Urformen

*) Math. Ann. XXXIV S. 321—331 (1889).

Eine andere Art von typischer Darstellung einer binären Form f hat Klein in einer Vorlesung über algebraische Gleichungen (Winter 1891/92) erwähnt. Die Form f lässt sich nämlich nach Multiplication mit ihrer Discriminante in die Gestalt $|a_{ik}+\lambda b_{ik}|$ umsetzen.

Endlich sei noch kurz verwiesen auf die typische Darstellung der elliptischen (und Abel'schen) Integrale, wie sie durch Weierstrass eingeführt, und in neuerer Zeit besonders durch Klein und seine Schüler weiter ausgebildet ist. Vgl. etwa die grundlegenden Arbeiten von Klein in den Math. Ann. XVII S. 133—138 (1880); sowie Leipziger Abh. 1885.

**) Math. Ann. XXXVI S. 473—534 (1890), insbes. S. 534. Siehe oben S. 149.

(beziehungsweise Substitutionsgruppen) eine möglichst umfassende Anzahl von Syzygien zu ermitteln suchte.

Der experimentirende Charakter dieser Untersuchungen bringt es mit sich, dass ihr Verständnis für den Leser kein leichtes ist, da die Gewinnung der Einzelergebnisse in erster Linie durch die individuelle Geschicklichkeit des betreffenden Autors bedingt ist.

Wir müssen uns daher begnügen, einige mehr principielle „Leitmotive“ herauszuheben.

Das nächstliegende Hülfsmittel zur Aufstellung der Syzygien 1. Art ist durch die Hermite'sche Theorie der associirten Systeme gegeben; die Kenntnis des Leitgliedes irgend einer abgeleiteten Form hat ja den rationalen Ausdruck durch die associirten Formen zur unmittelbaren Folge.

Cayley*) und Brioschi**) haben diesen Weg mit Erfolg für die binäre f_5 betreten: hat man erst einmal die Individuen des vollen Systems in der angegebenen Art behandelt, so genügt zu weiterer Ausführung die Handhabung von Eliminationsprocessen.

Die von Cayley erhaltene Tabelle für die Syzygien 1. Art der f_5 ist in einigen Punkten später ergänzt***) worden.

Der weiteren Ausdehnung dieser Methode treten jedoch grosse rechnerische Schwierigkeiten entgegen: zudem gewährt sie nur eine geringe Einsicht in den Aufbau des Syzygiensystems.

Ein anderes Verfahren hat Stephanos†) vorgeschlagen. Innerhalb der Binärformen giebt es ein Gebiet, in dem sich derartige Relationen übersichtlich gruppiren lassen, nämlich das der Functionaldeterminanten (ersten Ueberschiebungen). Bildet man dieselben für je zwei Formen

---

*) Das II., III., V. Memoir enthalten die Syzygien (erster Art) der f_5 bis zum fünften Grade in den Coefficienten: das VIII. Memoir (1867) diejenigen vom sechsten Grade; im X. Memoir (1878) endlich wird auf Grund der „realen“ erzeugenden Function eine Methode entwickelt, für irgend einen gegebenen Grad und gegebene Ordnung ein kleinstes System von Syzyganten herzustellen, aus denen alle übrigen durch lineare Combination hervorgehen. Als Anwendung hiervon wird die Liste der Syzygien bis zum Grade 14 ausgedehnt.

**) Annali (2) XI S. 291—304 (1883).

Vgl. auch die ternären Entwickelungen dess. Verf.: Annali (2) XV, 235 bis 252 (1887). Der Verf. verwendet seine Syzygien zur Ableitung gewisser canonischer Formen der Gleichungen fünfter (und sechster) Ordnung, die für die Auflösung derselben von Wichtigkeit sind.

***) Sylvester, Am. J. IV, 41—62 (1881). Siehe insbes. S. 58.
Hammond, Am. J. VIII S. 19—25 (1885).

†) C. R. XCVI S. 232—235, 1564—1567 (1883).

einer vorgelegten Reihe f, φ, ..., so lassen sich nach Clebsch*) nicht nur die ersten Ueberschiebungen dieser neuen Formen „F“ mit den f, φ, ..., sondern auch die Producte je zweier F auf einfachere Gebilde, d. i. auf erste und zweite Ueberschiebungen der Urformen f, φ, ... zurückführen.

Um dies auf die Syzygien, etwa einer f_6, anzuwenden, geht Stephanos so vor. Das volle System der f_6 setzt sich zusammen aus 4 Invarianten und 8 Covarianten von geradem, sowie aus 1 Invariante (welche nicht weiter in Betracht kommt) und 13 Covarianten von ungeradem Charakter. Die letzteren 13 Formen können vertreten werden durch 13 von den 28 Functionaldeterminanten, zu welchen die 8 geraden Covarianten Anlass geben, während die 15 übrigen leicht als ganze Functionen der 25 Grundformen ausgedrückt werden. Von diesen 15 Darstellungsformeln gelangt man mittels der Sätze von Clebsch zu einem Bestande von Syzygien zwischen geraden Formen, aus denen weitere durch Elimination ableitbar sind. Entsprechend gelangt man zu Syzygien zwischen geraden und schiefen Grundformen.

v. Gall**) hat das „Princip der Functionaldeterminanten“ weiter ausgebildet und verknüpft mit dem Aronhold'schen Processe. Es ermöglicht das nicht nur eine beträchtliche Abkürzung in der Rechnung, sondern giebt auch Mittel an die Hand, aus der reichen Mannigfaltigkeit von Relationen die irreducibeln oder Grundsyzygien herauszuschälen. Gestützt auf die abzählenden Vorarbeiten von englischen Forschern hat er so eine f_6, sowie zwei f_3 und zwei f_4 der eingehendsten Behandlung unterzogen.

Einer mehr directen Methode bedient sich Perrin***). Hatte schon Cayley zur Herleitung von Syzygien zumal die Leitglieder der Covarianten zu Grunde gelegt — zwischen denen ja genau die nämlichen Rela-

---

*) Siehe etwa Clebsch: „Binäre Formen“ § 54. Vgl. damit die Darstellung bei Gordan, Vorlesungen II § 4. §§ 11, 12 wird daselbst eine ausgedehnte Anwendung gemacht auf die zu einem System von quadratischen (binären) Formen gehörigen Syzygien.

**) Math. Ann. XXXI S. 424—440 ($2f_3$; 1888).
Math. Ann. XXXIII S. 197—223 ($2f_4$; 1888).
Math. Ann. XXXIV S. 332—353 ($2f_4$; 1889).
Math. Ann. XXXV S. 63—81 (f_6; 1889).

***) S. M. F. Bull. XI S. 88—107 (1883).
C. R. XCVI S. 426—430, 479—482, 563—565, 1717—1721, 1776—1779, 1842—1845 (1883).
Der nämlichen „Reductionsmethode“ hatte sich schon kurz zuvor Sylvester bedient, um gemeinsame Eigenschaften der Seminvarianten einer binären Form von unbegrenzt hoher Ordnung zu gewinnen. [Am. J. V S. 79—137, (1882 bis 1883)].

tionen herrschen, wie zwischen den Covarianten selbst —, so geht Perrin hierin noch einen Schritt weiter, indem er in den Leitgliedern den ersten Coefficienten der Urform f_n gleich Null setzt, und zeigt, dass durch dieses ihr Residuum das Leitglied (und damit auch die Covariante) eindeutig charakterisirt ist. Perrin verbindet dies Princip mit dem der associirten Formen und illustrirt die Fruchtbarkeit seines Verfahrens an den Beispielen der f_5 und f_6.

Da eine Syzygie (1. Art) eine Relation zwischen Grundformen A, B, ... eines Systems ist, so ist sie sicher irreducibel, wenn sich unter ihren Gliedern wenigstens ein Product von der Gestalt AB vorfindet.

Hammond*) hat nun darauf aufmerksam gemacht, dass in der That alle bis dahin bekannten Syzygien (1. Art) immer mindestens ein derartiges „binäres“ Glied aufweisen, sodass das letztere geradezu zur Charakterisirung der Syzygie dienen kann. Dieser Erfahrungsgrundsatz gewährte bei der Aufstellung neuer Syzygien wesentliche Vereinfachungen.

Indessen stiess zuerst v. Gall**) auf ein Beispiel — die Relation zwischen den acht Invarianten zweier f_4 —, das sich trotz aller Anstrengungen dem Satze Hammond's nicht fügte.

Durch geeignete Specialisirung der Coefficienten konnte Stroh***) das v. Gall'sche Ergebnis direct bestätigen, womit definitiv die allgemeine Gültigkeit jenes Satzes widerlegt war.

Stroh†) hat, in Verallgemeinerung der durch Stephanos und v. Gall gehandhabten Methode der Functionaldeterminanten, eine einheitliche Quelle aller Syzygien (1. Art) in den Relationen zwischen den höheren Ueberschiebungen einer Anzahl von Formen aufgefunden.

Alle derartigen Relationen erscheinen als der Ausfluss eines einzigen Princips (l. c. § 3), einer Art „associativen“ Gesetzes, welches für die durch den Ueberschiebungsprocess definirte Verknüpfung von Grössen allgemein gültig ist.

Im binären Felde darf man sich dabei auf vier (resp. drei) Ausgangsformen f_1, f_2, f_3, f_4 beschränken; man erhält für jeden (positiven) Wert

*) Am. J. VII S. 327—344 (f_6; 1884).
Am. J. VIII S. 19—25 (f_5; 1885).

**) Math. Ann. XXXIV, siehe S. 332 (1889).

***) Math. Ann. XXXVI S. 154—156 (1890).

†) Math. Ann. XXXIII S. 61—108 (1888). Als Beispiel wird der Fall der f_5 durchgeführt. Vgl. dazu noch Math. Ann. XXXIV S. 354—370 (1890). Der Kern der Methode findet sich schon in der voraufgehenden Arbeit dess. Verf.: Math. Ann. XXXI S. 444—454 (1888).
Die Anwendung seiner Theorie auf die f_6 giebt der Verf. Math. Ann. XXXIV S. 306—318 (1889) und XXXVI S. 262—303 (1890).

der „Gewichtszahl“ i (= 1, 2, 3, ...):

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_i \equiv \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^{i-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1 f_4)^\lambda (f_3 f_2)^{i-\lambda} = 0,$$

eine Identität (in den Coefficienten der f), welche bei allen 24 Vertauschungen der f nur drei, wesentlich verschiedene „Typen“ repräsentirt (l. c. § 18).

Vermöge geeigneter Specialisirung der f, sei es, dass einige derselben gleich werden, oder aber in ihrer Ordnung unter eine gewisse Grenze sinken, entstehen hieraus weitere Typen.

Liegt nun ein volles System von Grundformen vor, so hat man dieselben successive nur als Ueberschiebungen von einer möglichst kleinen Anzahl unter ihnen darzustellen.

Jeder Grundform lässt sich so eine bestimmte Syzygie zuordnen. Die Construction eines möglichst vollständigen Syzygiensystems gestaltet sich darnach etwa wie folgt. Nimmt man beispielshalber als Urform eine f_6, mit einem vollen System von 26 Individuen, so resultirt in erster Linie ein Bestand von 20 fundamentalen (oder associirten) Syzygien, die bereits den vollständigen algebraischen Zusammenhang zwischen den 26 Grundformen enthalten; in der That hat man in ihnen die wirkliche Ausführung der Hermite'schen associirten Darstellung für die Grundformen (durch sechs unter ihnen) zu erblicken.

Jede weitere Syzygante ist, bis auf eine Potenz von der Urform im Nenner, ganz und sogar linear mit Grundformen als Coefficienten*), durch jene 20 Syzyganten ausdrückbar. Solcher weiterer Syzyganten waren allmählich durch die Bemühungen von Cayley, Sylvester, Hammond, Stephanos, Perrin und v. Gall 184 irreducible entstanden.

Der verwirrende Gesamtbestand dieser 204 Syzygien ordnet sich nunmehr unter nur eilf**) verschiedene Typen $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ unter: umgekehrt liess sich die Ableitung der 204 Syzygien aus den eilf Typen derart gestalten, dass jede einzelne derselben unabhängig von jeder andern berechnet werden konnte, wodurch die Zuverlässigkeit der Ergebnisse die denkbar grösste wird.

Mit der Eintheilung nach Typen hat Stroh zugleich eine zweckentsprechende Methode zur Prüfung***) der Syzygien verknüpft.

Werfen wir einen Rückblick, und berücksichtigen zugleich noch die

---

*) Siehe den bez. allgemeinen Satz Math. Ann. XXXIII § 22.

**) Siehe Math. Ann. XXXVI S. 262.

***) Cf. II. C, a.

mittels der erzeugenden Functionen erlangten Resultate, so können wir die Theorie der Syzygien, wie sie zur Zeit vorliegt, trotz aller rechnerischen Fülle doch nur als eine, erst in der Entwickelung begriffene bezeichnen*).

Die ausgedehnten Versuche für die Fälle der f_5, f_6, sowie der Simultansysteme der (f_2, φ_3), (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) haben dem Anscheine nach sehr gute untere Grenzen für die Anzahlen der Grundsyzyganten geliefert, aber, wenn man von den trivialen Fällen der f_2, f_3, und zweier f_2 absieht**), ist die Vollständigkeit eines Syzygantensystems, auch nur der 1. Ordnung, mit Sicherheit noch nicht nachgewiesen.

Höhere Gebiete sind noch fast gar nicht berücksichtigt und ebensowenig ist man an die fundamentale Untersuchung, wann in einem gegebenen Falle die Kette der Syzygien abbricht, in praxi herangegangen.

II. A, e.

Abzählende Richtung.

Erzeugende Functionen. Angenäherte und genaue Bestimmung der Anzahlen von Grundformen, Syzygien, Perpetuanten und linear unabhängigen Gebilden.

Die bisher besprochenen Leistungen hinsichtlich des Integritätsbereiches invarianter Bildungen, wie sie vornehmlich aus der Clebsch-Gordan'schen Schule hervorgegangen sind, gipfeln theoretisch in den allgemeinen „Endlichkeitsnachweisen"; praktisch, in der Ermittelung einer oberen Grenze für die Anzahlen der Grundformen eines vollen Systems, verbunden mit jeweiliger wirklicher Aufstellung derselben.

Wenn es nun gelingt, für die gemeinten Anzahlen von anderer Seite her je eine untere Grenze festzulegen, so wird man in allen Fällen, wo sich beide Grenzen decken, im Besitze der exacten Anzahl sein.

Hierin***) erblicken wir die Bedeutung der englischen, von Cayley und Sylvester inaugurirten Arbeiten, die vermöge eigentümlicher abzählender Methoden, welche auf der Entwickelung „erzeugender Func-

---

*) Es sei noch bemerkt, dass Mac Mahon den Syzygien zwischen „Perpetuanten" eine besondere Untersuchung gewidmet hat: Am. J. X S. 149—168 (1887).

**) Einer brieflichen Mitteilung zufolge hat Hilbert für ein System von drei quadratischen Formen ein System von 14 Syzygien aufgestellt und zugleich den Nachweis für die Vollständigkeit desselben erbracht. Cf. Math. Ann. XXXVI S. 534.

***) Vgl. eine diesbezügliche Bemerkung von Sylvester im Amer. J. IV S. 62 (1881).

tionen" basiren, auf die Bestimmung derartiger unterer Grenzen (nebst wirklicher Aufstellung der bezüglichen Formen) hinzielen.

Diese Bestrebungen gehen auf Aufsätze Cayley's*) aus dem Jahre 1856 zurück; wir ziehen sie gleich in der späteren Gestalt heran, in der sie von Cayley**) selbst, sowie vor allem von Sylvester***) von 1877 an wieder aufgenommen wurden.

Es liege etwa eine einzelne binäre Form f_i vor†) mit den Coefficienten a_i. Das Leitglied φ irgend einer Covariante von f, vom Grade j, der Ordnung g, und dem Gewichte $w = \frac{1}{2}(ij - g)$ genügt der charakteristischen Differentialgleichung:

$$\delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots + ia_{i-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = 0.$$

Die Fundamentalaufgabe lautet: „Wieviel linear unabhängige Covarianten (incl. Invarianten) von f giebt es, für die Grad und Gewicht (oder auch Grad und Ordnung) vorgegebene Werte haben?"

Bezeichnet man die Anzahl der Coefficienten eines Leitgliedes φ mit (w : i, j), so hat man dieselbe zur Beantwortung der Frage offenbar nur zu vermindern um die Anzahl derjenigen, linearen und linear unabhängigen Relationen, welche den Coefficienten von φ durch die Identität $\delta\varphi = 0$ auferlegt werden.

Die stillschweigende Annahme Cayley's, dass solcher Relationen

---

*) Siehe Seite 90, 91.

**) Seine neuere Theorie hat Cayley entwickelt im IX. Mem. Phil. Trans. 1870 S. 17—50, und X. Mem. ebd. 1878 S. 603—661.

***) 1877. C. R. LXXXIV S. 240—244, 532—534, 974—975, 1113—16, 1207—11, 1285—89, 1359—62, 1427—30.
C. R. LXXXV S. 991—995, 1035—39, 1091—93.
1878. Phil. Mag. S. 1—12 und Lond. Proc.
Journ. f. Math. LXXXV S. 89—114.
C. R. LXXXVI S. 1437—41, 1491—92.
C. R. LXXXVII S. 242—244, 287—289, 445—448, 505—509, 899—903.
Am. J. I S. 370—378.
1879. Am. J. II S. 71—84, 98—99.
C. R. LXXXIX S. 395—396.
1883. Am. J. V S. 241—250.

Die umfangreichen, auf Grund der Sylvester'schen Methoden von Franklin berechneten Tabellen von erzeugenden Functionen, Grundformen und Syzygien finden sich im Amer. J. II S. 223—251, 293—306 (1879), Am. J. III S. 221—329 (1880), Am. J. V S. 241—250 (1882).

Eine concise Bearbeitung der Hauptsätze Sylvester's und Cayley's über die erzeugenden Functionen hat Franklin geliefert, Am. J. III S. 128—154 (1880).

†) Vgl. die Darstellung bei „Bruno" § 12, die sich an die Cayley'schen Entwickelungen anlehnt.

genau so viel vorhanden seien, als Glieder in $\delta\varphi$, ist zuerst 1878 von Sylvester als allgemeingültig nachgewiesen worden*).

Da $\delta\varphi$ eine Form der a vom Gewichte $w-1$ und des Grades j ist, so beträgt somit der fragliche Abzug gerade $(w-1:i,j)$: „die gesuchte Anzahl ist daher durch die Differenz $\Delta(w:i,j)$:

$$\Delta(w:i,j) = (w:i,j)-(w-1:i,j)$$

gegeben“**).

Der Zahl $(w:i,j)$ begegnet man schon bei der Euler'schen***) Behandlung von Aufgaben aus der „Zahlenteilung“.

Ist nämlich irgend ein Glied von φ von dem Typus $Ca_0^{\alpha_0}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_i^{\alpha_i}$, so sind die Exponenten α ausschliesslich an die beiden diophantischen Relationen gebunden:

$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_i=j, \quad \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+i\alpha_i=w,$$

d. i. „die Anzahl $(w:i,j)$ giebt an, wie oft die Zahl w als Summe von j Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., i mit Wiederholungen gebildet werden kann“.

Nach Euler ist dann die gemeinte Anzahl nichts anderes als der Coefficient von $c^j x^w$ in der Entwickelung der „erzeugenden Function“ Z

$$Z = \frac{1}{(1-a)(1-ax)(1-ax^2)\ldots(1-ax^i)}$$

nach steigenden Potenzen von a.

Entsprechend entnimmt man die Anzahl $\Delta(w:i,j)$ der Entwickelung des Productes $Z(1-x)$.

Indem Euler die Entwickelungen ausführt, nehmen die gewonnenen Sätze die andere Fassung an, dass $(w:i,j)$ auch als Coefficient von z^w in der Entwickelung der Function Z':

$$Z' = \frac{(1-x^{j+1})(1-x^{j+2})\ldots(1-x^{j+i})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)}$$

hervorgeht, aus der durch Streichung des Nennerfactors $(1-x)$ wiederum eine zweite erzeugende Function für $\Delta(w:i,j)$ folgt.

---

*) Phil. Mag. 1878 S. 1—12.
Journ. f. Math. LXXXV S. 89—114 (1878).
Seitdem ist der bezeichnete Satz mit den verschiedenartigsten Hülfsmitteln bewiesen worden vgl.
Capelli, Rom. Acc. L. Mem. XII S. 1—62 (1881).
Hilbert, Math. Ann. XXX S. 15—29, (1887), insbes. S. 20.
Stroh, Math. Ann. XXXI S. 441—443 (1888).
Study, „Methoden ...“ 1889 § 9 (S. 197).

**) Sylvester hat in Mess. (2) VIII S. 1—8 (1878) eine bequeme Regel zur directen Berechnung der Zahl Δ angegeben. Cf. Franklin, Am. J. II S. 187 bis 188 (1879).

***) Introductio in Analysin ..., I § 304.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Nutzen verständlich machen, den die erzeugenden Functionen behufs actueller Ermittelung von Grundformen und Syzygien gewähren, wobei wir uns auf eine der beiden Entwickelungen, etwa diejenige von Z resp. $Z(1-x)$, beschränken können.

Zuvörderst erweist es sich als zweckmässiger, statt j und w die Zahlen j und $g = ij - 2w$ (Grad und Ordnung einer Covariante) als gegebene einzuführen. Bedient man sich demgemäss der Zeichen $(i, j : g)$ und $\Delta(i, j : g)$, so stellt sich nach einfacher Umrechnung die letztere Anzahl dar als Factor von $a^j x^g$ in der Entwickelung der „primitiven (crude) erzeugenden Function" $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\dots(1-ax^{-(i-2)})(1-ax^{-i})}$$

nach steigenden Potenzen von a.

Nimmt man hier die den einzelnen Nennerfactoren correspondirenden Zerlegungen in Partialbrüche vor, und lässt beim nachfolgenden Zusammenfassen alle Potenzen von x mit negativen Exponenten fort — die ja für die vorliegende Frage irrelevant sind —, so bleibt eine Entwickelung, die auch nur positive Exponenten von a aufweist, und welche wiederum rückwärts in die Gestalt des irreducibeln endlichen Bruches gebracht werden kann:

$$\frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\dots(1-a^k)(1-a^{k'})\dots},$$

wo die Exponenten $i, i-2, \dots, k, k', \dots$ des Nenners ganze positive Zahlen (>0) sind.

Diese „*reducirte erzeugende Function**)" lässt sich weiterhin in jedem concreten Falle, durch Multiplication von Zähler und Nenner mit geeigneten Hülfsfactoren — allerdings manchmal erst nach langwieriger Rechnung — umformen in die „*repräsentirende erzeugende Function*". Während sich der endlich bleibende Zähler abermals nach steigenden und positiven Potenzen von a und x anordnen lässt, sind die dreierlei Arten der Nennerfactoren, $(1-a^k)$, $(1-ax^i)$ und $(1-a^2x^l)$ so

*) Wie eine solche am zweckmässigsten und zugleich so, dass sie möglichst wenig Glieder enthält, berechnet wird, hat Cayley am Beispiel der f_7 gezeigt, Am. J. II S. 71—84 (1879).

Bezüglich der repräsentirenden erzeugenden Function bot der Fall der f_7 eine scheinbare Ausnahme dar, als es Sylvester und Franklin nicht gelingen wollte, den Zähler der Function zu einem endlichen zu gestalten. Dieser Widerspruch konnte erst durch Hammond (Math. Ann. XXXVI S. 255—261, 1890) gehoben werden, nachdem v. Gall einige irreducible Invarianten der f_7 aufgefunden hatte, welche Sylvester entgangen waren.

gewählt, dass sie mittels ihrer Exponenten von a und x die einfachsten, sicher irreducibeln Systemformen „repräsentiren".

Diese „Repr. Erz. Function*)" ist zunächst eine **gemeinsame** Quelle für die Anzahl (und den Typus) der Grundformen und Syzygien aller Arten.

Um diese Quelle auszuschöpfen, hat man, vom Grade drei in a beginnend, eine Art „Siebverfahren (tamisage)" vorzunehmen, indem man für irgend eine „Grad-Ordnung" („degorder") j, g zuerst alle möglichen Potenzen und Producte von niedrigeren Grundformen (mit Ausschluss der repräsentirenden) herstellt und deren Anzahl von dem Coefficienten von $a^j x^g$ im Zähler der Repr. Erz. Fct. abzieht. Diese Differenz liefert für die vorgelegte Grad-Ordnung die Zahl der Grundformen, vermehrt um die Anzahl der Syzygien gerader, dagegen vermindert um die Anzahl der Syzygien ungerader Art.

Da der Zähler abbricht, so hat man in der Summe aller positiven Coefficienten, vermehrt um die Anzahl der repräsentirenden Grundformen, auf alle Fälle eine untere Grenze für die Anzahl der Grundformen.

Erklären wir uns an einem Beispiel. Die Repr. Erz. Fct. einer f_5 lautet nach Franklin*):

Nenner: $(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)$

Zähler: $1+a^3(x^3+x^5+x^9)+a^4(x^4+x^6)+a^5(x+x^3+x^7-x^{11})$
$+a^6(x^2+x^4)+a^7(x+x^5-x^9)+a^8(x^2+x^4)+\cdots\cdots-a^{23}x^{11}.$

Hieraus liest man zuvörderst ab, dass succ. für die Gradordnungen (3,3), (3,5), (3,9); (4,4), (4,6); (5,1), (5,3), (5,7); (6,2), (6,4); (7,1), (7,5); (8,2); etc. mindestens je eine Grundform existiren muss. Eine Grundform (8,4) giebt es nicht, da man das Product (3,3).(5,1) zweier niedrigeren Grundformen construiren kann, u. s. f.

Im ganzen wird man so zu mindestens 23 Grundformen geführt: andererseits ergab die ursprüngliche Gordan'sche Behandlung höchstens 23 Grundformen (von genau denselben Grad-Ordnungen): hierdurch ist aber die Frage nach Anzahl und Typus der Grundformen einer f_5 definitiv erledigt.

Um zu den Syzygien 1. Art überzugehen, so ist wiederum die Existenz einer solchen in den Fällen (5,11), (7,9) etc. ohne weiteres ersichtlich. Für die Gradordnungen (6,6), (6,8), (6,10), (6,12), (6,14), (6,18) hat $a^j x^g$ im Zähler je den Coefficienten Null; da aber die drei Grundformen

*) Die englische Abkürzung „Repr. G. F." (von representative generating function) ist im Texte durch die entsprechende deutsche ersetzt worden.
**) Am. J. II S. 224.

(3,3), (3,5), (3,9), zu je zweien multiplicirt, gerade je ein Product zu jenen 6 Gradordnungen ergeben, so ist damit die Existenz von 6 bezüglichen Syzygien (und nicht mehr) erster Art gewährleistet. In derselben Weise werden für den Grad 7 noch 6 Syzygien (7,7), (7,9), (7,9), (7,11), (7,13), (7,15) abgeleitet u. s. f.

Die erste Syzygie 2. Art tritt im Falle (8,14) auf. Die Repr. Erz. Fct. weist hier, mit Hinzuziehung des Nenners, auf 5 linear unabhängige Formen hin, während die Siebung 10 Producte von Grundformen liefert. Nun lassen sich ohne weiteres sechs reducible Syzygien 1. Art hinschreiben, indem man die früher gefundenen (5,11); (6,8), (6,12); (7,9), (7,9), (7,9) resp. mit den Grundformen (3,3); (2,6), (2,2), (1,5), (1,5), (1,5) multiplicirt. Jetzt übertrifft die Zahl 5 die Differenz 10—6 = 4 um eine Einheit: „mithin sind jene 6 Syzygien 1. Art durch eine und nur eine Syzygie 2. Art mit einander verknüpft"*).

Auf diesem Wege hat Sylvester, auf Grundlage der sorgfältigen Rechnungen Franklin's, für eine Reihe von einzelnen und simultanen Urformen untere Grenzen für die Einzel- und Gesamtanzahlen der Syzygien 1. Art angegeben**).

Die Repr. Erz. Fct. bedarf übrigens nach Cayley nur einer geringen Modification, um nicht nur die Anzahlen, sondern auch die wirklichen Bildungen der Grundformen und Syzygien zu liefern***).

Hammond†) ist in der Theorie der Syzygien noch einen Schritt weiter gegangen. Kennt man einmal für eine Urform das volle System der Grundformen genau, so lässt sich die Repr. Erz. Fct. für die Grundformen zu einer solchen für die Syzygien ausgestalten, indem man Zähler und Nenner mit solchen Factoren multiplicirt, dass nunmehr der Nenner gerade das Product der, sämtlichen Grundformen correspondirenden Factoren $(1-a^j x^g)$ wird. Hieraus kann für jede beliebige Gradordnung eine obere Grenze für die Syzygien 1. Art abgelesen werden, die dann mit der Sylvester'schen unteren Grenze zu vergleichen ist: bei den ausgeführten Einzelfällen (f_5 und f_6) zeigt sich, abgesehen von

*) Auf die Nichtbeachtung dieser Syzygien zweiter Art ist der irrtümliche Schluss Cayley's (II. Mem. 1856) zurückzuführen, demzufolge eine f_5 kein endliches volles System von Grundformen zulassen sollte. Siehe Cayley selbst im VIII Mem. Phil. Trans. 1870 S. 513.

**) Am. J. IV S. 41—61.

***) Dasselbe leistet die „reale erz. Fct." Cayley's (cf. X Mem.), die aus der repr. erz. Fct. entsteht, indem die in ihr auftretenden Grundformen durch Buchstaben a, b, c, . . . vertreten werden. Siehe dazu die Bemerkung Sylvester's Am. J. IV S. 57.

†) Am. J. VIII S. 19—25 (1885).

einigen Ausnahmen, bei denen directe Rechnung entscheiden musste, Uebereinstimmung beider Grenzen.

Ehe wir die Repr. Erz. Fct. Sylvester's verlassen, haben wir noch einer merkwürdigen Erscheinung zu gedenken, die sich gerade in all' den Fällen gezeigt hat, wo eine definitive Bestimmung der Grundformen ermöglicht worden ist. Es ist dies das sogenannte „Fundamentalpostulat"*) Sylvester's, demzufolge für jede Gradordnung das Auftreten von Grundformen und dasjenige von Syzygien einander ausschliessen sollten, wodurch sich die Theorie der Formen wesentlich vereinfacht hätte.

Hammond**) stiess jedoch zuerst auf ein Beispiel (bei der Gradordnung (5,13) einer f_7), welches jenem Postulat widersprach, und erkannte bald darauf***) den Grund dieser Ausnahmen in einer recurrirenden Identität, welche unmittelbar aus der Differentialgleichung für die Quellen hervorging.

Es sei noch kurz erwähnt, dass auch für besondere Arten invarianter Bildungen eigentümliche erzeugende Functionen construirt worden sind; so von Mac Mahon für die sogenannten „Perpetuanten" †). Hier gestattet die Function, die Anzahlen der irreducibeln Gebilde unmittelbar anzugeben. Stroh††) hat nicht nur einen durchsichtigen Beweis dafür gegeben, mittelst einer eigenartigen Weiterführung der Aronhold-Clebsch'schen Symbolik, sondern auch für diese Anzahlen einen einfachen Ausdruck ermittelt und zudem gezeigt, wie sich die bezüglichen Perpetuanten symbolisch ohne weiteres hinschreiben lassen.

Mit der Ableitung theoretischer Formeln für obere Grenzen von Grad und Ordnung der invarianten Bildungen im binären Gebiete haben sich Jordan und Sylvester beschäftigt.

Jordan†††) geht von den Relationen zwischen den Covarianten dritten Grades aus, deren sich Gordan zur Begründung seines Endlichkeitsbeweises bedient hatte, und stützt sich des weiteren wesentlich auf das

---

*) Siehe etwa die Darstellung bei Franklin Am. J. III S. 130—132.

**) London Proc. XIV S. 85—88, Am. J. V S. 218—228 (1883).
Vgl. dazu die Bemerkungen von Cayley: London Proc. XIV S. 88—91. Hopk. Circ. II S. 85—86, 150, III S. 13 (1883, 1884).

***) Siehe die zweitcitirte Arbeit.

†) Am. J. VII S. 26—47 (1884), cf. II. C, a, α.

††) Math. Ann. XXXVI, l. c. §§ 10, 11.

†††) Liouv. J. (3) II S. 177—233 (1876), V S. 345—379 (1879).
Vgl. dazu noch die Noten in den C. R. LXXX S. 875—877, 1160—1161, (1875), LXXXI S. 495—498 (1875), LXXXII S. 269—270 (1876), LXXXVII S. 202—204 (1878).
In der ersten Abhandlung giebt der Verf. eine übersichtliche Darstellung der älteren Gordan'schen Theorie.

Verfahren Gordan's, aus den beiden vollen Systemen von zwei binären Formen deren simultanes System herzuleiten, wobei die beizubehaltenden Ueberschiebungen durch die kleinsten (positiven) Lösungen zweier diophantischen Gleichungen definirt werden. Diese Lösungen hat Jordan zahlentheoretisch näher untersucht, und successive immer niedrigere Anzahlen als obere Grenzen erhalten. Um sein Endresultat*) anzugeben, so denke man sich eine beliebige Reihe von Urformen vorgelegt, deren Ordnungen $\leqq$ n seien. Jede Covariante des vollen Systems wird linear zusammengesetzt aus Producten von dreierlei Formentypen, für deren Grad und Ordnung jeweils obere Grenzen existiren. Diese letzteren sind einfache ganze Functionen von n, enthalten aber sämtlich einen Factor $3^{\varrho+1}$, wo ρ transcendent bestimmt wird, als grösste ganze Zahl des Bruches $1+\frac{\lg\frac{1}{4}n}{\lg\frac{4}{3}}$.

Beispielsweise ergeben sich, den Fällen $n=1$ bis 12 (excl. 11) entsprechend, für die Ordnung der bezüglichen Covarianten die oberen Grenzen 1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26, 34.

Diese Grenzen werden sogar alle thatsächlich erreicht, wie die Sylvester-Franklin'schen Tafeln für die Systeme einer einzelnen Form f_n zeigen**).

Sylvester***) hat ohne Beweis ähnliche Formeln gegeben, die noch einfacher sind, da sie nur rationale Zahlencoefficienten enthalten, dafür aber zu wesentlich höheren Anzahlen führen.

Sodann hat Sylvester†) ein Verfahren mitgeteilt, für die Gesamtanzahl der Bildungen eines vollen Systems einer Urform gerader Ordnung eine ziemlich niedrige Grenze zu gewinnen.

Die Grenze hängt von der algebraischen Summe der Coefficienten seiner Repr. Erz. Fct. ab.

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit der Berücksichtigung der Erweiterungen, welche der Cayley-Sylvester'sche Satz „über die Anzahl der linear unabhängigen Bildungen (des binären Gebietes) von vorgegebenen Gradordnungen“ auf Formen mit mehreren Reihen von n Variabeln erfahren hat.

Die vorbereitenden Grundlagen für eine Lösung dieses wichtigen

---

*) Siehe die zweitcitirte Abhandlung.

**) Am. J. II S. 223—251.

***) Proc. of London XXVII S. 11—13 (1878).

†) C. R. LXXXVI S. 1437—1441, 1491—1492, 1519—1522.

und schwierigen Problem's hat Capelli*) gelegt. Der Satz, von dem er ausgeht, lehrt eine Form F von n Reihen von n Variabeln:

$$x_i', \ x_i'', \ x_i''', \ \ldots, \ x_i^{(n)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nach Potenzen der Determinante Δ der x so zu entwickeln, dass die Coefficienten Polaren von Formen werden, welche eine Variabelnreihe weniger enthalten und ihrerseits gleichfalls aus F durch blosse Anwendung von Polarenprocessen entstehen.

Diese Polarenprocesse beziehen sich auf die Variabeln und setzen sich aus lauter solchen von der Gestalt $D_{xy} = \Sigma y_i \frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$ mittelst Wiederholung und Combination zusammen.

Wendet man jenen Fundamentalsatz auf eine Bildung φ an, die von einer Reihe von Urformen $f_1, f_2, \ldots$ mit einer beliebigen Anzahl von (cogredienten) Variabelnreihen invariant abhängt, so lässt sich φ darstellen als ein Aggregat von Producten „$\Omega\Phi$" identischer Covarianten mit invarianten Bildungen von gewissen (homogenen und isobaren) Formen Φ, welche höchstens $n-1$ Variabelnreihen enthalten, und den $n-1$ charakteristischen Differentialgleichungen

$$\text{I} \quad D_{x'x''}\Phi = 0, \quad D_{x'x'''}\Phi = 0, \quad \ldots, \quad D_{x'x^{(n)}}\Phi = 0$$

oder auch den folgenden**)

$$\text{I}' \quad D_{x'x''}\Phi = 0, \quad D_{x''x'''}\Phi = 0, \quad \ldots \quad D_{x^{(n-1)}x^{(n)}}\Phi = 0$$

genügen.

Die ursprüngliche Aufgabe kommt nun vor allem auf die einfachere zurück: die Anzahl der linear unabhängigen Formen Φ — die man noch durch Multiplication mit je einer geeigneten Potenz von Δ mit einem constanten Gewicht, etwa Null, ausstatten kann — zu ermitteln, welche von vorgegebenen Graden in den Coefficienten der f und von vorgegebenen Ordnungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ in den bezüglichen Reihen der x sind.

Bezeichnet man mit $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ die Anzahl der willkürlichen Coefficienten von Φ, so beweist der Verfasser, dass die denselben durch

*) „Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche", Mem. Rom. Acc. L. XII S. 1—72 (1882).

Eine nähere Ausführung findet sich im Batt. G. XX S. 293—301 (1882). Für gewisse Arten von invarianten Bildungen, z. B. solchen, die in allen Variabelnreihen von gleicher Ordnung sind, hatte der Verf. schon vorher elegante Anzahlformen abgeleitet, Batt. G. XIX S. 87—116 (1881).

Eine Ausdehnung des Text-Problems auf Formen mit mehreren Reihen von cogredienten Variabeln, welche von einander unabhängigen linearen Substitutionen unterworfen werden, hat derselbe Verf. ausgeführt in Mem. Rom. Acc. L. XV (1883). Auch hier kommt es darauf an, alle ganzzahligen Lösungen eines, bei der Partition von Zahlen auftretenden Gleichungssystems aufzufinden. Die bez. Hülfssätze sind zusammengestellt im Batt. G. XXI S. 343—355 (1883).

**) Siehe die zweitcitirte Arbeit S. 297.

eine einzelne der Gleichungen I′, etwa die erste, auferlegten Bedingungen linear unabhängig von einander sind, und dass ihre Anzahl durch $\varphi(\vartheta_1 - 1, \vartheta_2 + 1, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n)$ bestimmt wird.

Darin ist eine unmittelbare Verallgemeinerung des Cayley-Sylvester'schen Satzes ausgedrückt*).

Hingegen erweisen sich die durch zwei und mehrere der Gleichungen I′ involvirten Bedingungen als nicht mehr linear unabhängig von einander, und Capelli begnügt sich daher mit der Angabe einer unteren Grenze für die in Rede stehende Anzahl.

Eine vollständige Lösung der letzteren Aufgabe und weiterhin zugleich der ursprünglichen verdankt man Deruyts**).

Deruyts umgeht die directe Benutzung der Differentialgleichungen, indem er die Frage nach der Anzahl der Φ abermals zurückführt auf diejenige ihrer „Leitglieder".

Schreibt man letztere symbolisch, so erkennt man, dass sie sich hinsichtlich der vorliegenden Frage ersetzen lassen durch „Seminvarianten" von linearen Urformen: dann aber genügt die Untersuchung eines Systems linearer diophantischer Gleichungen, deren Lösungen, von einer Gesamtanzahl „Π", als linear unabhängig nachgewiesen werden.

Andererseits lässt sich beweisen, dass die Anzahl der ursprünglich gesuchten φ übereinstimmt mit derjenigen der oben erwähnten Productformen $\Omega\varphi$.

Greift man nun eine einzelne solche Form Φ mit bestimmten Gewichtszahlen heraus, so dient zur Bestimmung der zugehörigen Anzahl „Π'" von Formen $\Omega\Phi$ ein Verfahren, welches dem oben bezüglich Π angedeuteten durchaus analog ist.

Bildet man daher schliesslich die Summe der Producte je zweier der berechneten Zahlen Π, Π' für alle möglichen Combinationen von Gewichtszahlen der Φ — welch' letztere wiederum durch die Lösungen

---

*) Eine gewisse Ausdehnung des in Rede stehenden Satzes auf ein System binärer Urformen rührt von Study her („Methoden . . ." S. 100). Sind die r Urformen von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_r$, so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Covarianten mit den Gradzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gleich

$$\binom{n_1+p_1}{p_1}\binom{n_2+p_2}{p_2}\cdots\binom{n_r+p_r}{p_r}.$$

Auch für höhere Gebiete existirt eine entsprechende Anzahl für die sogenannten „Normalcovarianten". Vgl. noch Stroh, Math. Ann. XXII, bes. S. 405 (1883).

**) „Théorie générale . . ." 1891 Chap. VII. Hier geschieht die Abzählung nur für eine gewisse Gattung von Covarianten, während sie Bull. Belg. (3) XXI S. 437—451 (1891) allgemein ausgeführt wird. Im übrigen vgl. II. D, a.

einer diophantischen Gleichung, der sogenannten „Gewichtsgleichung“ charakterisirt sind — so hat man damit in der That eine Regel zur Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen invarianten Bildungen φ, die gegebene Grade in den Coefficienten der Urformen und gegebene Ordnungen in einer beliebigen Anzahl von (cogredienten) Variabelnreihen besitzen: dabei darf diese letztere Anzahl kleiner, gleich oder grösser sein als diejenige der in den Urformen auftretenden Variabelnreihen.

II. B.

Irrationale Fragestellungen.

In den bislang erörterten Untersuchungen ist fast ausschliesslich der rationale bezw. ganz-rationale Gesichtspunkt massgebend gewesen.

Allerdings haben sich schon von Anfang an, insbesondere durch den Einfluss der Geometrie, irrationale Fragen vereinzelt aufgedrängt; doch ist man erst neuerdings zu einer systematischen Einführung irrationaler In- und Covarianten veranlasst worden, und eine durchgebildete Theorie dieses Gegenstandes existirt überhaupt noch nicht.

Es lassen sich historisch zwei Strömungen unterscheiden. Einmal liegt (wie bei den quadratischen Formen) die durch praktische Bedürfnisse hervorgerufene Frage nach gewissen invarianten „canonischen“ Gestalten von gegebenen Formen zu Grunde, zu deren Durchführung die Auflösung algebraischer Hülfsgleichungen erforderlich ist.

Andererseits wird innerhalb der Theorie der invarianten Bildungen eine Art „Umkehrproblem“ aufgeworfen, indem man sich eine oder mehrere der aus Urformen abgeleiteten Bildungen — unter der stillschweigenden Bedingung des Erfülltseins der ev. zwischen ihnen herrschenden Relationen — als beliebig gegeben vorgelegt denkt und nunmehr rückwärts hieraus die zugehörigen Stammformen zu ermitteln sucht. Es wird diese Aufgabe im allgemeinen eine mehrdeutige sein, und es wird sich dann darum handeln, in erster Linie die Anzahl der jeweils zugehörigen Stammformen festzustellen, weiterhin aber auch die Gleichungen, von deren Auflösung jene abhängen.

Freilich ist diese zweite Art von Problemen — die uns als notwendige Ergänzung zur Theorie der rationalen Invarianten und ihrer Syzygien eine Zukunft zu haben scheint — nur erst in wenigen vereinzelten Fällen verfolgt worden.

II. B, a.

Canonisirung von Formen.

Die Grundlagen dieser Disciplin*) gehören der früheren Periode an. Um mit den binären Formen zu beginnen, so zeigten Sylvester und Cayley, wie sich dieselben als lineare Combinationen von Potenzen linearer Ausdrücke $x-\alpha$ darstellen lassen. Es existiren einfache Covarianten („Canonizanten"), deren Wurzeln die gesuchten Werte α sind: in einzelnen Fällen liess sich auch erkennen, welche Modificationen eintreten, wenn einige der α einander gleich werden.

Eine, alle Ausnahmefälle umfassende Abrundung der Theorie ist erst später von Gundelfinger**) unter Heranziehung analytischer Hülfsmittel gegeben worden; indem er den partiellen Differentialausdruck für die $k$te Ueberschiebung zweier Binärformen in geeigneter Weise umwandelt***), ist er in der Lage, eine Reihe bekannter Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die der Invarianten zu übertragen.

Um sein Endresultat mitzuteilen, seien $a_0, a_1, \ldots$ die Coefficienten einer Urform f_n. Man bilde dann die Kette der „canonisirenden" Covarianten $C, C', C'', \ldots$ mit den Leitgliedern:

$$a_0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \ldots$$

Soll f_n als Summe von genau k $n$ten Potenzen darstellbar sein, so hat zunächst $C^{(k)}$ (aber nicht $C^{(k-1)}$) identisch zu verschwinden. Dann existirt eine Form Γ_k, deren $k$te Ueberschiebung mit f identisch Null ist: die Gleichung $\Gamma_k = 0$ muss ausserdem lauter ungleiche Wurzeln α besitzen.

---

*) Es war erlaubt, den Text so knapp zu halten, da gerade dieses Kapitel in den Lehrbüchern von Clebsch, Salmon, Bruno, Gordan ausführlich behandelt wird. Wie die Darstellungen von Sylvester und Cayley auf mehrfach lineare Formen ausgedehnt werden können, hat le Paige eingehend verfolgt: Belg. B. (3) II S. 40—53, C. R. XCII S. 1048—1049, 1103—1105, XCIII S. 264 bis 265, 509—512 (1881); C. R. XCIV S. 31—32, 69—71, 424—426, Tor. Atti XVII S. 299—320 (1882); Rom. Acc. P. N. XXXV S. 54—84, 140—145, Lisboa Jorn. de sciencias math. . . . IX (1883).

**) Gött. Nachr. 1883 S. 115—121, und ausführlicher Journ. f. Math. C S. 413—424.

***) Die gemeinte Identität lautet für die $k$te Ueberschiebung von zwei Formen f_n und φ_m in der nicht homogenen Variabeln x:

$$\frac{1}{k!}(f,\varphi)^k = \binom{n}{k} f \frac{d^k\varphi}{dx^k} - \binom{n-1}{k-1}\binom{m-k+1}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \binom{m}{k}\frac{d^k f}{dx^k}\varphi.$$

Vgl. dazu die Bemerkung von Hilbert, Math. Ann. XXX S. 15.

Umgekehrt sind diese beiden Bedingungen auch hinreichend für die geforderte Darstellung als Summe von Potenzen $(x-\alpha)^n$.

Fallen dagegen die Wurzeln von $\Gamma_k = 0$ zum Teil zusammen, so ergiebt sich — durch ein Verfahren der Partialbruchzerlegung — für f_n ein Ausdruck als Summe von gewissen $k_i$ten ($k_i \leq n$) Potenzen, jede noch mit einer Ergänzungsform der Ordnung $n - k_i$ multiplicirt.

Ein entsprechender Satz gilt für eine simultane Darstellung von n Formen nter Ordnung.

Sehen wir indessen von den Ausnahmefällen (wo die α teilweise coincidiren) ab, so findet sich der Kern des obigen Kriteriums, die Einführung der Form Γ_k, bereits bei Rosanes*), der die letztere als conjugirt zu f_n bezeichnet.

Rosanes hat zugleich seine Untersuchungen ausgedehnt auf n binäre f_n, sowie auf Formen höherer Gebiete. Geometrisch gesprochen, ist eine Curve (Fläche) nter Ordnung conjugirt zu jedem ihrer, n-fach gezählten Punkte. Die Potenzdarstellungen von Formen treten danach in die innigste Beziehung zur Theorie der sogenannten „Polpolygone resp. -polyeder“ etc., die dadurch eine wesentliche Bereicherung erfährt.

Auf ganz anderem Wege ist Reye**) zu diesem Zusammenhange gelangt, indem er sich ursprünglich die Frage vorlegte, durch welche geringste Anzahl von discreten Massenpunkten ein gegebener Körper hinsichtlich seiner auf eine beliebige Ebene bezogenen nten Momente ersetzt werden kann.

Die Gleichung $F_n = 0$ einer Fläche als Summe von R vollen Potenzen darstellen, heisst dann, die Fläche als „nte Momentenfläche“ eines, durch k Punkte ersetzbaren Körpers aufzufassen, d. i. als diejenige Fläche, bezüglich deren Berührungsebenen das nte Moment des Körpers verschwindet.

Mit diesen Mitteln hat Reye***) nicht nur z. B. einen einfachen geometrischen Beweis für das sogenannte „Pentaeder“ einer Fläche 3. Ordnung gegeben, d. i. für die zuerst von Sylvester bemerkte eindeutige Darstellung†) einer kubischen quaternären Form als Summe von fünf

---

*) Journ. f. Math. LXXV S. 172—176 (1873), LXXVI S. 312—330 (1873), Math. Ann. VI S. 264—312 (1873).

Der Zusammenhang zwischen den canonischen Formen und der Apolaritätstheorie ist in dem Abschnitt über Combinanten II. D, b eingehender dargelegt.

**) Journ. f. Math. LXXII S. 293—326 (1870).

***) Journ. f. Math. LXXVIII S. 114—122 (1874).

†) Siehe die historischen Bemerkungen in der Clebsch-Biographie, Math. Ann. VII S. 17.

Kuben, sondern auch gezeigt, in welcher Richtung dieser Satz einer Verallgemeinerung fähig ist*).

Welche Verwandtschaften zwischen den Gesichtspunkten von Rosanes und Reye bestehen, hat Referent**) ausführlich dargelegt, und insbesondere nachgewiesen, wie die canonischen Darstellungen in höheren Gebieten vermöge der Theorie der symmetrischen Functionen auf solche in niedrigeren Gebieten zurückgeführt werden können.

Um zu den binären Formen zurückzukehren, so hat in jüngster Zeit Bauer***), im Anschluss an Rosanes, für die binären Formen f_{2n} gerader Ordnung als Summe von $n+1$ Potenzen einen eleganten Ausdruck abgeleitet, in dem alle auftretenden Formen einfache Covarianten von f sind.

Hilbert†) hat, vermöge eines eigentümlichen Differentiationsprocesses, ein durchsichtiges Invarianten-Kriterium dafür ermittelt, dass eine vorgelegte binäre Form die volle Potenz einer andern ist.

Hilbert††) verdankt man ferner die Unterordnung der verschiedenartigsten canonischen Darstellungen unter ein allgemeines Princip, wobei

---

*) Journ. f. Math. LXXVIII S. 123—129 (1874).

**) „Apolarität und rationale Curven", Tübingen 1883.

***) Münch. Ber. 1892 S. 3—20.

†) Math. Ann. XXVII S. 158—160 (1886). Wegen der Methode vgl. II. C, b, δ.

Für die einfacheren Fälle hatte schon vorher (1883) Maisano die Covariante angegeben, deren identisches Verschwinden das Kriterium für die in Rede stehende Potenzdarstellung ist: Rom. Acc. L. (3) VII S. 231—233. So hat man für f_n als nte Potenz: $H_x^{2n-4} = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \equiv 0$, für f als $\frac{n}{2}$ te Potenz: $T = (aH) a_x^{n-1} H_x^{2n-5} \equiv 0$ etc.

††) Leipz. Ber. 1885 S. 427—438, Math. Ann. XXVIII S. 381—446 (1887). Wegen des Zusammenhanges mit der Normirung linearer Differentialgleichungen vgl. II. C, b, β.

Ist $n = 2i$ die Ordnung von f, so macht sich für das Studium der Hülfsgleichung die Unterscheidung von vier Hauptfällen notwendig, jenachdem die beiden Zahlen i und ν gerade resp. ungerade sind.

In dreien dieser Fälle besitzt die Hülfsgleichung im allgemeinen $\nu+1$ verschiedene Wurzeln λ, im letzten jedoch (wenn i gerade, ν ungerade) $\frac{\nu+1}{2}$ Paare gleicher Wurzeln λ.

Die zugehörigen Formen φ, deren es in allen vier Fällen $\nu+1$ linear von einander unabhängige giebt, werden durch Determinantenränderung erhalten.

Umgekehrt lassen sich für ein vorgelegtes System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen νter Ordnung die Kriterien dafür aufstellen, dass sie ein Formensystem φ bilden; sie bestehen in der Existenz gewisser linearer Relationen zwischen den quadratischen Invarianten und Covarianten des gegebenen Formensystems.

Im Journ. de Math. (4) IV S. 249—256 (1888) hat Hilbert an treffenden Beispielen (Formen dritter Ordnung) gezeigt, mit welchem Erfolge sich sein Princip auf das ternäre und quaternäre Gebiet übertragen lässt.

der irrationale Kern des Ganzen deutlicher, als bisher, hervortritt; es werden alle Formen φ_ν (von einer Ordnung ν) gesucht, deren — passend hoch genommene — Ueberschiebung über eine Stammform f (sc. von gerader Ordnung) sich von der letzteren nur um einen constanten Factor λ unterscheidet. Dieses λ, eine irrationale Invariante von f, hängt von einer Hülfsgleichung $(\nu+1)$ter Ordnung, mit rationalen Invarianten als Coefficienten, ab, die sich in eine charakteristische Determinantengestalt bringen lässt. Der Verfasser ist in der Lage, die verschiedenen Ausartungen der Urform f zu verfolgen, die entstehen, wenn jene Gleichung zusammenfallende Wurzeln λ aufweist.

Die Formen φ erscheinen als irrationale Covarianten.

Auf die mannigfachen canonischen Formen, welche die Gleichungstheorie vermöge Resolventenbildung und Tschirnhausentransformation für ihre Zwecke aufgestellt hat, kann hier nur hingewiesen werden: als einem specifischen Invariantenproblem entspringend, seien zwei eigentümliche Formen für die f_6 erwähnt, welche von Brill*) herstammen.

---

*) Math. Ann. XX S. 330—357 (1882).

Die gemeinten canonischen Formen sind: $x^6+2px^5+3qx^4+4rx^3+3x^2+2px+q$ und $x^6+ax^4+bx^3+cx^2+1$. Man gelangt zu denselben auf folgende Art.

Unter den durch lineare Combination von drei binären biquadratischen Formen entstehenden Formen befinden sich einmal drei Producte quadratischer von der Art: $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_2\varphi_3$, $\varphi_3\varphi_1$, sodann aber vier Quadrate $\psi_1^2, \ldots, \psi_4^2$. Sind x_i, y_i die Verschwindungswerte von φ_i; ε_k, η_k die von ψ_k, so geht die „Functionaldeterminante" W_6, d.i. die Determinante der zweiten Ableitungen der drei vorgelegten Formen mittels der Substitutionen $x' = \frac{x - x_i}{x - y_i}$ resp. $x' = \frac{x - \varepsilon_k}{x - \eta_k}$ in jene canonischen Gestalten über. Vgl. die Darstellung beim Referenten „Apolarität ..." S. 312. Brill verwendet die canonische Form unter anderem zu einer übersichtlichen Discussion der Realitätsverhältnisse der Wurzeln einer Gleichung sechster Ordnung.

Eine andere canonische („typische") Gestalt der Formen f_6 findet sich, wie beiläufig erwähnt sei, bei Maschke und Brioschi, nämlich: $x^6+\alpha x^4+\beta x^3+\frac{\alpha^2}{4}x^2+\gamma x+\delta$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Invarianten von f_6 bedeuten. Die Wurzeln der Gleichung $f_6=0$ erscheinen dann ausgedrückt durch einfache ganze Functionen von vier, zur f_6 gehörenden ϑ-Functionen. Siehe Maschke, Gött. N. 1887. S. 421—424, Math. Ann. XXX S. 496—515 (1887), Rom. Acc. L. Rend. (4) IV S. 181—184 (1888); Brioschi: Bemerkungen zur letztgenannten Arbeit ebenda, sowie ausführlicher Acta. Math. XII S. 83—101 (1888). Eine zweite typische Gestalt der f_6, bei der die Coefficienten der fünften und dritten Potenz der Unbekannten verschwinden, hatte Brioschi schon früher mit Hülfe von Syzygien gewonnen: Annali di Mat. (2) XI S. 291—304 (1883).

In dem besonderen Falle, wo eine f_6 die Hesse'sche Covariante einer f_5 ist, kann dieselbe durch lineare Substitution auf die canonische Form der Multiplicatorgleichung 6. Ordnung gebracht werden, aber nicht auf diejenige der entsprechenden Modulargleichung (Lindemann, Math. Ann. XXI S. 71—109, 1883).

Dagegen gedenken wir zum Schlusse einer charakteristischen canonischen Darstellung als Quadratsummen der sogenannten „definiten" Formen $n$ter Ordnung von m Variabeln, d. i. derjenigen Formen mit reellen Coefficienten, welchen für alle reellen Wertsysteme der Variabeln nur einerlei Vorzeichen zukommt. Zu den bekannten Fällen $n = 2$, m beliebig, und $m = 2$, n beliebig hat Hilbert*) noch einen dritten: $n = 4$, $m = 3$ hinzugefügt, wo eine Darstellung (mit drei willkürlichen Parametern) als Summe von drei Quadraten existirt.

Die Bedeutung dieses Ergebnisses tritt aber erst dadurch an's Licht, als Hilbert der Nachweis gelingt, dass es bei allen übrigen Combinationen der Zahlen n, m Fälle von definiten Formen giebt, die eine Darstellung als Summe von Quadraten nicht zulassen.

II. B, b.

Rückkehr von Covarianten zu den Urformen. Irrationale In- und Covarianten.

Das berühmte Problem der Zahlentheorie, alle „nichtäquivalenten", d. h. vermöge (ganzzahliger) linearer Substitutionen nicht in einander überführbaren Typen quadratischer binärer Formen von gegebener Determinante zunächst der Anzahl nach aufzustellen, hat die anfängliche Entwickelung der Invariantentheorie nicht unwesentlich beeinflusst. Indem Hermite**) die Verallgemeinerung jenes Problems auf binäre Formen höherer Ordnung in Angriff nahm, war er genötigt, die formentheoretischen Methoden weiter auszubilden.

Andererseits führte die Geometrie auf derartige „Rückkehrfragen". Eines der bemerkenswertesten und ersten Beispiele bietet die ebene Curve dritter Ordnung $C_3 = 0$, zu der eine covariante Curve $H_3 = 0$ gehört (welche aus der ersteren die Wendepunkte ausschneidet). Hesse entdeckte nicht nur die letztere, sondern fand auch, dass umgekehrt zu einer, als gegeben gedachten H_3 drei verschiedene C_3 gehören: die bezügliche Gleichung 3. Ordnung bildet einen Angelpunkt der ganzen Theorie.

Eine systematische Behandlung solcher Fragen hat in der Theorie der Formen erst später Platz gegriffen.

Im binären Gebiete hat sich, besonders auch rücksichtlich der zahlreichen geometrischen Anwendungen, das Problem in den Vordergrund gedrängt, alle nicht äquivalenten Typen von Formenbüscheln $f_n + k\varphi_n$ aufzusuchen, deren Functionaldeterminante (f, φ) eine vorgegebene Form

*) Math. Ann. XXXII S. 332—350 (1888).
**) Siehe Einleitung S. 88.

$f_{2(n-1)}$ der Ordnung $2(n-1)$ ist. Dass dieses Problem in der That nur eine endliche Anzahl von Lösungen besitzt, d. h. dass zwischen den Coefficienten der $f_{2(n-1)}$ keinerlei Relationen existiren, hat zuerst Brill*) nachgewiesen.

Die Erledigung des einfachsten Falles $n = 3$ mit zwei Lösungen stiess nur auf geringe Schwierigkeiten**). Wesentlich anders liegt die Sache schon beim nächsten Falle $n = 4$, der zu fünf Lösungen führt***). Die Gleichung 5. Ordnung, von welcher dieselben abhängen, hat Stephanos****) in invariantentheoretischer Gestalt aufgestellt: den inneren Zusammenhang der fünf Formenbüschel $f + k\varphi$ untereinander sowie andererseits mit der Theorie der quadratischen Formen und der Gleichungen 6. Ordnung hat Brill†) erforscht, weiterhin der Referent††) denjenigen mit der Theorie der rationalen ebenen C_4 und C_6, sowie endlich mit der Theorie der kubischen Raumcurven.

Für ein beliebiges n hat der Referent†††) zuerst die Anzahl der Lösungen (mittels der „Methode des Projicirens") abgeleitet, welche bald darauf direct durch Stephanos††††) und auf anzahlgeometrischem Wege durch Schubert*†) bestätigt worden ist.

Aber erst Hilbert*††) war im Stande, auf Grund des im vorigen Abschnitt erwähnten Principes, die Gleichung für die Lösungen des Problems in fertiger Gestalt zu bilden, und zugleich auch das verwandte Problem der Formenbüschel mit vorgegebener Discriminante*†††) durchzuführen.

---

*) Math. Ann. XX S. 330—357 (1882). Vgl. die Darstellung beim Referenten: „Apolarität ..." S. 320.

**) Siehe z. B. Caporali, Nap. Rend. XXII S. 95—114 (1883).

***) In dem besonderen Falle, dass das Büschel von f_4 dasjenige der ersten Polaren einer f_5 wird, giebt es nur eine Lösung. Die Functionaldeterminante fällt hier mit der Hesse'schen Covariante H der f_5 zusammen. (Lindemann, Math. Ann. XXI S. 71—109, 1883.)

****) C. R. XCIII S. 994—997. (1881). Dies ist ein Auszug aus einer grösseren (preisgekrönten) Abhandlung, die 1883 in den Sav. étr. erschien, 138 S.

†) Math. Ann. XX S. 330—357 (1882).

††) „Apolarität ..." (1883).

†††) l. c. S. 391. Es giebt $\frac{2.(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!}$ Büschel von Formen f_{n+1} bei gegebener Functionaldeterminante 2nter Ordnung.

††††) Thèse 1884, 64 S.

*†) Acta Math. VIII S. 97—117 (1886). Hier erscheint das Problem des Textes als specieller Fall eines sehr viel allgemeineren, der Theorie der höheren linearen Räume angehörigen.

*††) Leipz. Ber. S. 112—122 (1887); Math. Ann. XXXIII S. 217—236 (1888).

*†††) Math. Ann. XXXI S. 482—492 (1888).

Für $n = 4$ kommt die Aufgabe auf die andere zurück, eine f_6 auf die canonische Gestalt $\varphi_2^3 - \varphi_3^2$ zu bringen, und hängt daher von der nämlichen Hülfs-

Im nächst höheren Gebiete, von zwei unabhängigen Variabeln, hat Hurwitz*) mit functionentheoretischen Mitteln die schwierige Aufgabe bewältigt, die Urformen zu finden, wenn die Discriminante, oder genauer, deren „wesentliche“ Teiler gegeben sind, oder, nach seiner Ausdrucksweise, die Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten zu ermitteln. Sein Resultat umfasst die früheren als specielle Fälle.

Es sei ferner hingewiesen auf ein eigentümliches Umkehrproblem, welches die neueren Methoden zur Auflösung der höheren Gleichungen charakterisirt**): es handelt sich darum, wenn man den Formen eines vollen Systems feste (sc. mit einander verträgliche) Zahlenwerte beigelegt denkt, die Gleichung aufzustellen, von welcher die Bestimmung der bezüglichen Urform abhängt. — Zum Schlusse erwähnen wir noch des Aufschwunges, den die Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen durch die systematische Einführung irrationaler Formen genommen hat.

Was zunächst den ersteren Fall angeht, so kann, wie Klein***) betont hat, das elliptische Integral erster Gattung unendlich viele canonische Gestalten annehmen, je nach der Ausdehnung des Raumes, in welchem man die elliptische „Normalcurve“ — über welche das Integral hinzuerstrecken ist — zu Grunde legt. Der „Modul“ des Integrals ist dann eine absolute irrationale Invariante jener Curve.

Weit mannigfaltiger gestaltet sich eine entsprechende Theorie für das Geschlecht $p = 2$ und $p = 3$†). Beschränkt man sich im letzteren Falle auf die einfachste Normalcurve, eine ebene C_4, so modificirt sich der Charakter der zugehörigen Integrale und Θ-Functionen (nebst

---

gleichung 40. Ordnung ab, welche Clebsch behufs Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen aufgestellt hatte. (Gött. Abh. XV, 1869; Math. Ann. II S. 193—197 (1870)).

*) Math. Ann. XXXIX S. 1—61 (1891). Hier findet sich auch eine Zusammenstellung der verwandten Litteratur.

**) Siehe etwa Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder ...“, sowie die früher citirten Arbeiten von Klein und Gordan über Gleichungen fünfter und siebenter Ordnung (I. B, b). Auf eine fernere Art von Umkehrproblem, welches neuerdings von Gordan aufgeworfen ist und übrigens nur eine einzige Lösung zulässt, ist schon auf S. 156, 157 aufmerksam gemacht worden.

***) Math. Ann. XVII S. 133—138 (1880). Leipz. Abh. 1885 S. 339—399. Vgl. Pick, Math. Ann. XXVIII S. 309—318 (1887), Wien. Ber. Juni 1888, 7 S., März 1889, 28 S.

†) Bezüglich des Geschlechtes $p = 2$ sei etwa verwiesen auf die bez. Arbeiten von Klein, Burkhardt und Wiltheiss in den Math. Ann., vom 27. Band an, wo man weitere Litteraturangaben nachsehen möge.

Hinsichtlich des Geschlechtes $p = 3$ siehe Pick, Math. Ann. XXIX S. 259 bis 271 (1887), eine Note von Klein in den Gött. N. 1888, S. 191—194, sowie Math. Ann. XXXVI S. 1—83 (1890), Wiltheiss ebd. XXXVIII S. 1—23 (1890), Pascal, vier Abhandlungen, Annali di Mat. (2) XVII, XVIII (1889, 1890).

deren Differentialgleichungen) je nach dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich. Zu einem solchen wird man gelangen, wenn man einen jeweils passend ausgesuchten irrationalen Bestandteil der mit der C_4 invariant verknüpften Systeme von „Berührungscurven“ adjungirt.

Die Coordinaten eines Punktes der Ebene der C_4 fallen hier mit den (drei) Functionen „φ“ zusammen, sodass eine lineare Transformation der ersteren der allgemeinsten (eindeutigen) rationalen Transformation der algebraischen Functionen vom Geschlecht drei äquivalent ist.

Insbesondere hat Klein*) hervorgehoben, dass die hier zur Verwendung gelangenden invarianten Bildungen im allgemeinen die Natur von „Combinanten“ besitzen, d. h. sich auf Urformen beziehen, welche verschieden ausgedehnte Variabelnreihen aufweisen, die unabhängigen Substitutionen unterworfen werden.

Es liegt auf der Hand, dass derartige Untersuchungen zu gleicher Zeit die rein geometrische**) Theorie der C_4 wesentlich zu fördern geeignet sind.

II. C.

Symbolik und Invariantenprocesse.

Wir gelangen nunmehr zu dem engeren Gebiete der Invariantentheorie, zu den daselbst zur Verwendung gelangenden Processen. Diese teilen sich naturgemäss in zwei Hauptklassen, die symbolischen und die realen; letztere setzen sich aus Differentiationsprocessen zusammen, welche auf Formen ausgeübt werden, während die ersteren recht eigentlich der Algebra angehören. In der That erkennt man bald, dass das der formentheoretischen Symbolik zu Grunde liegende Princip im wesentlichen übereinstimmt***) mit dem seit Kummer allgemein eingeführten Princip der „idealen Zahlen“, welches darin besteht, algebraische Zahlen und Formen, die in einem gegebenen Rationalitätsbereiche irreducibel sind, mittels „Adjunction“ geeigneter Irrationalitäten in ideale (Prim-) Factoren einfacherer Art zu zerlegen, so zwar, dass die letzteren den gewöhnlichen Verknüpfungsgesetzen der Arithmetik unterliegen. Erst in gewissen (mul-

*) Gött. N. 1888 S. 191—194.

Eine weitere Ausführung in diesem Sinne liegt vor bei Wirtinger, Math. Ann. XL S. 361—412 (1892).

**) Vgl. in dieser Hinsicht Frobenius, Journ. f. Math. IC S. 275—314 (1886), CIII S. 139—183 (1888).

***) Ein anderes Bild für das Wesen der Symbolik bietet die Chemie, insofern der Begriff des Molecüls dem der algebraischen Form, der des Atoms dem symbolischen Element der Form correspondirt. Vgl. unter II. c, a, β die bez. Anschauungen Sylvester's.

tiplicativen) Verbindungen werden diese idealen Elemente wiederum zu Grössen des ursprünglichen Bereiches.

II. C, a.
Symbolik und graphische Darstellung.
II. C, a, α. Deutsche Richtung.

Die von Clebsch und Aronhold eingeführte symbolische Methode*), welche inzwischen durch Gordan und seine Schule zu einer gewissen Vollendung gebracht ist, bezweckt, die Invariantentheorie der Formen beliebiger Ordnung auf diejenige der Linearformen zurückzuführen, und einen dementsprechenden, bequem zu handhabenden Algorithmus zu entwickeln. Ein solcher Algorithmus soll also, wie von vornherein betont sei, ausschliesslich die linearen Abhängigkeiten resp. Unabhängigkeiten zwischen den Coefficienten vorgelegter Formen wiedergeben.

Zunächst wird man**), wenn etwa eine Invariante J einer einzelnen Urform f vorliegt, die vom pten Grade in den Coefficienten von f ist, der Form J eine andere J_1 eindeutig „zuordnen", welche in den p Coefficientenreihen von p, zu f analogen Formen $f_1, f_2, \ldots, f_p$ je linear ist.

Sodann wird man, in Anwendung des nämlichen Princips auf die Urform f selbst (oder ihre äquivalenten Repräsentanten $f_1, f_2, \ldots, f_p$), die von der νten Ordnung in einer einzigen Variabelnreihe x sein mag, f in ν ideale Linearformen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n, \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n, \ \ldots$$
$$\ldots, \ n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \cdots + n_n \omega_n$$

zerlegen. Es zeigt sich aber, dass man hier, unbeschadet des eindeutigen Rückganges zu den realen Formen, sowohl die n Reihen der Coefficienten a, b, …, n, als auch diejenigen der Variabeln x, y, …, ω jeweils mit einander identificiren darf, sodass die p Formen f_i übergehen in p analoge nte Potenzen von Linearformen $a'_x, a''_x, \ldots$

Eine erste unmittelbare, höchst wichtige Folge dieser Darstellung ist diese. Unterwirft man jetzt die Variabeln x einer linearen Substitution, wodurch sie in neue Variabeln y, die Formen f_i in neue Formen F_i über-

*) Wir verweisen den Leser, der möglichst rasch in die Symbolik eingeführt zu werden wünscht, auf den ersten Abschnitt von Gordan's Vorlesungen II. Im übrigen siehe diesen Bericht S. 97 u. flgde.

Eine Reihe von Anwendungen der Symbolik kann übrigens erst in den späteren Abschnitten, in Verknüpfung mit den realen Processen, verständlich gemacht werden.

**) Vgl. die Entwickelungen bei Study „Methoden …", I § 5, II §§ 2, 5, 6, die sich eingehend mit dem inneren Wesen der Symbolik beschäftigen.

gehen, und schreibt man die transformirten Formen F wiederum symbolisch als nte Potenzen von Linearformen $A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$ etc., „so nimmt die vermöge der Substitutionsgruppe der Variabeln x inducirte Substitutionsgruppe der Coefficienten von f_i die einfache Gestalt an, dass die A von den a etc., bis auf die Transposition der Substitutionscoefficienten, genau so abhängen, wie die x von den y“.

Daraus geht ohne weiteres hervor, dass man beliebig viele Invarianten von f hinschreiben kann; man hat nur aus den n-reihigen Determinanten der a', a'', ... derartige Producte zu bilden, dass jede dieser Symbolreihen im ganzen ν-mal vorkommt. — Der Angelpunkt der ganzen Theorie ist, wie Clebsch*) zuerst bewies, die Umkehrung dieses Satzes, „dass also jede (ganz-rationale) Invariante von f als eine (ganz-rationale) Function der genannten Producte dargestellt werden kann“.

Dieser Fundamentalsatz lässt sich ohne Schwierigkeit auf eine Reihe von Urformen ausdehnen, unter denen sich insonderheit eine Anzahl linearer befinden kann**). Nun ist es allerdings Clebsch***) auch gelungen, solche simultanen Invarianten symbolisch zu charakterisiren, in

*) Journ. f. Math. LIX, S. 1—62 (1861), „Binäre Formen“ § 12.
Durch diesen Satz und die aus ihm zu ziehenden Consequenzen hat sich die deutsche Symbolik über die englische, von Cayley eingeführte, erhoben.
Weitere Beweise des Satzes finden sich bei Dahl, Zeuthen Tiddskr. (4) IV S. 154—158, zwei solche in Gordan's Vorlesungen II § 9, sowie einer bei Study, „Methoden“ § 5.

**) Beispielsweise setzt sich eine simultane Invariante einer binären Form $a_x^n = (a_1x_1 + a_2x_2)^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$ und einer binären Linearform $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = \alpha_x$ zusammen aus „Klammerfactoren“ der beiden Typen (ab), (ac), (bc), ...; $(a\alpha)$, $(b\alpha)$, $(c\alpha)$, ... Da aber die α_1, α_2 cogredient sind mit $-y_2$, y_1 (d. i. ebenso linear transformirt werden, wie die letzteren), so lassen sich die Klammerfactoren der zweiten Art ersetzen durch die Linearfactoren a_y, b_y, c_y, ... Der Begriff einer simultanen Invariante von a_x^2 und $x_1y_2 - x_2y_1$ fällt aber zusammen mit dem der „Covariante“ der einzelnen Form a_y^n.

***) Gött. Abh. XVII S. 1—62 (1872).
Ist f eine Urform, welche verschiedene Reihen, nicht nur von den einzelnen Variabeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, ..., sondern auch von deren zwei-, drei- etc.-reihigen Determinanten p_{ik}, p_{ikl}, ... enthält, so zerlegt sich f symbolisch in lauter Factoren, deren jeder nur einer Reihe von einem Variabelntypus, etwa p_{ikl} ... zugeordnet ist.
Ein solcher Factor ist dann darstellbar als Potenz einer Linearform der p_{ikl}, ...; wegen der Identitäten zwischen den p und aus Dualitätsgründen lässt jene Darstellung noch jeweils vier Modificationen zu.
Für „Liniencomplexe“ finden sich diese vier Darstellungen von Clebsch ausgeführt in Math. Ann. II S. 1—8 (1869). Eine Vereinfachung und Weiterführung hat mittels Einführung Grassmann'scher Symbole erzielt Waelsch: Math. Ann. XXXVII S. 141—152 (1890). Hierauf gründet sich auch ein entsprechendes Uebertragungsprincip u. a.

welche die Coefficienten jener Linearformen realiter nur in ganz bestimmten (nämlich zwei- oder drei- ... oder endlich ($n-2$)-reihigen) Determinantenverbindungen eingehen; trotzdem ist es für $n > 3$ nicht mehr möglich*), die Gesamtheit der möglichen Bildungen zu übersehen. Dagegen dürfen die Urformen mehrere Reihen von cogredienten Variabeln (x), (x'), ..., wie contragredienten (u), (u'), ... enthalten; vermöge des Processes der „Reihenentwickelung“ wird man schliesslich auf Urformen mit nur einer Reihe von x und nur einer Reihe von u zurückgeführt, für welche der obige Fundamentalsatz nur einer geringen Modification bedarf.

Die wissenschaftliche**) Berechtigung der in Rede stehenden Symbolik ist wesentlich in einer Eigenschaft derselben begründet, die erst neuerdings***) — durch Gordan für binäre Formen, durch Study für ternäre, und durch Pascal für solche von n Variabeln — aufgestellt und bewiesen ist.

Die oben angeführten n-reihigen Determinanten der Symbole a', a'', ... sind durch ein System von algebraischen Relationen $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, ... aneinander geknüpft.

Es zeigt sich nun wiederum umgekehrt, dass irgend eine, zwischen

---

*) Siehe die Bemerkungen von Gordan, Programm 1875, Anhang.

Die Schwierigkeiten, auf welche die symbolische Rechnung in höheren Gebieten stösst, können bereits durch so einfache Aufgaben, wie: „Die Gleichung des, drei linearen Complexen gemeinsamen Hyperboloides in Punktcoordinaten aufzustellen“ zur Genüge illustrirt werden. Vgl. indessen Waelsch l. c.

**) Ueber den praktischen, bezw. pädagogischen Wert des symbolischen Rechnens werden die Mathematiker jederzeit verschiedener Meinung sein. Es ist allerdings nicht zu leugnen, dass in dieser Hinsicht die Formentheorie der neueren Periode vielfach zu einer Art Sport geworden ist, bei dessen Ausübung die Fülle der Formen den leitenden Gedanken zu überwuchern droht. Glücklicherweise tritt dem eine gesunde Strömung entgegen, bei der das gedankliche Rechnen mit den invariantiven Processen immer mehr hervortritt.

***) Gordan's Vorlesungen II (1887), No. 117.

Study, Math. Ann. XXX. S. 120—126 (1887), sowie „Methoden ...“ (1889), § 6.

Pascal, 1888, Batt. G. XXVI. S. 33—38, 102—103; Rom. Acc. L. Rend. (4) IV S. 119—124. Rom. Acc. L. Mem. (4) V S. 375—387.

Die Grundidentitäten, auf die bei Pascal alle übrigen zurückkommen, lauten:

$$\Sigma \pm (a_1 a_2 \dots a_n)(a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_{n-1}) = 0,$$
$$\Sigma \pm (a_1 a_2 \dots a_n)\, a_{n+1,x} = 0,$$
$$(a_1 a_2 \dots a_n)(x_1 x_2 \dots x_n) - \Sigma \pm a_{1x_1} a_{2x_2} \dots a_{nx_n} = 0,$$
$$\Sigma \pm (x_1 x_2 \dots x_n)\, a_{n+1,x} = 0,$$
$$\Sigma \pm (x_1 x_2 \dots x_n)(x_{n+1} y_1 y_2 \dots y_{n-1}) = 0.$$

Hier sind die Summen zu bilden, indem man die Symbole a bez. x auf alle möglichen Weisen vertauscht, und die Vorzeichen gemäss der gewöhnlichen Determinantenregel wechseln lässt.

Im binären Gebiet giebt es nur die eine Grundidentität:

$$a_x b_y - a_y b_x - (ab)(xy) = 0.$$

Invarianten bestehende Identität — die aber nicht etwa schon durch gegenseitiges Sich-Zerstören der Invarianten erfüllt wird, sondern erst dadurch, dass man sich dieselben in den realen Coefficienten der Urformen ausgerechnet denkt — in eine solche Gestalt gebracht werden kann, dass die linke Seite der Identität zu einem Aggregat symbolischer Glieder wird, deren jedes mindestens einen der Ausdrücke R als Factor enthält. Und zwar kommt man dabei mit einer der bestimmten Anzahl von fünf jener R vollständig aus.

Im übrigen gilt hier die nämliche Einschränkung, wie oben (S. 188). Beispielsweise hat man im quaternären*) Gebiete noch keine Uebersicht über die Relationen, an denen nicht nur die Coordinaten des Punktes und der Ebene, sondern auch die der Geraden teilnehmen.

Der Ausgestaltung der Symbolik durch Gordan, wie sie sich an die Begriffe „Reducent, vollständige und relativ vollständige Systeme, erweiterte Systeme" knüpft, ist bereits früher**) gedacht worden: eine Reihe weiterer Gesichtspunkte, insbesondere der der Faltung, wird in dem Abschnitt über unsymbolische Processe ihre Stelle finden.

Hier erwähnen wir noch eines symbolischen „Uebertragungsprincipes"***), welches Gordan zum Aufbau voller Formensysteme verwendet

---

*) Vgl. die Darstellung bei Study „Methoden . . ." S. 204.

**) S. 135 u. flgde.

***) Math. Ann. I S. 90—101 (1869), XVII S. 217—234 (1880) I. Cap.

Dies Uebertragungsprincip ist nicht etwa zu verwechseln mit dem bekannten, von Clebsch aufgestellten. Letzteres lautet, etwa in der Uebertragung von binären auf ternäre Formen, und in geometrischer Fassung: „Soll eine Gerade eine ebene Curve n^{ter} Ordnung in einer Punktgruppe schneiden, welche eine besondere projectivische Eigenschaft besitzt, so erhält man die Gleichung der von der Geraden umhüllten Curve in folgender Weise: Man stelle die Invariante der binären f_n, deren Verschwinden die geforderte Eigenschaft aussetzt, symbolisch dar und ersetze jede in ihr vorkommende zweigliedrige Determinante (ab) durch eine dreigliedrige (abu), wo die u Liniencoordinaten und die a, b, ... Symbole der gegebenen ternären Form bedeuten."

(Siehe etwa die Darstellung in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen, I S. 274 u. flgde.)

Beispielsweise erhält man als Gleichung der Curve dritter Ordnung $a_x^3 = 0$ in Liniencoordinaten unmittelbar

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = 0;$$

ferner: „Die Geraden, welche eine Curve vierter Ordnung $a_x^4 = 0$ nach harmonischem Doppelverhältnis schneiden, umhüllen eine Curve sechster Klasse:

$$(abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 = 0\text{" u. s. f.}$$

Vgl. die Erweiterungen von Gundelfinger, Math. Ann. VI S. 16—22 (1872) und Study „Methoden" II § 19.

Wegen anderer Uebertragungsprincipien siehe den Abschnitt über Combinanten II. D, b.

hat. Um dies gleich für das ternäre Gebiet zu entwickeln, so sei ein System von invarianten Formen φ einer Urform $f = a_x^n = \sigma_x^n = \cdots$ vom $(m-1)$ten Grade in den Coefficienten bekannt, durch welches alle anderen Bildungen des nämlichen Grades linear ausdrückbar sind. Es handelt sich darum, ein entsprechendes System für den nächst höheren Grad m zu finden.

Die symbolischen Factoren einer Form φ sind von den dreierlei Typen $b_x, c_x, d_x, \ldots$; (bcu), (bdu), (cdu)...; (bcd), bce), ...

Man ersetze jetzt λ Factoren $b_x, c_x, \ldots$ durch resp. (bau), (cau), ..., und zugleich k Factoren (bcu), bdu) ... durch resp. (bca), (bda), ..., und füge endlich den Factor $a_x^{n-(\lambda+k)}$ hinzu $(\lambda + k \leqq n)$. Für ein gegebenes Paar von „Moduln“ λ, k kann man so eine ganz bestimmte Reihe neuer Formen ψ (vom Grade m) herleiten. Man zieht nun successive alle möglichen Combinationen in Betracht, indem man $\lambda + k = 1, 2, \ldots$ nimmt, und sodann wieder in jeder einzelnen Gruppe $k = 0, 1, 2, \ldots$. Schliesst man alle verschwindenden und reducibeln Formen ψ aus, so ergiebt sich als Hauptresultat, dass sämtliche, aus dem „linear vollständigen“ Systeme der Formen φ vom Grade $m-1$ durch obigen Process gewonnene Formen ψ vom Grade m wiederum ein linear vollständiges System bilden“.

Wir wenden uns jetzt zu einer bemerkenswerten Weiterführung bezw. Vereinfachung der Clebsch-Aronhold'schen Symbolik, welche in neuester Zeit von Stroh*) angebahnt ist. Es geht dieselbe in praxi darauf aus, die Anzahl der symbolischen Factoren, aus denen sich eine Invariante aufbaut, möglichst zu reduciren.

Wir beschränken uns dabei auf den vom Verfasser wirklich durchgeführten Fall des binären Gebietes**).

Ist $f_n = (a_\lambda x_1 + \alpha_\lambda x_2)^n$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ eine Urform nter Ordnung in symbolischer Schreibart, so ist es zuvörderst erlaubt, die Symbole a sämtlich einander gleich, etwa gleich der Einheit zu nehmen, ohne dass bei der Reconstruction der realen Bildungen eine Vieldeutigkeit zu befürchten ist.

Versteht man jetzt unter C eine Covariante von f, vom iten Grade in den Coefficienten und vom Gewichte g (und mit nur einer Reihe Veränderlicher), so genügt das Leitglied C_0 von C — als eine Form

---

*) Math. Ann. XXXVI S. 262—303 (1890) § 7 u. flgde.

**) Bezüglich des ternären Gebietes siehe l. c. § 12.

gter Ordnung der i (homogenen) Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_i$ — nur noch der einen charakteristischen Differentialgleichung $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0$, deren allgemeinste ganz-rationale Lösung C_0 zu suchen ist.

Die letztere ist aber nach Hesse*) sofort angebbar, sie ist nichts anderes, als die allgemeinste Form der i—1 Argumente

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_1,\ \ldots,\ a_i - a_1\ ^{**}),$$

von einer Ordnung $g \leqq n$. Ist γ die Anzahl der willkürlichen Constanten einer solchen Form, so kann C_0 auch als Summe von γ (linear unabhängigen) gten Potenzen geschrieben werden, wie folgt:

$$C_0(a_1, a_2, \ldots, a_i) = \sum_{k=1}^{k=\gamma} c_k(\lambda_{1k} a_1 + \lambda_{2k} a_2 + \cdots + \lambda_{ik} a_i)^g,$$

wo

$$\lambda_{1k} + \lambda_{2k} + \cdots + \lambda_{ik} = 0.$$

Dies Ergebnis lässt sich noch symmetrischer gestalten.

Die einfachsten Lösungen unserer Gleichung, eben jene i—1 Differenzen $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, ..., $a_i - a_1$ können ersetzt werden durch ebensoviele „Grundsymbole" $A_\lambda = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i$ $(\Sigma\lambda = 0)$.

„Um demnach die symbolische Darstellung für das Leitglied einer Covariante von f zu haben, hat man nur aus g Grundsymbolen ein Product zu bilden, in welchem jedes Symbol a höchstens in der nten Potenz vorkommt."

Offenbar sind die Clebsch'schen Klammerfactoren $a_r \alpha_s - \alpha_r a_s$ ge-

---

*) Journ. f. Math. XLII S. 117—124 (1851).

**) An dieser Stelle erkennt man deutlich den Zusammenhang mit den Syzygien (siehe diesen Bericht S. 167), von denen aus der Verf. zu der im Texte geschilderten Symbolik gelangte.

Um nämlich eine elementare Syzygie $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$ auf ihre Richtigkeit zu prüfen, nimmt man die vier Formen f, φ, ψ, χ als reale Potenzen linearer Formen an: $f = (x-a)^{n_1}$, $\varphi = (x-b)^{n_2}$, $\psi = (x-c)^{n_3}$, $\chi = (x-d)^{n_4}$, und beschränkt sich bei jeder Ueberschiebung auf das Leitglied. Dann ist z. B. zu setzen für $(f, \varphi)^\lambda$, $((f\psi)^4, \varphi)^1$ resp. $(a-b)^\lambda$, $(a-c)^4(a-b)$.

Die linke Seite der Syzygie $[f, \varphi, \psi, \chi]_i$ wird zu einer Function $F(a, b, c, d)$, welche der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$ genügt. F hängt somit nur ab von den drei Veränderlichen:

$$a - b = -b',\ a - c = -c',\ a - d = -d'.$$

Da aber gleichzeitig

$$b - c = b' - c',\ b - d = b' - d',\ c - d = c' - d'$$

wird, so braucht man nur in der Function F $a = 0$ zu setzen, um mit Leichtigkeit das identische Verschwinden von F einzusehen.

Umgekehrt lässt sich aus jeder solchen identisch verschwindenden Function dreier Variabeln die entsprechende Syzygie herstellen.

(Vgl. l. c. S. 274.)

rade die einfachsten jener „Grundsymbole“: es hat keine Schwierigkeit, von der einen Symbolik zur andern überzugehen, und umgekehrt.

Um ein Beispiel anzuführen, so schreibt sich die Covariante

$$(ab)^2(ac)a_x^{n-2}b_x^{n-3}c_x^{n-1}$$

nunmehr in der einfacheren Gestalt $(a+b-2c)^3$, welche nur ein Grundsymbol benutzt.

Nimmt man die Ordnung n der Urform beliebig hoch an, sodass stets $n > g$, so gehen die Grössen C_0 in die sogenannten „Seminvarianten“ über, und es gilt daher der fruchtbare Satz: „Alle Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g sind durch symbolische Potenzen $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$ **linear** ausdrückbar“*).

In anderer Richtung hat sich eine Erweiterung der Symbolik aufgedrängt, wenn es sich um Formen von solchen Variabelnreihen handelt, welche verschiedenen Substitutionen unterliegen.

Unter ihnen spielen eine besondere Rolle die „Combinanten“, d. h. diejenigen Bildungen von p Urformen f gleich hoher Ordnung n, von r Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_r$, welche bei linearer Transformation sowohl der x, wie der f, invariant bleiben.

Hier führe man nach Stroh**) Symbolenpaare a und α (b und β etc.) ein, sodass immer erst n Symbole a zusammen mit einem Symbole α als Product vereinigt reale Bedeutung erhalten.

Construirt man jetzt die Form

$$F = (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_p \xi_p)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^n,$$

so ersetzt diese eine Stammform die früheren f in dem Sinne, dass Combinante der f jede Form ist, welche in Bezug auf F Invarianteneigenschaft besitzt für beide Variabelnreihen ξ, x, und dabei die ξ nicht enthält.

Study***) hat diese Symbolik noch weiter ausgedehnt auf Combi-

---

*) § 10. Als eine unmittelbare Folge davon erscheint die Bestimmung der irreducibeln Seminvarianten von gegebenem Grade i und Gewichte g: ihre Anzahl ist gleich der Zahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung:

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1$$

(cf. unten S. 198), aber auch die Bildungen selbst lassen sich symbolisch sofort anschreiben.

**) Math. Ann. XXII S. 393—405 (1883).

Einer entsprechenden Symbolik hatten sich schon vorher Capelli und le Paige bedient für einfache Formen von mehreren Variabelnreihen, welche verschiedenen Substitutionen unterliegen; der erstere für eine quadratische Form von zwei binären Reihen (Batt. G. XVII S. 69—148, 1879), der letztere für mehrfach lineare Formen (Belg. Bull. (3) II S. 40—53, 1881).

***) „Methoden . . .“ II § 13.

nanten solcher Formen f, welche, ausser von den x, noch von den contragredienten u abhängen.

Ein ganz ähnliches Princip gilt nun auch, wie unschwer zu erkennen, für die complicirteren invarianten Bildungen von Urformen der Art: $\alpha_\xi^m a_x^n$ u. s. f., welche die verschiedenen Variabelnreihen der x, ξ, ... wirklich enthalten.

Für den Fall, dass die letzteren dem binären Gebiet angehören, hat Gordan*) eine einfachere Symbolik — die sich mit nur einer Art von Symbolen begnügt — angegeben, über welche bereits auf S. 141 berichtet ist.

Endlich sei noch kurz erwähnt, dass die beiden Hauptsymbole der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen, das „Xf" der infinitesimalen Transformation und das „$(X_i X_k)$" des „Klammerausdrucks" von Study**), unserem Specialgebiet der projectiven Transformationen mit Erfolg angepasst worden sind, sodass sich dieselben bereits äusserlich als invariante Processe zu erkennen geben.

II. C, a, β.

Englische Richtung.

Während den soeben geschilderten Bestrebungen ein einheitlicher Charakter eignete, bieten die verwandten, hier und da zerstreuten Erscheinungen, wie sie vorzugsweise bei englischen Autoren der späteren***) Periode auftreten, eine Reihe sehr verschiedenartiger Momente dar.

Man mag etwa drei Hauptgesichtspunkte unterscheiden: erstens die Versuche, die Ausdrücke der Formentheorie durch geeignete graphische Darstellungen der Anschauung näher zu bringen; sodann, in umgekehrter Richtung, die Charakterisirung unseres Arbeitsfeldes als eines Ausläufers der abstracten (universalen) Algebra der „Matrices"; endlich die (symbolische) Verknüpfung der „Seminvarianten" mit der Lehre von den symmetrischen Functionen.

Sylvester†) geht 1878 davon aus, dass der Aufbau der Structur-

---

*) Math. Ann. XXXIII S. 372—389 (1889).

**) „Methoden . . ." II § 15.

***) Vor allem hat Cayley selbst, der ursprünglich die Symbolik begründet hatte, in seinen späteren Arbeiten das Rechnen mit den wirklichen Leitgliedern und den erzeugenden Functionen bevorzugt.

†) Am. J. I. S. 63—125 (1878).

Vgl. dazu die Bemerkungen von Clifford ebd. S. 126—129; Malet, ebd. S. 277—282. Die wirkliche gegenseitige Zuordnung der beiderseitigen Darstellungen rührt von Clifford her.

formeln nach der neueren atomistischen Theorie mit der üblichen symbolischen Schreibweise der binären In- und Covarianten eine weitgehende Analogie aufweist. Setzt man die chemischen Elemente als binäre Formen an, wie folgt:

$$H = h_x = h'_x = \cdots, \quad O = o_x^2 = o'^2_x = \cdots, \quad C = c_x^4 = c'^4_x = \cdots,$$
$$N = n_x^5 = n'^5_x = \cdots, \quad \text{etc.}$$

wo also die „Wertigkeit" des Elementes der „Ordnung" der Form entspricht, so sind die „gesättigten" Verbindungen Ausdrücke von Invarianten, die „ungesättigten" solche von Covarianten. Beispiele für die ersteren seien:

$$2O = (oo')^2, \quad H_2O = (ho)(h'o), \quad NO_3H = (no)^2(no')^2(no'')(o''h).$$

Stellt man also, wie in der Chemie, die Elemente durch Punkte, die gegenseitigen Bindungen (ho, u. s. f.) durch verbindende Striche dar, so ist damit ein Anschauungsbild für die binäre Invariantensymbolik gewonnen.

Die Anzahl der Striche zwischen den Punkten (i. e. der gebundenen Wertigkeitseinheiten) wird zum Gewicht der bezüglichen Form: eine Invariantenbeziehung ist aequivalent mit der Möglichkeit einer Deformation der Bilder der verschiedenen Formen in einander.

Sylvester*) macht davon eigenartige Anwendungen auf das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz, die Clebsch'schen associirten Formen u. a. mehr.

Clifford**) hat 1879 das in Rede stehende Verfahren auf binäre Urformen übertragen, die in mehreren Variabelnreihen linear sind: ist z. B. (x, y, z) eine solche, so hat man als Bild der Invariante

$$(xyz)(xyu)(zvw)(uvw)$$

etwa ein Quadrat, von dem zwei Gegenseiten doppelt ausgezogen sind.

Offenbar ist eine derartige Graphik vieler Modificationen fähig; eine der nächstliegenden ist diejenige für den Ausdruck einer binären Invariante in Differenzen der Urformwurzeln. Derselbe ist eine (symmetrische) Summe von Producten der Art:

$$(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_3)^\beta (x_2 - x_3)^\gamma \ldots (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon,$$

wo die Exponenten $\geqq 0$, und die Grade in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich einander gleich sind. Man wird wieder jedes x durch einen Punkt, jede Differenz $x_i - x_k$ durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen x_i und

*) Siehe die Appendices zu der oben genannten Abhandlung Sylvester's.
**) Lond. M. S. Proc. X S. 124—129, 214—221; cf. Spottiswoode ebd. S. 204—214.

x_k repräsentiren; in jedem der n Punkte laufen dann gleich viele Linien zusammen. So wird etwa

$$(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2(x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_4)(x_2-x_3)$$

zu der Figur eines Quadrates mit den Diagonalen führen, von dem, wie oben, zwei Gegenseiten doppelt gezogen sind.

Eine der wesentlichsten Fragen ist dann die nach der Reducibilität*) des Bildes, d. h. ob sich das letztere nicht durch Ueberlagerung von Bildern geringeren „Grades" erzeugen lässt.

Petersen**) hat hiervon Gebrauch gemacht, um nicht nur den von Gordan***) stammenden Satz nachzuweisen, dass man (bei gegebenem n) eine endliche Anzahl obiger Producte so bilden kann, dass alle andern Producte derselben Form sich aus den gebildeten durch Multiplication zusammensetzen lassen, sondern auch, um die wirkliche Bestimmung jener durchzuführen.

Was die Unterordnung der Invariantentheorie unter die Algebra der extensiven Grössen angeht, möge zunächst das Beispiel einer Ueberschiebung zeigen. Wenn etwa zwei binär-bilineare Formen gegeben sind:

$$f = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$
$$\varphi = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2,$$

und man will deren zweite Ueberschiebung bilden — die auch unabhängigen Substitutionen der beiden Variabelnreihen gegenüber invariant ist —, so multiplicire man f mit φ, und unterwerfe dabei die binären Producte der „Einheiten" x_1, x_2, y_1, y_2 den Gesetzen:

$$x_1^2 = x_2^2 = y_1^2 = y_2^2 = 0, \quad x_1x_2 = -x_2x_1 = y_1y_2 = -y_2y_1 = 1;$$

in der That resultirt dann:

$$(f\varphi)^2 = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11}.$$

Die Verallgemeinerung bietet ersichtlich keine principiellen Schwierigkei-

---

*) Vgl. in dieser Hinsicht Buchheim, Lond. M. S. Proc. XVII S. 80—106 (1886). Der sog. „Zerlegungssatz" von Clebsch („Binäre Formen" S. 257): „Jede Covariante einer binären Form f_n kann in zwei Teile zerlegt werden, deren einer eine, von den f_{n-1} übernommene Bildung ist, während der andere den symbolischen Factor $(ab)^\lambda$ enthält $\left(\lambda \geqq \frac{n}{2}\right)$", folgt hier daraus, dass jedes geometrische Bild auf eine Summe von einfachsten Polygonen zurückgeführt werden kann.

Kempe (ebd. S. 107—121) zeigt, wie durch geeignete Deutung identischer Relationen zwischen den Symbolen ein wirkliches Rechnen mit den geometrischen Bildern der Invarianten ermöglicht wird.

**) Acta Math. XV S. 193—220 (1891). Vgl. oben S. 143.

***) Siehe diesen Ber. S. 143.

ten. Ausführungen dieser Art finden sich bei Clifford*), wenngleich der Kern der Theorie bereits bei Grassmann**) vorgebildet erscheint.

Wir kommen schliesslich zu der, auf Grund der Theorie der symmetrischen Functionen in die Theorie der binären Invarianten eingeführten Symbolik.

Das Leitglied C_0 einer Covariante einer Urform f_n ist charakterisirt als eine isobare Form der Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche der Differentialgleichung

$$\Omega = a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial C_0}{\partial a_4} + \cdots = 0$$

genügt; C_0 bleibt daher ein solches Leitglied für jede Urform höherer Ordnung $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$. In diesem Sinne heisst C_0 eine „Seminvariante" (Subinvariante) der beliebig fortgesetzten Grössenreihe $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Um die Unabhängigkeit der Seminvarianten von der Ordnung n einer Urform sichtbar zu machen, denkt man sich letztere nach steigenden Potenzen der Variabeln x entwickelt, und demgemäss die reciproken Wurzeln eingeführt:

$$1 + \frac{b}{1} x + \frac{c}{1.2} x^2 + \cdots = (1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)\ldots$$

Dann gilt der folgende, von Mac Mahon***) herrührende Fundamentalsatz:

„Jede (ganze) symmetrische Function der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, welche „nicht unitär" ist, d. i. dieselben von höherem, als ersten Grade enthält, stellt in Bezug auf die Coefficienten $a = 1$, b, c, d, ... eine Seminvariante dar."

Beispielsweise bestätigt man leicht, dass, wie weit man auch die Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ fortsetzen mag, stets die Relationen gelten:

$$\Sigma\alpha^2 = -(c-b^2), \quad \Sigma\alpha^3 = -\tfrac{1}{2}(d-3bc+2b^3), \ldots,$$

wo die rechts stehenden Klammerausdrücke bekannte Leitglieder von Covarianten sind.

Mac Mahon und Cayley bedienen sich daher einer „Partitionssymbolik"†), indem sie schreiben:

---

*) l. c.

**) Vgl. etwa die Darstellung in der Grassmann-Biographie, Math. Ann. XIV S. 9 u. flgde.

***) Am. J. VII S. 26—47 (1884). Vgl. dazu Cayley, ebd. S. 1—25, 59—73, Quart J. XX S. 212—213 (1884).

†) Um eine Seminvariante gegebenen Grades l zu haben, hat man offenbar nur noch die Zahl l auf alle möglichen Weisen als Summe von kleineren Zahlen („Partitionen") darzustellen.

$$2 = \Sigma\alpha^2, \quad 3 = \Sigma\alpha^3, \quad 6552 = \Sigma\alpha^6\beta^5\gamma^5\delta^2, \quad \text{etc.},$$

und übertragen nunmehr unmittelbar auf die Theorie der Seminvarianten die bekannten Verknüpfungsgesetze der symmetrischen Functionen*), die jetzt einfach lauten:

$$1.m = (1+m)+(1m) \quad (1 \gtrless m), \quad 1.1 = (21)+2.(11) \quad (1 = m), \quad \text{etc.}$$

Der hierauf sich stützende Algorithmus gewährt vor allem einen tieferen Einblick in den Zusammenhang zwischen den Syzygien. Jede solche Syzygie zwischen Covarianten, oder die ihr äquivalente zwischen den obigen Symbolen, ist der Keim einer unbegrenzten Reihe weiterer Syzygien, indem man z. B. das Symbol 552 successive überführt in 5552, 6552, 7552 u. s. f.

Mit Hülfe dieser Symbolik hat Cayley**) eine „erzeugende Function" für die Seminvarianten hergeleitet:

$$\frac{x^j}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^j)},$$

wo bei Entwickelung derselben nach steigenden Potenzen von x der Coefficient von x^w die Anzahl der linear unabhängigen Seminvarianten vom Grade j und vom Gewichte w angiebt.

Die schwierigere Frage nach einer erzeugenden Function für die „Perpetuanten", d. i. derjenigen Seminvarianten, die sich nicht aus solchen niederer Grade ganz-rational componiren lassen, hat Mac Mahon***) mittels der nämlichen Symbolik gelöst; dieselbe nimmt die einfache Gestalt an:

$$\frac{x^{2^{j-1}-1}}{2.3.4\ldots j}.$$

Cayley und Mac Mahon haben daraufhin ausgedehnte Tabellen für die Seminvarianten, Perpetuanten, sowie für deren Syzygien berechnet.

II. C, b.

Unsymbolische Invariantenprocesse.

Wir werden im folgenden die hervorragendsten (Differentiations-) Processe durchgehen, welche auf invariante Gebilde ausgeübt werden, um

---

Sylvester hat die in Rede stehende Partitionssymbolik zu seinen Principien einer universellen Algebra in Beziehung gesetzt, Am. J. V S. 79—137 (1883). Vgl. auch Am. J. VI S. 270—286 (1883), sowie Peirce, Am. J. IV S. 97—229 (1881).

*) Mac Mahon hat hierauf umgekehrt später eine neue Theorie der symmetrischen Functionen gegründet. Andererseits hat er die Symbolik des Textes auf Perpetuanten und auf gewisse lineare partielle Differentialoperatoren übertragen.

**) l. c.

***) l. c. Vgl. oben S. 193.

aus ihnen neue zu erzeugen. Der besonders wichtige Fall, wo bei Anwendung einer solchen Operation der Wert Null resultirt, soll in dem Abschnitt über „Differentialgleichungen" seine Besprechung finden (II. C, b, ζ); desgleichen die Ausübung von Differentialoperationen auf „Reciprocanten und Seminvarianten," in den betreffenden Abschnitten (II. C, c, α; II. D, a). Diesen Processen kommt selbst an und für sich, oder doch wenigstens in einer gewissen Modification*), die „Invarianteneigenschaft zu, d. h. es hat das gleiche Ergebnis, ob man erst den Process ausübt und dann eine lineare Transformation der Variabeln, oder umgekehrt.

Nach der historischen Entwickelung sind die Processe einzuteilen in solche, welche sich auf die Variabeln, oder auf die Coefficienten der Urformen, oder endlich auf die Coefficienten der Substitutionen beziehen; indessen erlauben ja diese drei Grössenarten die gemeinsame Auffassung als Coefficienten von Linearformen.

Es ist nicht wohl möglich, innerhalb des hier gebotenen Raumes auf die abstracte Bedeutung und die innere gegenseitige Verwandtschaft der einzelnen Operationen tiefer einzugehen; in diesem Betracht mag auf Study's „Methoden" und den ersten Teil von Gordan's Vorlesungen, Band II verwiesen werden.

II. C, b, α.

Der Aronhold'sche Process**).

Unter diesem Namen fassen wir alle Processe von der Form

$$D_{pq} \equiv \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

zusammen, wo die p_i, q_i zwei cogrediente Grössenreihen sind, die also den nämlichen Substitutionen unterworfen werden.

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem die p, q die gewöhnlichen (Punkt-) Variabeln der Formen sind, und die Bezeichnung „Polarenprocess" die üblichere ist.

---

*) So kommt beispielsweise noch nicht der linken Seite einer einzelnen der n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen die Invarianteneigenschaft zu, wohl aber geeigneten Combinationen derselben. Cf. Study, „Methoden ..." S. 175.

**) Ueber die Verwendung des genannten Processes zur Aufstellung gewisser „voller Untersysteme" siehe S. 155, von Syzygien S. 165. Neuerdings hat Wiltheiss auf die Bedeutung hingewiesen, welche der Process behufs invariantiver Gestaltung der Differentialgleichungen für θ-Functionen besitzt (vgl. etwa Math. Ann. XXXVIII, bes. S. 23, 1890), und Hilbert hat gezeigt, wie man mit Hülfe des Processes allgemein zu vollen Systemen von Grundformen gelangt (Gött. N. 1892, bes. S. 6).

Während der Polarenprocess verhältnismässig früh in der projectivischen Geometrie auftritt und seitdem allmählich zur Grundlage*) derselben geworden ist, ist es in der Formentheorie erst neuerdings gelungen, dem Polarenprocesse auch hier eine führende Rolle in dem Sinne zuzuweisen, dass sämtliche, sonst noch gebräuchlichen Differentiationsprocesse auf jenen nicht nur zurückführbar, sondern auch in expliciten Formeln durch denselben algebraisch ausdrückbar sind.

Wir nehmen da vor allem die sogenannten Reihenentwickelungen**) vorweg, welche dazu dienen, Formen mit mehreren cogredienten Variabelnreihen auf solche von weniger Reihen zu reduciren: die einzelnen Glieder derartiger Entwickelungen sind Producte aus „identischen" Covarianten (d. h. solche, die ausschliesslich von den Variabeln abhängen) mit Polaren von den genannten einfacheren Formen.

Gordan und Clebsch***) haben zuerst für binäre Formen derartige Reductionen vorgenommen; Clebsch****) und Capelli†) haben, nach zwei verschiedenen Richtungen vorgehend, das Problem allgemein behandelt.

Capelli††) gebührt aber das Verdienst, im Sinne der oben formulirten Forderung, den Polarenprocess überhaupt in den Mittelpunkt der ganzen Formentheorie gestellt zu haben.

Dies trat bereits†††) bei der Behandlung der fundamentalen Aufgabe, die Anzahl aller linear unabhängigen Covarianten (eines Systems von Urformen) von gegebenen Grad- und Ordnungszahlen zu ermitteln, deutlich zu Tage.

In seinen späteren††††) Arbeiten geht Capelli allgemein aus von n

---

*) Vgl. z. B. Thieme, Math. Ann. XXVIII S. 133—151 (1887).

**) Vgl. II. c, b, δ.

***) Gordan, Math. Ann. V S. 95—122 (1872).
Clebsch, „Binäre Formen" § 7 (1872).

****) Gött. Abh. XVII S. 1—62 (1872).

†) Siehe die Citate in II. c, b, δ.
Während Clebsch verschiedenstufige Variabeln (Determinanten aus cogredienten Variabelnreihen) einführt, behält Capelli die Reihen von Variabeln derselben Art bei. Die Formeln Capelli's werden dadurch übersichtlicher; andererseits eignen sich diejenigen von Clebsch besser für geometrische Anwendungen. Vgl. die Anmerkung bei Capelli „Fondamenti ..." (1882), S. 3. Wegen der verwandten Untersuchungen von Deruyts siehe II. D, a.

††) Massgebend ist hierin die grundlegende Arbeit „Fondamenti ..." (1882). Im übrigen siehe II. c, b, δ.

†††) Siehe diesen Bericht S. 176, 177.

††††) Capelli hat seine vielfach zerstreuten Untersuchungen über diesen Gegenstand zusammengefasst in Math. Ann. XXXVII S. 1—37 (1891). Vgl. Nap. Rend. XXV S. 134—141 (1886); ebd. (2) I S. 110—115, 236—242 (1887), Atti R. Acc. Nap. (2) I 17 S. (1887), Math. Ann. XXIX S. 331—338 (1887).

Reihen von ν homogenen Variabeln $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_\nu), \ldots$ und fragt nach den Gesetzen, durch welche die $N = n^2$ „elementaren“ Operationen $D_{xx}, D_{xy}, D_{xz}, \ldots, D_{yx}, D_{yy}, D_{yz}, \ldots$ mit einander verknüpft sind.

In erster Linie hat man das bekannte (von Clebsch herrührende) Gesetz, wonach der „Klammerausdruck“ $D_{ik} D_{lm} - D_{lm} D_{ik}$ stets eine einfache lineare Function von Grössen D ist. Insbesondere ist, bei vier verschiedenen Indices, D_{ik} mit D_{lm} vertauschbar; desgleichen D_{ik} mit D_{il}, D_{im} mit D_{lm}*).

Nennt man ferner die N Processe D in irgend einer Reihenfolge $D_1, D_2, \ldots, D_N$, so gilt der fundamentale Satz, „dass sich jede Form F der D (die nicht nur durch ihre algebraische Zusammensetzung, sondern auch durch die Reihenfolge der operativen Factoren D in jedem Gliede bedingt ist), in die Gestalt setzen lässt

$$F = \Sigma C D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_N^{\alpha_N}.“$$

Es beruht das darauf, dass die Differenz zweier Producte, die aus denselben λ Factoren D, aber in verschiedener Anordnung gebildet sind, eine lineare Function von Producten aus je nur $\lambda - 1$ Factoren D ist.

Nunmehr wendet sich der Verfasser zu dem allgemeinen Problem, die allgemeinste Operation F zu bestimmen, welche mit jeder andern Operation derselben Art (also insbesondere mit jeder elementaren) vertauschbar ist. Dies Problem findet seine Lösung darin, dass F eine symmetrische Function der n Variabelnreihen wird, welche sich darstellen lässt als eine beliebige Form von n gewissen einfachsten, linear unabhängigen Operationen, denen jene Eigenschaft der Vertauschbarkeit zukommt. Diese letzteren sind z. B. im Falle $n = 2$ die beiden:

$$D_{xx} + D_{yy}, \quad D_{yy} D_{xx} + D_{xx} - D_{yx} D_{xy}.$$

Auf dieser Grundlage kann der Verfasser darlegen, inwiefern andere Invariantenprocesse auf die Operationen D zurückkommen. Es genügt, diese Aufgabe für den Fall der Cayley'schen Operation Ω — auf welcher alle Ueberschiebungsprocesse beruhen — zu lösen**); Ω ist in symbolischer Schreibart der Process:

---

*) Auf einige wenige charakteristische Identitäten dieser Art lassen sich alle übrigen Beziehungen zwischen Polarenprocessen zurückführen. Das sind die charakteristischen Differentialgleichungen für die Polaren. Vgl. Math. Ann. XXXVII S. 4.

**) Für zwei Reihen binärer Variabeln findet sich die betr. Formel bereits bei Clebsch, „Binäre Formen“ § 7.

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_n},$$

wo nachträglich rechter Hand jedes Glied $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \dots \frac{\partial}{\partial v_s}$ zu ersetzen ist durch die $n$te Ableitung $\frac{\partial^n}{\partial x_i \, \partial y_k \dots \partial v_s}$.

Die Operation Ω ist vertauschbar mit jeder elementaren D_{pq}, solange p und q verschieden sind, während das Product

$$\Delta^h \Omega^h \equiv (xy \dots v)^h \Omega^h \quad (h > 0)$$

die einfachere Eigenschaft besitzt, mit jedem D_{pq}, für gleiche und für ungleiche p, q vertauschbar zu sein.

Der gesuchte Zusammenhang*) zwischen Ω und den Polaroperationen wird durch die elegante Formel angegeben:

$$\Omega\Delta = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & \dots & D_{xv} \\ D_{yx} & 1 + D_{yy} & \dots & D_{yv} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{vx} & D_{vy} & \dots & n-1+D_{vv} \end{vmatrix}, \quad \text{wo} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

Jetzt lässt sich auch die oben erwähnte Operation F in übersichtlicher Weise aus Processen von dem Typus $\Delta\Omega$ zusammensetzen.

Es sei noch erwähnt, dass man aus den $N = n^2$ elementaren Operationen ein System von $n+1$ solchen derart auswählen kann, dass sich durch dieselben jede der andern ganz-rational ausdrücken lässt.

Auf die Untersuchungen des Verfassers über die lineare Unabhängigkeit von gewissen der in Rede stehenden Processe gehen wir nicht näher ein; beispielsweise kann zwischen den Potenzen einer und derselben Operation D niemals eine lineare Identität bestehen.

In anderer Richtung spielt der Polarenprocess bei der Gordan'schen Symbolik**) eine grundlegende Rolle.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den typischen Fall einer binären Form mit einer Variabelnreihe x_1, x_2. Die Form f, welche von der Ordnung $m+n$ sei, wird als Product von zunächst zwei

*) Weitere Darstellungsformeln giebt der Verfasser Atti d. R. Acc. di Napoli (2) I 17 S. (1888).

**) Vorlesungen II § 2. Für das ternäre Gebiet siehe Math. Ann. XVII S. 217—234 (1880).

(symbolischen) Factoren a_x^m, b_x^n aufgefasst. Die kte Polare f_{y^k} der Variabelnreihe $(y) = y_1, y_2$ bez. f resultirt, bis auf einen Zahlenfactor, als Coefficient von λ^k in der binomischen Entwickelung $(a_x + \lambda a_y)^m (b_x + \lambda b_y)^n$, somit als eine Summe von $k+1$ „Gliedern" $c_\varrho G_\varrho$, wo c_ϱ eine rationale Zahl ist und G_ϱ aus $a_x^m b_y^n$ entsteht, indem man beliebig ρ Factoren a_x und $(k-\rho)$ Factoren b_x wegnimmt, und jeweils durch a_y bez. b_y ersetzt.

Man hat nun den wichtigen Satz*), dass „nicht nur die Differenz zwischen zwei Gliedern, sondern auch diejenige zwischen der Polare selbst und einem ihrer Glieder stets den Factor $(a_1 b_2 - a_2 b_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ besitzt".

Die wiederholte Anwendung dieses Satzes, zugleich in seiner Erweiterung auf mehr als zwei Factoren von f, führt zu dem principiellen Ergebnis**), „dass sich jedes Glied einer Polare und **damit jedes symbolische Product** mit zwei Reihen Veränderlicher (x) und (y) in eine Summe von Polaren entwickeln lässt, die nach Potenzen von $(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ fortschreitet".

Der Satz ist ausdehnbar auf Formen mit mehreren Reihen binärer Veränderlicher, desgleichen auf das ternäre Gebiet u. s. f.

Wir gehen über zu der Ausübung des Aronhold'schen Processes auf die Coefficientencolonnen (p_i), (q_i), (r_i), ... der linearen (Punkt-) Transformation, einer Operation, welche in engstem Zusammenhange mit den Polaroperationen steht. In der That findet sich schon bei Aronhold der allgemeine Satz, dass die Coefficienten der (nach den neuen Variabeln) entwickelten transformirten Urform Polaren der ursprünglichen Form sind, nur geschrieben in den „Substitutionscolonnen" der (p), (q), (r), ...

Als eine bedeutungsvolle Folge hiervon erscheint bei Gram***) der Umstand, dass man für eine homogene Invariante J (einer Reihe von Urformen von n Variabeln) ein System von $n(n-1)$†) charakteristischen Differentialgleichungen erhält, wenn man dieselbe in den transformirten

---

*) Vorlesungen II S. 26. Der Satz stützt sich auf die Eigenschaften zweier „benachbarter" Glieder, die dadurch auseinander hervorgehen, dass man in einem Factorenpaar $a_x b_y$ die Symbole a, b vertauscht. Pascal hat die Wirkung dieses Processes, für den er ein eigenes Symbol einführt, noch weiter verfolgt (Napoli Rend. (2) I S. 200—207, 1887).

**) l. c. S. 32.

***) Math. Ann. VII S. 230—240 (1874).

Der angegebene Satz erscheint andererseits als directer Ausfluss aus der Definition der Invarianten, wonach sich die transformirte Invariante nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante von der ursprünglichen unterscheidet.

†) Die n weiteren Gleichungen, die bei Aronhold noch auftreten, sagen nur aus, dass die Invarianten in den Coefficientenreihen der Urformen homogen und isobar sind.

Coefficienten schreibt, wodurch J in J_1 übergehe, und nunmehr das Resultat der auf J_1 ausgeübten Polaroperationen D_{pq} (p ungleich q) gleich Null setzt.

Für binäre Formen hat Bruno*) gezeigt, wie man durch directe Umformung der üblichen Differentialgleichungen für die In- und Covarianten zu der obigen Gestalt gelangt.

Wir wenden uns schliesslich zu derjenigen Modification des Aronhold'schen Processes $D_{ba} = \Sigma a_i \frac{\partial}{\partial b_i}$, wo die a_i, b_i die entsprechenden Coefficienten von zwei Formen f_n, φ_n bedeuten.

Schon frühzeitig**) bediente man sich dieser Operation, um den Begriff und die Bildung der Invariante J einer Urform f_n auf mehrere Urformen f_n, φ_n etc. auszudehnen.

In seiner Anwendung auf Linearformen dient er bei Clebsch***) als Fundament der Symbolik, insofern er unmittelbar klarlegt, inwiefern die Invariante (einer Urform) vom nten Grade als simultane Invariante von n linearen Urformen geschrieben werden kann.

So lange die Coefficienten b von den a völlig unabhängig sind, ist es sehr leicht, den Process $D_{ba} J = DJ$ wiederholt auszuführen: es ist dann nur eine directe „Iteration“ erforderlich, d. h. D^2J wird in derselben Weise aus DJ abgeleitet, wie DJ aus J u. s. f.

Das Letztere ist aber nicht mehr†) der Fall, sobald sich die b in irgend einer (covarianten) Abhängigkeit von den a befinden; man stellt dann, wie Gordan entwickelt hat, entweder Recursionsformeln auf, oder aber, was theoretisch vorzuziehen, man bedient sich gewisser Reihenentwickelungen.

Der Aronhold'sche Process dient bei Gordan auch zur Begründung der „Combinanten“††); J wird zur Combinante von f, φ, sobald DJ identisch verschwindet, und umgekehrt.

Die Erweiterung auf mehr als zwei Formen ist leicht zu vollziehen.

Der Fall, dass auch hier wiederum Abhängigkeit zwischen den Urformen f, φ, ... herrscht, ist zur Zeit einer allgemeinen Discussion noch nicht zugänglich.

Nur ein specieller, für die Geometrie wichtiger Fall ist im binären

---

*) „Binäre Formen“ S. 152.

**) Siehe diesen Bericht S. 82.

***) Vgl. etwa die übersichtliche Darstellung in „Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 183 u. flgde.

†) Vgl. Gordan's Vorlesungen II § 5.

††) l. c. § 6.

und ternären Gebiete untersucht worden, nämlich der einer Urform f und einer solchen Covariante φ, dass man hat:

$$Df = \varphi, \quad D\varphi = M.f,$$

wo M ein constanter (sc. invarianter) Factor ist*).

Ein specieller Fall des Aronhold'schen Processes, „der Evectantenprocess", ist für den Aufbau der Invariantensysteme von Bedeutung geworden; man gelangt zu der „ersten" Evectante von φ, indem man die Form f als die reale μte Potenz einer Linearform annimmt, während φ in den meisten Fällen eine Invariante J μten Grades (einer Urform F) vorstellt. Symbolisch gestaltet sich die Ausführung einfach in der Weise, dass man der Reihe nach je eine der μ Symbolreihen von J durch eine Variabelnreihe x ersetzt, und dann die Summe aller Glieder bildet**).

Gordan***) hat eine Anwendung hiervon auf die Differentialgleichungen einer binären Invariante J gemacht, welche den letzteren eine direct formentheoretische Bedeutung beilegt. Die Gleichungen lassen sich nämlich so umformen, dass sie aussagen:

„Die (n—1)te Ueberschiebung der Urform mit der ersten Evectante von J verschwindet identisch, während die nte Ueberschiebung die Invariante (bis auf einen Zahlenfactor) reproducirt."

Umgekehrt lassen sich auf Grund dieses Satzes die Differentialgleichungen unmittelbar aufstellen.

II. C, b, β.

Der Ueberschiebungs- und Ω-Process.

Auf dem Ueberschiebungsprocesse beruht wesentlich die praktische Ausgestaltung der heutigen Formentheorie.

Allgemein lassen sich die Ueberschiebungen definiren als diejenigen simultaninvarianten Bildungen zweier oder mehrerer Urformen von beliebigen Variabelnreihen, welche in den einzelnen Coefficientenreihen je linear sind.

Das Folgende beschränkt sich der Anschaulichkeit halber auf einfache Fälle.

Hat man zwei, dualistisch sich gegenüberstehende Formen $F_n(x)$ und $\Phi_\nu(u)$, so bilde man zunächst die kten Polaren von F und Φ bezüglich

*) l. c. S. 74. Vgl. die Entwickelungen von Gundelfinger. Math. Ann. IV S. 164—168 (1871).

**) l. c. S. 128. Vgl. Study, „Methoden" S. 41.

***) l. c. S. 129 u. flgde. Für ternäre Formen siehe Study, „Methoden" S. 170 u. flgde.

zweier neuer Variabelnreihen (y), (v), und denke sich dieselben nach Potenzen und Producten der letzteren entwickelt.

„Die kte Ueberschiebung von F über Φ ergiebt sich hieraus, wenn man je zwei entsprechende Coefficienten der gemeinten Entwickelungen mit einander und dem bezüglichen Polynomialcoefficienten multiplicirt*), und die Summe dieser Producte bildet.“

Die symbolische Schreibart gewährt die knappste Wiedergabe des geschilderten Verfahrens. Sind $F_n(x) = a_x^n$, und $\Phi_\nu(u) = u_\alpha^\nu$ die gegebenen Formen, also $a_x^{n-k} a_y^k$ resp. $u_\alpha^{\nu-k} v_\alpha^k$ die kten Polaren, so hat man für die kte Ueberschiebung von F über Φ den Ausdruck:

$$(F, \Phi)^k = a_x^{n-k} u_\alpha^{\nu-k} (a\alpha)^k.$$

Man hätte diesen Ausdruck aber auch symbolisch so entstehen lassen können, dass man in dem Producte $F\Phi = a_x^n u_\alpha^\nu$ k-mal hintereinander ein Factorenpaar $a_x u_\alpha$ durch den „Klammerfactor“ $(a\alpha)$ ersetzt hätte, oder, um mit Gordan**) zu reden:

„Die kte Ueberschiebung zweier Formen

$$F(x) = a_x^n, \quad \Phi(u) = u_\alpha^\nu$$

geht durch k-malige Faltung des Productes $F\Phi$ hervor“.

Es ist indessen für manche Untersuchungen zweckmässig, die in Rede stehende Ueberschiebung zu verallgemeinern.

Um dies etwa am ternären Gebiete zu illustriren, so gehen wir jetzt von drei Formen mit den cogredienten (Punkt-) Variabeln (x), (y), (z) aus:

$$F_n = a_x^n, \quad G_p = b_y^p, \quad H_q = c_z^q,$$

---

*) Führt man mit Clebsch und Sylvester „präparirte“ Urformen ein, bei denen die Quadratwurzeln aus den Polynomialcoefficienten als numerische Factoren eingehen, so wird die Ueberschiebung direct die Summe aus den Producten je zweier homologer Coefficienten. Die Invarianteneigenschaft der Ueberschiebung deckt sich dann damit, dass die beiden Coefficientenreihen zu einander contragredient sind.

**) Vorlesungen II S. 33.

Hat man im ternären Gebiete zwei Formen, welche neben den x noch die u enthalten: $f_{r,s} = a_x^r u_\alpha^s$, $\varphi_{\varrho,\sigma} = b_x^\varrho u_\beta^\sigma$, so ist jede Ueberschiebung von f und φ symbolisch dargestellt durch $a_\beta^{r_1} b_\alpha^{r_2} (abu)^{r_3} (\alpha\beta x)^{r_4} a_x^{r_5} b_x^{r_6} u_\alpha^{r_7} u_\beta^{r_8}$, wo $r_1 + r_3 + r_5 = r$ ist, u. s. f.

Hier bedeutet $a_\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$, $(abu) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$ etc.

Diese Ueberschiebungen kann man sämtlich durch „Faltung“ aus dem Producte $f\varphi$ hervorgehen lassen, indem man eine geeignete Anzahl von Malen die Factorenpaare $a_\alpha u_\beta$, $b_x u_\alpha$, $a_x b_x$, $u_\alpha u_\beta$ ersetzt resp. durch a_β, b_α, (abu), $(\alpha\beta x)$. (Gordan, Math. Ann. XVII S. 217—233 (1881).)

und wenden auf das Product FGH k-mal den Process der „Faltung" an, indem wir jeweils ein Factorentripel $a_x b_y c_z$ durch den „Klammerfactor" (abc) ersetzen, so nennen wir das Ergebnis ebenfalls die „kte Ueberschiebung" der drei Formen:

$$(F, G, H)^k = (abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}.$$

In der That lässt sich hieraus rückwärts durch symbolische Specialisirung der frühere Begriff $(F, \Phi)^k$ wiedergewinnen.

Man nehme zuvörderst die Ordnungen p und q einander gleich, $= \nu$, an, und unterwerfe die Symbolreihen der b, c der Bedingung, dass das Product $b_y c_z$ eine alternirende Form derselben wird, d. h. dass alle Verbindungen der b, c ausser den $(b_i c_k - b_k c_i) = \alpha_l$ verschwinden.

Damit treten denn auch die y, z von selber nur in den analogen Verbindungen $(y_i z_k - y_k z_i) = u_l$ ein, und das Product $b_y c_z$ geht über in die Linearform u_α (also $b_y^\nu c_z^\nu$ in u_α^ν), der Klammerfactor (abc) in $(a\alpha)$, und endlich $(F, G, H)^k$ in $(F, \Phi)^k$.

Die geschilderte Verallgemeinerung lässt nunmehr die innige Verwandtschaft zwischen Ueberschiebungs- und Ω-Process mit Leichtigkeit erkennen. Um beim ternären Gebiete zu bleiben, so ist der Ω-Process hier in ausgeschriebener Gestalt:

$$\Omega = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial y_2 \partial z_3} + \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial y_3 \partial z_1} + \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial y_1 \partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial y_3 \partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial y_2 \partial z_1} - \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial y_1 \partial z_3}.$$

Die Ausübung des Ω-Processes auf ein (symbolisches oder reales) Product $a_x^n b_y^p c_z^q$ liefert sofort $npq\,(abc) a_x^{n-1} b_y^{p-1} c_z^{q-1}$, und die k-malige Anwendung desselben

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{p!}{(p-k)!} \cdot \frac{q!}{(q-k)!} \cdot (abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}.$$

Es gilt somit der fundamentale Satz*):

„Der Ω-Process ist, angewandt auf ein Product $a_x^n b_y^p c_z^q \ldots$, bis auf einen Zahlenfactor, äquivalent mit dem Faltungsprocesse, und die k-malige Iteration des Ω-Processes ist in gleicher Weise äquivalent mit der kten Ueberschiebung".

Damit ist aber auch nach Früherem der Zusammenhang zwischen Ueberschiebung und Polarenprocess festgelegt.

---

*) Vgl. die leicht zu verallgemeinernde Darstellung bei Gordan, Vorlesungen II S. 22, 23. Vgl. auch Vivanti, Pal. Rend. IV S. 261—268 (1890).

An den Ueberschiebungsprocess lassen sich nun nach Gordan*) analoge Entwickelungen anknüpfen, wie an den Polarenprocess; das leitende Princip ist wiederum die Ausübung der Ueberschiebung auf zwei Producte symbolischer Factoren: das Resultat ordnet sich dadurch von selbst als eine Summe von Gliedern. Die Differenz zweier Glieder, wie auch die Differenz zwischen der Ueberschiebung und einem ihrer Glieder, ist durch gewisse Klammerfactoren teilbar.

Daraus wird successive der Satz abgeleitet, dass „jedes Glied einer Ueberschiebung sich selbst durch eine Summe von Ueberschiebungen darstellen lässt“, und daraufhin schliesslich auch „jedes symbolische Product als Summe von einfachen (d. h. nur noch zwei Symbole enthaltenden) Ueberschiebungen“.

Ausgezeichnete Beispiele von Ueberschiebungen sind die „Functionaldeterminante“**) von m Formen (mit m homogenen Variabeln), sowie als besonderer Fall derselben die „Hesse'sche Determinante“***), wenn jene m Formen das ganze System der ersten Ableitungen einer und derselben Form ausmachen.

Die Auffassung der Ueberschiebung bei Stroh als einer „Verknüpfung“ zwischen Grössen, und insbesondere die Fruchtbarmachung des „associativen“ Gesetzes für die Theorie der Syzygien (im binären Gebiete) haben wir früher†) kennen gelernt.

Desgleichen††) die fundamentale Eigenschaft des Ω-Processes, wie sie Gordan, Mertens, Hilbert verfolgt haben, dass man bei geeignet oftmaliger Wiederholung desselben aus einer beliebigen, homogenen und isobaren Form der transformirten Coefficienten eine Invariante der Urformen erhält.

Die Untersuchung der Bedeutung des Verschwindens einer Ueberschiebung ist die Quelle der Apolaritätstheorie geworden, die ihrerseits wiederum mit der der Combinanten auf das engste verwachsen ist†††).

In anderer Richtung ist eben dieses Verschwinden einer (binären)

---

*) Vorlesungen II § 3. Math. Ann. XVII S. 217—234 (1881).

**) Wegen der Beziehungen zwischen Functionaldeterminanten vgl. II. D, b. Eine Anwendung derselben trat schon bei der Herleitung von Syzygien hervor, siehe S. 165.

***) Bezüglich der Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, vgl. II D, d.

†) S. 166.

††) S. 147.

†††) Vgl. II. D, b.

Ueberschiebung neuerdings für die Theorie der linearen Differentialgleichungen von Bedeutung geworden.

Die Gleichung $(f, \varphi)^k = 0$ stellt bei festgehaltenem φ eine lineare Differentialgleichung kter Ordnung (mit ganz-rationalen Functionen als Coefficienten) für die Form $f(x_1, x_2)$ dar.

„Aber auch umgekehrt ist es möglich, die linke Seite jeder vorgegebenen linearen Differentialgleichung kter Ordnung von einer unabhängigen Variabeln x mit rationalen Coefficienten mittelst Homogenisirung als das Aggregat einer Anzahl von **Ueberschiebungen** einer Function f mit einer Reihe von Functionen φ, φ', φ'', . . . zu schreiben.“

Dies lässt sich, wie Waelsch in letzter Zeit gezeigt hat*), folgendermassen einsehen. In der vorgelegten Differentialgleichung

$$Py^{(k)} + Qy^{(k-1)} + \cdots = 0$$

setze man $x = \frac{x_1}{x_2}$, so nimmt dieselbe bei Anwendung des Euler'schen Satzes über homogene Functionen die Gestalt an:

$$\sum_{r=0}^{r=k} A_\nu^{(r)} \frac{\partial^k y}{\partial x_1^r \, \partial x_2^{k-r}} = 0,$$

wo die A Formen von einer und derselben Ordnung ν bedeuten.

Nimmt man nun symbolisch die Unbekannte y als eine Form a_x^π ($\pi \geqq n$) an, so wird die linke Seite zur allgemeinsten Form in zwei cogredienten Variabelnreihen x_1, x_2; $-a_2, a_1$. Entwickelt man nach Clebsch und Gordan in eine Reihe, die nach Potenzen von a_x fortschreitet, so geht die ursprüngliche Differentialgleichung in der That, wenn man noch $n+\nu = m$ setzt, über in:

$$c_0(\varphi_m, f)^n + c_1(\varphi_{m-2}, f)^{n-1} + c_2(\varphi_{m-4}, f)^{n-2} + \cdots = 0,$$

wo die φ beliebige Formen der bezeichneten Ordnungen, und die c Zahlencoefficienten sind, über welche man noch geeignet verfügen kann.

Setzt man hier die unsymbolischen Ausdrücke für die einzelnen Ueberschiebungen ein, und macht schliesslich x_2 wieder gleich der Einheit, so gelangt man zur ursprünglichen Gleichung zurück.

Die geschilderte „Normirung“ der linearen Differentialgleichungen dient vor allem dazu, specielle Typen derselben übersichtlich zu charakterisiren: insbesondere erweist sie sich als vorteilhaft, wie Hilbert**) an

*) Prag. Abh. 1892. S. 78—99.

**) Dissert. Königsberg (1885), Math. Ann. XXX S. 15—29 (1887), XXVIII S. 381—446 (1887).

Perrin, S. M. F. B. XVI S. 82—100 (1888).

Hirsch, Dissert. Königsberg 1892.

einzelnen Fällen ausgeführt hat, wenn es sich darum handelt, die ganzrationalen Lösungen einer solchen Gleichung zu ermitteln.

So hatte schon Pick*) der gewöhnlichen Lamé'schen Differentialgleichung die Gestalt erteilt:

$$(\varphi_4 f)^2 = \varphi_0 f,$$

wo φ_0 eine Constante, und das Product $\varphi_0 f$ mit der 0ten Ueberschiebung $(\varphi_0, f)^0$ äquivalent ist.

Ersetzt man hier die Formen φ_4, φ_0 durch φ_m, φ_{m-4} (von den Ordnungen m, m—4), so hat man nach Klein**) die „allgemeine" Lamé'sche Differentialgleichung vor sich. Die letztere wird zur allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung, sobald man in der Form φ_m gewisse (reale) Linearfactoren einander gleichsetzt.

Lässt man dagegen in der obigen allgemeinen formentheoretischen Gestalt der Differentialgleichung f eine wirkliche Form f_π der Ordnung $\pi (\geqq n)$ bedeuten, so wird die linke Seite der Gleichung eine Form F_μ von der Ordnung $\mu = n + \nu + \pi - 2n = \nu + \pi - n$. Es entspricht dann nicht nur jeder Form f_π eine Form F_μ, sondern auch „jedem linearen System von Formen f_π ein lineares System von Formen F_μ". Waelsch***) gründet hierauf eine specifische Theorie von geometrischen Abbildungen.

II. C, b, γ.

Substitution von nicht-homogenen Differentialquotienten.

Haben wir soeben wahrgenommen, wie vorteilhaft es sein kann, eine Differentialgleichung auf eine (homogene) invariantentheoretische Normalform zu bringen, so erweist es sich auch umgekehrt für manche Zwecke als sachgemäss, z. B. behufs Bildung der Differentialgleichungen für die invarianten Bildungen, die Urformen und deren Differentialquotienten in nicht homogener Gestalt anzusetzen.

Sei $f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ eine binäre Urform, so bilde man sich die Grössenreihe:

$$f_0 = f,\ f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dx},\quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2 f}{dx^2}, \ldots, f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}.$$

Dann hat Bruno 1880 den wichtigen Satz†) aufgestellt:

*) Wien Ber. Juli 1887 19 S. Math. Ann. XXXVIII S. 139—143 (1891). Siehe auch Halphen, Traité des fonct. ellipt. T. II 1888.

**) Gött. N. März 1890, S. 85—95. Math. Ann. XXXVIII S. 144—152 (1891).

***) l. c.

†) C. R. XC S. 1203—1205, Journ. f. Math. XC S. 186—188, Am. J. III S. 154—164, Math. Ann. XVIII S. 280—288 (1881).

„Vertauscht man in dem Leitgliede C_0 einer Covariante C von f die Coefficienten a_i mit den f_i, so geht vermöge dieses Processes C_0 in C über."

Die Ausdehnung auf ein System von Urformen macht keine Schwierigkeiten.

Die vorliegende Erscheinung ist, wie Hilbert*), der dieselbe weiter verfolgt hat, betont, die gemeinsame Quelle**) einer Reihe von einzelnen Methoden Früherer: so der Cayley'schen Herleitung der Coefficienten von C aus dem Leitgliede C_0, der Roberts'schen Rechnung mit den Leitgliedern, den Cayley'schen Differentialgleichungen für die In- und Covarianten.

Letztere nehmen aber jetzt eine insofern einfachere Gestalt an, als sich ihre Anzahl auf eine einzige reducirt, vermöge des Satzes:

„Jede ganze, isobare Function C_0 der einseitigen Derivirten f_i, φ_k, ..., vom Gewichte p, welche in jenen Grössen homogen resp. von den Graden g, γ, ... sei, ist eine simultane In- oder Covariante der f, φ, ..., von der Ordnung

$$m = ng + \nu\gamma + \cdots - 2p,$$

sobald sie der Differentialgleichung

$$f_0 \frac{\partial C_0}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial C_0}{\partial f_2} + 3 f_2 \frac{\partial C_0}{\partial f_3} + \cdots$$
$$+ \varphi_0 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_1} + 2\varphi_1 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_2} + \cdots = 0$$

genügt".

Der Grundgedanke des Beweises von Bruno ist folgender: Ist φ eine Form der f_i', so ergiebt die Mac Laurin'sche Entwickelung:

$$\varphi = [\varphi] + x[\delta\varphi] + \frac{x^2}{1.2}[\delta^2\varphi] + \ldots,$$

wo δ den bekannten Differentiationsprocess $\delta = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots$ bedeutet, und die Klammern aussagen, dass hinterher x gleich Null zu setzen ist. Für die Covarianten einer binären Form f gilt aber nach Cayley eine ganz ähnliche Entwickelung; denn ist ψ eine solche, mit den Coefficienten $c_0, c_1, \ldots, c_m$, so hat man:

$$\psi = c_m + x\delta c_m + \frac{x^2}{1.2}\delta^2 c_m + \ldots$$

Die Vergleichung beider Entwickelungen liefert aber sofort den Satz des Textes. Sylvester hatte den Satz, unabhängig von Bruno, gefunden, erkennt aber Am. J. II S. 357 die Priorität des Letzteren an. Vgl. auch Stroh, Math. Ann. XXII S. 402 (1885).

*) Dissertation Königsberg (1885), Math. Ann. XXX S. 15—29 (1887).

**) Giebt man in dem Satze des Textes der willkürlichen Variabeln x den Wert irgend einer Wurzel der Gleichung f = 0, so erhält man einen Satz, den Brioschi mit Erfolg zur Transformation der Gleichung verwendet hat (Math. Ann. XXIX S. 327—330 (1887)).

Eine der wichtigsten Folgen dieser Darstellungsart ist offenbar, dass jede Relation zwischen In- und Covarianten eines Formensystems in eine Differentialgleichung übergeht. Hilbert hat bemerkenswerte Anwendungen*) hiervon gemacht.

Ferner ist man nunmehr weit eher als vordem in der Lage, In- und Covarianten für specielle vorgelegte Urformen auszuwerten.

Eine weitere Vervollständigung erfährt die Theorie bei Hilbert, wenn man neben dem Processe D noch den weiteren Δ einführt:

$$\Delta = \left(nf_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + \cdots\right) + \left(\nu\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_0} + (\nu-1)\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \cdots\right) + \cdots$$

Die Ausübung des Processes Δ auf eine (isobare) Form der f_i kommt einer Differentiation nach der Variabeln x gleich**).

Zwischen den Operationen D und Δ nebst ihren Wiederholungen herrschen einfache Recursionsgesetze von der Art:

$$D^k \Delta^l = \Delta^l D^k + c_1 \Delta^{l-1} D^{k-1} + c_2 \Delta^{l-2} D^{k-2} + \cdots,$$
$$\Delta^l D^k = D^k \Delta^l + d_1 D^{k-1} \Delta^{l-1} + d_2 D^{k-2} \Delta^{l-2} + \cdots,$$

wo die c, d numerische Factoren sind.

Hierauf stützt sich eine Erweiterung des Begriffes der Covariante (und der Ueberschiebung). Eine (isobare) Form F der f_i, φ_k, ... heisse eine Semicovariante vom Range r, wenn in der Reihe der Bildungen DF, D^2F, ... die $(r+1)$te die erste identisch verschwindende ist. Zufolge der obigen Formeln besitzt dann F die Ordnung $m+r$ in x.

Eine Semicovariante vom Range Null ist eine gewöhnliche Covariante (und umgekehrt).

Es ist von Bedeutung, dass eine solche Form F vermöge der Processe D und Δ aus Covarianten erzeugt werden kann.

Construirt man nämlich den Process:

$$[\,] = 1 - \frac{1}{1.(m+2)} \Delta D + \frac{1}{1.2.(m+2)(m+3)} \Delta^2 D^2 - + \cdots,$$

so resultiren in den Bildungen [F], [DF], ..., $[D^rF]$ $r+1$ Covarianten, $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, ..., $F^{(r)}$. „Dann ist die Semicovariante F vom Range r

*) Math. Ann. XXX l. c. S. 21 u. folgde. Vgl. II. D, d. Vgl. oben S. 128.

**) Dieser Satz hängt unmittelbar mit dem bekannten zusammen, wonach eine isobare Form der a_i, welche den beiden Differentialgleichungen $D=0$, $\Delta = 0$ genügt, eine simultane Invariante der f, φ, ... ist. Nach dem Hauptsatze des Textes kann sie sich dann nicht ändern, wenn man die a_i mit den f_i vertauscht, und kann demnach auch als Form der f_i die Variable x nicht enthalten. Ein entsprechender Satz gilt übrigens auch nach Mac Mahon für Reciprocanten, siehe II. C, c, β.

darstellbar als das lineare Aggregat*):

$$F = \sum_{k=0}^{k=r} l_k \Delta^k F^{(k)}, \quad l_k = \frac{(m+k)!}{(m+2k)!\,k!}\text{“}.$$

Der Process [] spielt dabei die Rolle einer Verallgemeinerung der Ueberschiebung, und geht in letztere, nämlich in $(f, \varphi)^p$ über, wenn man für die Form F das Product $f_0 \varphi_p$ substituirt.

Perrin**) hat Sätze dieser Art auf das ternäre und höhere Gebiete ausgedehnt, und dieselben in Beziehung zu seiner Darstellung associirter Systeme gesetzt (siehe S. 157).

II. C, b, δ.

Reihenentwickelungen.

Specialisirt man die Capelli'sche Formel für den Zusammenhang zwischen Ω- und Polarenprocess, indem man nur zwei binäre Variabelnreihen $x_1, x_2; y_1, y_2$ zu Grunde legt, und wendet sie auf eine Form $f(\overset{m}{x};\overset{n}{y})$ an, so erhält man diejenige Relation, auf welche Clebsch und Gordan***) ihre Reihenentwickelung der Form f(x; y) nach Potenzen von $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ aufgebaut haben, nämlich

$$\text{I.}\quad f = \Delta D f + \frac{m}{m+1}(xy)\Omega f,$$

wo die drei Processe Δ, D, Ω die Bedeutung haben:

$$\Delta f = \frac{1}{m}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad Df = \frac{1}{n}\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\right),$$

$$\Omega f = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_2}\right).$$

Da die Formen Df und Ωf die y zu niedrigerer Ordnung enthalten, als f, so wird man bei wiederholter Anwendung von I schliesslich alles auf Formen in x_1, x_2 allein zurückführen. Denn nach gehöriger Zusammenziehung kommt:

$$\text{II.}\quad f = \Delta^n D^n f + \alpha_1 (xy)\Delta^{n-1} D^{n-1}\Omega f + \alpha_2 (xy)^2 \Delta^{n-2} D^{n-2}\Omega^2 f + \cdots$$

Die Reihe bricht beim Gliede $\Omega^m f$ von selber ab, da $\Omega^{m+1} f$ identisch verschwindet; die Formen $D^n f$, $D^{n-1}\Omega f$, $D^{n-2}\Omega^2 f$ hängen allein von den x ab.

„Diese Entwickelung von f nach Potenzen von (xy), wo

*) Hierauf beruht der Beweis von Hilbert über die Anzahl linear unabhängiger invarianter Bildungen. Siehe diesen Bericht S. 170.

**) S. M. F. Bull. XVI S. 82—100 (1888).

***) Siehe Clebsch, „Binäre Formen“ § 7.
Gordan, Vorlesungen II S. 23.

die Coefficienten Polaren von Functionen der x sind, ist eine eindeutige"*).

Durch Vermittelung symbolischer Darstellung lassen sich die Glieder rechterhand auch als einfache Ueberschiebungen schreiben.

Setzt man

$$E_0 = D^n f = a_x^{m+n}, \quad E_1 = D^{n-1}\Omega f = b_x^{m+n-2},$$
$$E_2 = D^{n+2}\Omega^2 f = c_x^{m+n-4} \text{ etc.},$$

so gehen die einzelnen Glieder der rechten Seite unmittelbar über in die nte, (n—1)te, (n—2)te, ... Ueberschiebung von E_0, E_1, E_2, ... mit der Form $(xy)^n$.

Es ist aber ungleich zweckmässiger, die Urform f von vorn herein symbolisch anzusetzen: $f = r_x^m s_y^n$, wo dann immer erst geeigneten Producten der Symbole r und s eine reale Bedeutung zukommt.

Dann werden die Formen E direct**) durch den Faltungsprocess (sc. mit nachträglicher Gleichsetzung der x und y) gewonnen:

$$E_0 = r_x^m s_x^n, \quad E_1 = (rs) r_x^{m-1} s_x^{n-1}, \quad E_2 = (rs)^2 r_x^{m-2} s_x^{n-2}, \ldots$$

Die theoretische Bedeutung der Reihenentwickelung liegt auf der Hand. Denn es folgt daraus, dass die Form f mit zwei Reihen cogredienter Veränderlicher, hinsichtlich des Systems ihrer invarianten Bildungen, vollständig ersetzt werden kann durch die Reihe der n+1 Urformen E („Elementarcovarianten" nach Gordan), welche nur noch von einer Variabelnreihe abhängen.

Das Entsprechende gilt für eine Form f mit mehr als zwei Variabelnreihen, indem man das geschilderte Verfahren genügend oft wiederholt.

Man kann aber auch unmittelbar zu einer analogen Formel für eine Form f mit zwei ternären, ... Variabelnreihen $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ gelangen.

Specialisirt man nämlich mit Clebsch***) f zu $x_1^m y_2^n$, und führt dann symbolisch die linearen Ausdrücke ein:

$$x_1 = r_\xi, \quad y_1 = r_\eta; \qquad x_2 = s_\xi, \quad y_2 = s_\eta,$$

so geht die Differenz (xy) über in $(r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi)$, und die Elementarcovarianten lassen sich ersetzen durch die Reihe:

$$\psi_0 = r_\xi^m s_\xi^n, \quad \psi_1 = r_\xi^{m-1} s_\xi^{n-1} (r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi), \ldots$$

*) Die Eindeutigkeit ist dabei so zu verstehen, dass es keine zweite Entwickelung nach Potenzen von (xy) giebt, bei der die Coefficienten Polaren von Formen einer Variabeln wären.

**) Gordan, Vorlesungen II § 7.

***) Gött. Abh. XVII, insbes. S. 22. Vgl. Gordan, Math. Ann. V S. 95—122 (1872), wo zugleich Entwickelungen für die Polaren der „Elementarcovarianten" gegeben werden.

Clebsch*) hat auf Grund dieser Entwickelung einer Form $r_\xi^m s_\eta^n$ den fundamentalen Satz nachgewiesen, „dass man sich bei Aufstellung des Systems von invarianten Bildungen, welches zu einer Reihe von Urformen in den Variabelnreihen $(x_1 \dots x_n)$, $(y_1 \dots y_n)$, $(z_1 \dots z_n)$, ... gehört, beschränken darf auf eine einfachere Reihe von Urformen, welche von jedem „Variabelntypus“ der Art:

$$x_i, \quad p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}, \quad p_{ikl} = \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l \\ y_i & y_k & y_l \\ z_i & z_k & z_l \end{vmatrix}, \dots$$

höchstens je eine Reihe enthält“.

In der That gilt die soeben erwähnte Reihenentwickelung auch dann, wenn die ξ, η zwei Reihen irgend eines und desselben „Typus“ vorstellen.

Diese einfacheren Urformen, welche die ursprünglichen vollständig ersetzen, können ausserdem noch so**) gewählt werden, dass sie den Differentialgleichungen $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial p_{ikl\dots} \partial p_{i'k'l'\dots}} = 0$ genügen, wo die $p_{ikl}\dots$, $p_{i'k'l'}\dots$ dualistisch sich gegenüberstehende Variabeln bedeuten, und die Summe sich auf alle Paare dieser Art zu erstrecken hat. Hat man also etwa nur Punktvariable x und die contragredienten u, so ist die fragliche Summe einfach $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$.

Bei Gordan***) erscheint der Process der Reihenentwickelung als das weittragendste Hülfsmittel der symbolischen Rechnung. Wir erwähnen

---

*) l. c. § 12.

**) Forsyth hat neuerdings Quart. J. XXIII S. 102—138 (1888) für solche „reducirten Systeme“ eine Reihe von Beispielen durchgeführt, und dabei insbesondere nach dem Vorgange von Clebsch constatirt, dass die Anzahl der in den reducirten Formen auftretenden willkürlichen Coefficienten genau übereinstimmt mit denjenigen der ursprünglichen Formen.

Mertens hat reducirte Formen des quaternären Gebietes zur Aufstellung voller Systeme von Grundformen verwendet.

(Wien. Ber. XCVIII S. 691—739, 1889, sowie spätere Arbeiten ebda.)

Gordan hat in seinem Programm, Anhang (1875), den Begriff des Reducirten noch weiter geführt. Man betrachte in der Determinante der Grössen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, ... einige Reihen als willkürliche Variabeln, während die andern, wie beim Ω-Process, symbolisch durch die entsprechenden Differentialquotienten ersetzt werden. Alle derartigen invarianten Aggregate, gleich Null gesetzt, stellen Differentialgleichungen dar, welchen die „reducirten Formen“ unterworfen werden können. Mertens macht von diesen Processen den weitesten Gebrauch (l. c.).

Capelli hat in seinen „Fondamenti“ (1882), ein System einfacher Polaroperationen an die Stelle der eben erwähnten gesetzt, desgleichen Deruyts in seiner „Théorie générale des formes alg.“ (1891).

***) Entsprechendes gilt von den ternären Entwickelungen Study's.

hier etwa die Methode, die linear unabhängigen (oder „asyzygetischen") Covarianten, vorgegebenen Grades, von einer Urform zu berechnen; die Darstellung der Covarianten in den Wurzeln der Urform, den Beweis des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes, sowie den Nachweis für den Fundamentalsatz der Symbolik, dass jede Covariante als Aggregat von symbolischen Producten vorgeschriebener Gestalt geschrieben werden kann.

Mit der Ausdehnung der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwickelung auf Formen mit mehreren cogredienten Reihen von n Variabeln hat sich insbesondere Capelli beschäftigt.

Für eine ternäre*) Form etwa, mit drei Reihen: $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z})$ kommt, wenn (xyz) die Determinante der x, y, z ist:

$$f = \sum_{\nu}\sum_{\mu} (xyz)^{\varrho} D_{yz}^{\nu} D_{xz}^{\mu} \varphi_{\mu\nu}(\overset{m+\mu-\varrho}{x}; \overset{n+\nu-\varrho}{y}) \quad (\mu+\nu+\rho = l).$$

Hier sind die $\varphi_{\mu\nu}$ Covarianten, welche nur die x, y enthalten; sie entstehen aus f in der Weise, dass

$$\varphi_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} k_{\sigma} D_{zx}^{\tau} D_{zy}^{\tau'} D_{xy}^{\tau''} D_{yx}^{\sigma} \Omega^{\varrho} f,$$

wo die k numerische Factoren bedeuten, σ innerhalb gewisser Grenzen variirt, und die Exponenten τ in bestimmter Art durch die Zahl σ bedingt sind.

In seinem ersten Beweise*) bedient sich Capelli der Aronhold'schen Symbolik. Indem er von dem Specialfalle $l = 1$ ausgeht, setzt er zunächst die Zerlegung an:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{1}{z}) = a_x^m b_y^n z = D_{xz}\varphi + D_{yz}\psi + (xyz)(abc)H,$$

bei welcher die Formen φ, ψ, H die Variable z nicht mehr enthalten.

Die Untersuchung des diophantischen Gleichungssystems zwischen den Exponenten der symbolischen Factoren a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y in φ und ψ zeigt, dass letztere zwei Formen sich je aus einer bestimmten Anzahl linear unabhängiger zusammensetzen, welche direct aus der Form $a_x^m b_x^n c_x$ durch Polarisation nach den y hervorgehen.

Hieraus leitet man successive die oben angegebene allgemeine Formel her, indem man beide Seiten der Darstellung für $a_x^m b_y^n c_z$ mit weiteren Factoren c_z multiplicirt.

Der Verfasser hat seitdem fortgesetzt an der Vereinfachung des Beweises gearbeitet**). Es hat sich ihm allmählich ergeben, dass der Satz

*) Capelli, Batt. G. XVIII S. 17—34 (1880).
**) „Fondamenti" 1882: Rend. Pal. I S. 1—6 (1886);
Math. Ann. XXXVII S. 1—37 (1891);
Rend. Acc. L. VII S. 161—167 (1891), ebd. S. 3—9 (1892).

selbst nicht sowohl der Formentheorie, als der abstracten Theorie der Polarenprocesse D als solcher angehört. (Siehe oben S. 200—202.) Als Hauptmomente des neuesten Beweises treten auf: erstens, dass die Differenz zwischen zwei Producten aus denselben λ Operationen D, welche sich nur durch deren Reihenfolge unterscheiden, aus Producten von weniger Operationen D linear componirbar ist, sodann die lineare Unabhängigkeit zwischen gewissen derartigen Producten, endlich die Zurückführung des Ω-Processes auf Processe D.

Ein besonders oft zur Verwendung kommender Unterfall der Entwickelung von $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z})$ (um beim ternären Typus zu bleiben) ist derjenige, welcher entsteht, wenn $n = 1$ und zudem die y, z nur in den Verbindungen $u_i = \begin{vmatrix} y_k & z_k \\ y_l & z_l \end{vmatrix}$ auftreten, d. h. wenn die Urform f nur von den Variabeln x und deren contragredienten u abhängt. Clebsch nennt dann f einen „Connex"*).

Diese Connexe f erlauben eine directere Behandlung, wie Gordan**) schon 1872 auseinandergesetzt hat; f lässt sich in eine endliche Reihe nach Potenzen von $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ entwickeln, derart, dass die Coefficienten „Normalconnexe" werden, d. h. solche, für die eine gewisse Zwischenform identisch verschwindet.

Um dies klar zu machen, folgen wir der Darstellung bei Study***).

Ist f symbolisch gegeben durch $a_x^m u_\alpha^n$, so ergeben sich durch Faltung: $\Delta_k f = (a\alpha) a_x^{m-k} u_\alpha^{n-k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, d. s. die einfachsten Ueberschiebungen von f; verschwindet insbesondere Δf identisch, so heisst f ein „Normalconnex".

Es wird zuvörderst nachgewiesen:

I. „dass jeder Connex mit den Ordnungszahlen m, n eine (in den Coefficienten von f) lineare Covariante mit den nämlichen Ordnungszahlen besitzt, welche ein Normalconnex ist".

In der That stellt das Aggregat:

$$\text{I.} \quad G_0 = f + a_1 u_x \Delta f + a_2 u_x^2 \Delta^2 f + \cdots$$

für irgend welche (rationalen) Zahlenfactoren a eine lineare Covariante von f mit den Ordnungszahlen m, n dar.

Hier lassen sich die a vermöge Recursion eindeutig so bestimmen, dass $\Delta G_0 \equiv 0$, also G_0 ein Normalconnex ist.

*) Gött. N. 1872 S. 429—449, Math. Ann. VI S. 205—215 (1872). Vgl. Clebsch und Gordan, Math. Ann. I S. 359—400 (1869).
**) Math. Ann. V S. 95—122, bes. §§ 4, 5.
***) „Methoden" II § 3.

Der hiermit bewiesene Satz I wird jetzt der Reihe nach, genau wie auf f selbst, angewendet auf die Bildungen Δf, $\Delta^2 f, \ldots,$ wodurch die „Elementarconnexe G_0, G_1, G_2, ... erzeugt werden.

Nunmehr setzt man in ähnlicher Weise das Aggregat an:

$$\text{II.} \quad G_0 + b_1 u_x G_1 + b_2 u_x^2 G_2 + \cdots$$

und sucht dasselbe durch geeignete Bestimmung der Zahlencoefficienten b mit der Urform f zu identificiren. Das gelingt wiederum auf nur eine Art, insofern die b_i durch Auflösung eines linearen Gleichungssystemes berechnet werden.

„Somit lässt sich jeder Connex f(x; u) in eine, nach Potenzen von u_x fortschreitende Reihe entwickeln, deren Coefficienten Normalconnexe sind“.

Zugleich wird dem Beweise selbst die wichtige Folgerung entnommen, dass die Coefficienten der Elementarconnexe G_i — bis auf die Beschränkung, welche ihnen durch das Bestehen der Bedingungen $\Delta G_i = 0$ auferlegt wird — von einander unabhängig sind.

Study hat die Theorie solcher Reihenentwickelungen durch Hereinziehung der Dualität noch übersichtlicher gestaltet.

Nennt man mit Rosanes*) zwei Connexe $f = a_x^m u_\alpha^n$, $g = b_x^n u_\beta^m$ „conjugirt“, wenn die simultane Invariante

$$[f, g] = a_\beta^m b_\alpha^n$$

verschwindet, so zeigen die Reihenentwickelungen (nach Elementarconnexen) zweier Connexe mit den Ordnungszahlen m, n bez. n, m die merkwürdige gegenseitige Zuordnung, „dass jedes Glied $u_x^i G_i$ der einen Reihe conjugirt ist zu jedem Gliede $u_x^k G'_k$ der anderen Reihe, mit Ausnahme des Falles, wo die Indices i, k einander gleich sind.

Ganz ähnliche Sätze gelten für die Reihenentwickelungen für Formen mit zwei cogredienten Variabelnreihen.

Study hat ferner nachgewiesen, dass die erörterten Entwickelungen ihre wesentlichen Eigenschaften beibehalten, auch wenn der vorgelegte Connex f nicht mehr ein allgemeiner, sondern selbst ein normaler ist**).

Derselbe Verfasser hat endlich, vermöge eingehenden Studiums der durch die Substitutionscoefficienten repräsentirten Mannigfaltigkeit und gewisser in ihr enthaltenen invarianten Untergebiete, den Reihenentwickelungen eine geometrische, oder besser gesagt, begriffliche Bedeutung untergelegt***).

---

*) Cf. II. D, b.
**) l. c. II § 8.
***) l. c. II § 12.

II. C, b, ε.

Substitution von homogenen Differentialquotienten.

Sylvester hat, wie in der Einleitung hervorgehoben ist*), durch Substitution der ersten Differentialquotienten einer Form G(u) an Stelle der, mit ihnen cogredienten Variabeln x in eine Form F(x), eine simultaninvariante Bildung erzeugt. War insbesondere F(x) bereits eine Covariante, G(u) eine Contravariante von vorgelegten Urformen, so lieferte der Process eine neue Contravariante.

In neuerer Zeit hat Sylvester**) noch ein anderes Princip angegeben, um aus zwei invarianten Bildungen eine dritte abzuleiten. Dasselbe verdient vor allem hinsichtlich seines Ursprunges Beachtung, insofern ihm eine einfache Beziehung zu Grunde liegt zwischen der Substitutionsgruppe der Variabeln x und der hierdurch inducirten Substitutionsgruppe der Coefficienten a einer Urform.

Um diese Beziehung deutlicher hervortreten zu lassen, wird die Urform zuvor „präparirt"***), d. h. die Coefficienten a werden mit den Quadratwurzel'n aus den bezüglichen Polynomialcoefficienten als numerischen Factoren ausgestattet. „Dann induciren zwei „reciproke" Substitutionen der x stets auch zwei reciproke Substitutionen der a." Hat man nunmehr wiederum eine Covariante F(x) und eine Contravariante G(u), so ersetze man die Grössen a innerhalb F(x) durch die Differentialquotienten $\frac{\partial G(u)}{\partial a}$, zugleich die x durch die u, so gelangt man dadurch ebenfalls zu einer neuen Contravariante.

In ähnlicher Weise kann man auch aus zwei Covarianten eine neue Covariante erzeugen.

Der geschilderte Substitutionsprocess lässt sich aber auch auf die Leitglieder von Formen F(x), G(u) übertragen. Setzt man in einem derselben statt der a die entsprechenden Ableitungen des andern, so gewinnt man ein neues Leitglied einer Covariante resp. Contravariante.

Während Sylvester den oben mitgeteilten Hülfssatz successive für das binäre, ternäre, ... Gebiet nachweist, hat Lipschitz†) einen directen

---

*) Siehe oben S. 85, 86.

**) Journ. f. Math. LXXXV S. 89—114 (1878). Vgl. auch oben S. 103.

***) Diese „präparirten" Coefficienten treten übrigens bereits bei Clebsch auf, Gött. Abh. XVII. S. 14 (1872).

†) Am. J. I S. 336—346 (1878), vgl. die Bemerkungen von Sylvester dazu, ebd. S. 341—343.

Einen einfachen symbolischen Beweis für den Satz über die transponirten Substitutionen hat le Paige gegeben, Math. Ann. XV S. 206—210 (1879).

Beweis gegeben. Er bringt dabei den fraglichen Satz in unmittelbare Beziehung zu einem ähnlichen, der die Verwandtschaft zwischen Variabeln- und Coefficientengruppe von anderer Seite her ergänzt. Es zeigt sich nämlich, „*dass auch zwei „transponirte“ Substitutionen der einen Art zwei transponirte der anderen Art bedingen*“.

*Study**) hat den letzteren Satz auf Connexe ausgedehnt, und einige Folgerungen daraus gezogen, welche das *Dualitätsprincip* als den inneren Kern derartiger Erscheinungen erkennen lassen.

„Denkt man sich nämlich neben einem ersten Connex $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{u})$ einen zweiten $\varphi(\overset{n}{x}, \overset{m}{u})$ mit vertauschten Ordnungszahlen, und ebenfalls in präparirter Form geschrieben, dann sind die beiderlei Substitutionsgruppen der Coefficienten zu einander transponirt.“

In der That, bezeichnet man die beiderlei Coefficienten mit a, b, die transformirten resp. mit a′, b′, so ist das Aggregat $\Sigma ab = \Sigma a'b'$, d. h. Σab ist eine *identische* Covariante, gerade wie es Σxu ist**).

Hieraus ergiebt sich weiter, dass, wenn F irgend eine Function der a bedeutet, die Grössen $\frac{\partial F}{\partial a}$ zu den b *cogredient* sind.

Darauf stützt sich die Einführung des *Evectantenbegriffes* bei Connexen; man hat nur die $\frac{\partial F}{\partial a}$ geradezu an Stelle der b einzusetzen. Die Evectante ist dann von selbst wiederum eine präparirte Form. Der Evectantenprocess lässt sich wiederholen: die Coefficienten der kten Evectante sind die partiellen Ableitungen kter Ordnung des Connexes F.

II. C, b, ζ.

Differentialgleichungen.

Dem Anteil, welchen *Aronhold*, *Sylvester*, *Cayley*, *Brioschi*, *Betti* an der Aufstellung der Differentialgleichungen für die Invarianten einer oder mehrerer Urformen genommen haben, ist in der Einleitung***) Beachtung geschenkt worden. Die Fortschritte, welche in der

---

*) „Methoden“ S. 36 u. flgde. Vgl. dazu die Bemerkungen S. 203.

**) Offenbar lassen sich sowohl die alten, als die neueren Entwickelungen Sylvester's über Ersetzung von Differentialquotienten an Stelle von Variabeln resp. Coefficienten übertragen auf den Fall von *irgend* zwei, dualistisch sich gegenüber stehenden Variabelnreihen $p_{ikl}, \ldots, p_{i'k'l'}, \ldots$, denn die Summe $\Sigma p_{ikl}, \ldots p_{i'k'l'}, \ldots$ ist wiederum eine identische Covariante u. s. f.

***) S. 87.

neueren Periode erzielt worden sind, beziehen sich vorwiegend auf die innere Bedeutung, den gegenseitigen Zusammenhang und die daraus fliessende Reduction jener Gleichungen.

Nachdem Clebsch die Notwendigkeit begründet hatte, behufs Bildung der Invarianten eines Systemes von Urformen mit mehreren Variabelnreihen die Unterdeterminanten p_{ik}, p_{ikl}, ... der aus n derartigen Reihen zusammensetzbaren Determinanten als selbständige Veränderliche einzuführen, erhob sich zunächst die Aufgabe, die Differentialgleichungen der Invarianten einer Urform $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dahin zu modificiren, dass sie nunmehr für eine invariante Bildung von f gelten, welche ausser von den x und den contragredienten u auch noch von jedem Zwischen-Variabelntypus p_{ik}, p_{ikl}, ... je eine Reihe enthalten darf.

Allgemein ist die bezeichnete Aufgabe erst neuerdings von Forsyth*) gelöst worden.

Indem er nach dem Vorgange von Lie von einer infinitesimalen Substitution der x ausgeht, d. i. einer solchen, deren Coefficienten sich von denen der „Einheitssubstitution“ $x_i = X_i$ nur um unendlich kleine Grössen δ unterscheiden, berechnet er die Aenderungen, welche jene Unterdeterminanten p_{ik}, p_{ikl}, ..., u, sowie die Coefficienten a der Urform hierbei erleiden. Es brauchen zu diesem Zwecke nur die ersten Potenzen der δ berücksichtigt zu werden.

Beispielsweise ergeben sich so für die invariante Bildung J einer quaternären Form $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit den Coefficienten a_{iklm} sechs lineare partielle Differentialgleichungen von dem Typus:

$$\Sigma\Sigma\Sigma i a_{i-1,k+1,l,m} \frac{\partial J}{\partial a_{iklm}} = x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} + p_{14} \frac{\partial J}{\partial p_{24}} - p_{31} \frac{\partial J}{\partial p_{23}} - u_2 \frac{\partial J}{\partial u_1}.$$

Es hat auch keine principielle Schwierigkeit, auf diesem Wege Urformen zu berücksichtigen, in welche die x, p_{ik}, p_{ikl}, ..., u sämtlich oder teilweise eingehen.

Die von Clebsch**) festgestellte Thatsache, dass die n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen für eine absolute Invariante ein vollständiges System bilden, d. h. dass die Anwendung des Klammerprocesses immer nur auf lineare Combinationen der alten Gleichungen führt, erscheint vom Standpunkte der allgemeineren Lie'schen Theorie in sehr durchsichtigem Gewande.

Denn während die Differentialgleichungen der Invariante

*) Lond. Proc. XIX. S. 24—46 (1888).
**) S. 97.

einfach aussagen, dass die letztere die sämtlichen infinitesimalen Substitutionen der Variabeln (oder auch der Coefficienten) gestattet, deckt sich die Eigenschaft des „vollständigen Systems“ damit, dass die Substitutionen eine Gruppe bilden.

Study*) hat diesen Zusammenhang für die projectiven Invarianten des näheren verfolgt, und hat daraufhin insbesondere nachgewiesen, dass gewissen Zusammenfassungen der Differentialgleichungen eine unmittelbare formentheoretische Bedeutung, nach symbolischer wie nach unsymbolischer Richtung hin zukommt. Gordan hatte das, wie schon früher bemerkt**), für das binäre Gebiet geleistet.

Bei Study***) wird zuvörderst eine lineare Transformation der x durch eine in den x, u bilineare Form T repräsentirt. Weiterhin wird — etwa im ternären Gebiete — die Mannigfaltigkeit der Formen T abgebildet auf einen linearen Punktraum R von $9-1=8$ Dimensionen: dieser Raum R wird infolgedessen durch eine achtgliedrige Gruppe transformirt.

Der identischen Transformation u_x entspricht ein „invarianter“ Punkt, der Einheitspunkt: desgleichen entspricht der Gesamtheit der Transformationen T' von verschwindender Discriminante eine lineare siebenfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit R'.

Jede infinitesimale Transformation bildet sich ab mittels einer „Geraden“ in R, welche durch den Einheitspunkt geht. Bestimmt man nun diese Gerade durch ihren Schnittpunkt mit R', so hat man damit jeder infinitesimalen Transformation eine bestimmte **endliche** T' von verschwindender Discriminante eindeutig umkehrbar zugeordnet, und hat zugleich in der Bilinearform T' ein **Symbol** für die infinitesimale Transformation.

Auf diesem Wege gelangt man zu einer durchsichtigen symbolischen Schreibart für die Differentialgleichungen der Invarianten J einer Urform f.

Die unsymbolische Bedeutung der Gleichungen ist dann dadurch ausgedrückt, dass die Evectante J' von J zu einer gewissen simultanen Covariante von J und f Veranlassung giebt, die sich von dem Producte Fu_x nur um einen Zahlenfactor unterscheidet.

Bei Sätzen dieser Art haben übrigens die ganz-rationalen Invarian-

*) „Methoden ...“ II § 18.
**) Siehe oben S. 205.
***) l. c. § 15.

ten nichts Ausgezeichnetes mehr; an deren Stelle darf auch eine rationale, resp. algebraische, resp. analytische Invariante treten.

Es drängt sich nunmehr die andere Frage auf, auf welche Minimalanzahl von unabhängigen Gleichungen das ganze System von n^2 Differentialgleichungen reducirt werden kann.

Die gemeinte Minimalanzahl von Gleichungen muss dann die Eigenschaft haben, dass man durch wiederholte Anwendung des Klammerprocesses alle übrigen Gleichungen des Systems erhält.

Aus der oben berührten Darstellung der infinitesimalen Substitutionen durch bilineare Formen mit verschwindender Discriminante kann aber gefolgert werden, dass die gesuchte Minimalanzahl gleich Zwei*) ist.

Eine andere Methode der Reduction rührt von Kronecker**) her. Kronecker setzt die allgemeine lineare Substitution von n Variabeln aus einer Reihe einfacherer zusammen, sodass die Reihenfolge der letzteren mit der Ausübung der ersteren äquivalent ist. Als derartige einfachere Substitutionen nimmt man zweckmässig solche, bei denen sich die Transformation nur auf zwei Variable erstreckt, und hier insbesondere wiederum solche, bei denen sich dieselben nur um constante Factoren ändern.

So gelangt man beispielsweise zu $m-2$ „einfachen Decompositionssystemen“ mit numerischen Coefficienten: die $2n-2$ entsprechenden Differentialgleichungen, die der Reihe nach aussagen, dass eine Invariante bei jeder einzelnen der $2n-2$ Substitutionen unverändert bleibt, ersetzen das Aronhold'sche System der n^2 Differentialgleichungen vollständig.

Für absolute Invarianten hat zu jenen $2n-2$ Gleichungen noch eine weitere hinzuzutreten.

Kronecker hebt selbst hervor, dass seine Gleichungen ohne***) Anwendung irgend welcher Symbolik erlangt worden sind; ferner, dass bei der Charakterisirung der Invarianten keine einzige jener $2n-2$ resp. $2n-1$ Gleichungen entbehrt werden kann, sowie endlich, dass eben die von ihm ausgeführte Reduction der n^2 ursprünglichen Gleichungen auf $2n-1$ vollständigen Aufschluss giebt über die zwischen den n^2 Gleichungen

---

*) Vgl. dazu die Bemerkungen von Kronecker, der die genannte Erscheinung auf einen substitutionentheoretischen Satz zurückführt. Berl. Ber. 1889 S. 504.

**) Berl. Ber. 1889. S. 349—362, 479—505, 603—614.

Die verwandten Betrachtungen von Deruyts sind bei der zusammenhängenden Darstellung im Abschnitte über Seminvarianten II. D, a zur Sprache gebracht.

***) Das Gleiche gilt übrigens von den oben erwähnten Differentialgleichungen bei Forsyth, sowie von den neueren Herleitungen der Differentialgleichungen für „Reciprocanten“, siehe II. C, c, β.

bestehenden Beziehungen, durch welche nach Aronhold ihre Coexistenz bedingt ist.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, dass die Bedeutung der Differentialgleichungen, welchen die Invarianten genügen, abgesehen von der praktischen Erleichterung, welchen sie bei der Berechnung derselben gewährten, vor allem darin beruht, als sie für eine unsymbolische Behandlung der meisten Aufgaben der Formentheorie bis auf die neueste Zeit die einzige allgemeine Methode darboten. Denn die gleichfalls unsymbolische Methode der „canonischen Formen“ lässt sich selbst wiederum vollständig nur mit Hülfe jener Differentialgleichungen begründen*).

Anhang.

II. C, c, α.

Verallgemeinerungen.

Höhere Transformationen.

Es mag zum Schlusse dieses Hauptabschnitts noch auf zwei Verallgemeinerungen eingegangen werden, deren erste mit Gruppen von nichtlinearen, rationalen Transformationen der Variabeln zu thun hat, während die zweite der sogenannten „erweiterten Gruppe derselben“, oder, was auf dasselbe herauskommt, der Theorie der „Differentialinvarianten“ angehört.

Die höheren rationalen Transformationen sind vom formentheoretischen Standpunkt aus nur**) im binären Gebiete vollständig untersucht worden.

Auf die invariante Gestaltung der Tschirnhausen-Transformation, durch Hermite, bei der die neue (nicht homogene) Variable eine ganze Function der alten ist, ist bereits früher***) hingewiesen worden.

---

*) Ein weiteres, schon früher (S. 147) berührtes, auf der Benutzung des Ω-Processes beruhendes unsymbolisches Verfahren ist von Mertens zu den Differentialgleichungen für „reducirte“ Formen in unmittelbare Beziehung gesetzt worden.

(Wien. Ber. XCVIII S. 691–739, 1889.)

Dagegen nehmen die neuesten Untersuchungen von Hilbert immer mehr einen rein arithmetischen Charakter an.

**) Siehe die Bemerkungen auf S. 102. Bezüglich der höheren Transformationen bei associirten Darstellungen siehe S. 156.

***) S. 93. Es sei hier ergänzend hinzugefügt, dass Brioschi, unmittelbar an Hermite anknüpfend, diejenigen partiellen Differentialgleichungen aufgestellt hat, denen die Coefficienten der transformirten Gleichung zu genügen haben. (Atti Ist. Lomb. I S. 231, 1858.)

Der Hermite'sche Ansatz ist später von Klein schärfer ausgeprägt worden, indem die Tschirnhausen-Transformation geradezu auf ein „typisches“ Coordi-

Gordan*) verdankt man den Nachweis, dass und wie die binäre Invariantentheorie der rationalen Transformation auf die projective zurückgebracht werden kann.

Es handelt sich hierbei nur um relative Invarianten, da sich unschwer einsehen lässt, dass die Möglichkeit einer absoluten Invariante ausgeschlossen ist.

Auf eine binäre Form $f(x_1, x_2)$ wird die Transformation

$$z_1 = \varphi_m(x_1, x_2), \quad z_2 = \psi_n(x_1, x_2)$$

ausgeübt, indem man die Resultante F (bez. der x) der beiden Formen f und $z_1\psi - z_2\varphi$ bildet. F heisst die transformirte Form, und die Aufgabe ist, die Invarianten von F durch die einfachsten simultanen Invarianten der f, φ, ψ auszudrücken. Hierbei können die beiden letzteren Formen φ, ψ durch die „Combinante"**)

$$\vartheta(x; y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$$

ersetzt werden.

Aber nicht umgekehrt ist jede simultane Invariante von f, φ, ψ oder auch von f, ϑ eine Invariante von F; dazu muss sie noch gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen.

Clebsch***) hat dieselben aufgestellt und zugleich nachgewiesen, dass sie ein vollständiges System bilden.

Für den Fall $m = 2$ lässt sich die Integration durchführen.

---

natensystem bezogen wird. Siehe etwa „Vorlesungen über das Ikosaeder ..." (1884), Abschnitt II Kap. II §§ 5, 6.

Es sei hier noch einer anderen Verwendung einer höheren Transformation gedacht. Ist $f_n(x, 1)$ eine, nicht homogen geschriebene binäre Form, so geht vermöge der Substitution $z = \frac{g(x, 1)}{f'(x, 1)}$ f über in eine Form $F_n(z, 1)$, deren Coefficienten sämtlich Invarianten sind, vorausgesetzt, dass g eine Covariante der Ordnung $n-2$ ist (Hermite, C. R. 1865, vgl. dazu noch Rahts, Math. Ann. XXVIII S. 34—60, 1886). Bei Bruno-Walter S. 191 wird dieser Satz dahin ausgedehnt, dass f selbst eine Covariante der Ordnung n ist. Junker (Dissert. Freiburg, 1887) hat nachgewiesen, dass der letztere Satz gewissen Einschränkungen unterliegt. Brioschi hat neuerdings in einer Reihe von Arbeiten an Hermite wieder angeknüpft, und insbesondere gezeigt, wie einfach sich die transformirten Covarianten bei Substitution einer Wurzel der Urform darstellen: Math. Ann. XXIX S. 327—330 (1887), Annali di Mat. (2) XVI S. 181 bis 189, 329—334 (1888), Lond. M. S. Proc. XX S. 127—131 (1889). Siehe oben S. 211.

*) Journ. f. Math. LXXI S. 164—194 (1870).

**) Die Function $\vartheta(x, y)$ ist nichts anderes, als die später von Gordan systematisch eingeführte „erzeugende Function" R der Combinanten von φ und ψ (cf. II. D, b). Auch die Entwickelung von R nach „Elementarcovarianten" findet sich hier bereits vorgebildet.

Ein ausgerechnetes Beispiel, nämlich die quadratische Transformation einer biquadratischen Form findet sich bei Cayley, Math. Ann. III S. 359—361 (1871).

***) Gött. Abh. XV S. 65—99, 1870.

Die höheren Transformationen werden dazu benutzt, um Gleichungen bestimmte Invarianteneigenschaften*) zu erteilen.

In besonderen Fällen lässt sich nach Clebsch**) die höhere Transformation unmittelbar auf eine lineare zurückführen, so z. B. die kubische Transformation einer f_3.

Torelli***) hat den eigentlichen Grund dieser Erscheinung in dem genannten Falle in einer Identität — mit linearen Covarianten als Coefficienten — aufgedeckt, welche zwischen drei beliebigen kubischen Formen herrscht.

Die beiderlei transformirten Formen unterscheiden sich nur um einen constanten Factor, der sich als das Product zweier Invarianten herausstellt.

Clebsch†) hat die höheren Transformationen binärer Formen zu den linearen Transformationen eines Raumes von mehreren Dimensionen in Beziehung gesetzt und den ersteren damit zugleich eine durchsichtige geometrische Interpretation erteilt.

Liegt etwa eine quadratische Transformation einer Gleichung fünfter Ordnung $f(\lambda) = 0$ mit den Wurzeln λ_i vor:

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3},$$

und repräsentirt man die (y), (x) als Coordinaten zweier Punkte einer Ebene, so werden die Wurzeln ξ_i der transformirten Gleichung $F(\xi) = 0$ gegeben durch die Schnittpunkte der Verbindungslinie jener beiden Punkte:

$$z_k = y_k - \xi x_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

mit den fünf Geraden

$$z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0.$$

Letztere sind aber fünf Tangenten des Kegelschnitts

$$z_2^2 - 4 z_1 z_3 = 0 \dagger\dagger).$$

Hieraus geht sofort hervor, weshalb man für das Studium der genannten Gleichungen noch mit quadratischen Transformationen ausreicht.

---

*) Im besondern wird man, nach dem Vorgange von Hermite, vermöge der höheren Transformation die transformirte Form zu einer „typischen" machen wollen, deren Coefficienten Invarianten sind. Welche Bedingungen hierdurch der Transformation auferlegt werden, ist allgemein noch nicht untersucht worden. Siehe auch vorige S. unten.

**) l. c.

***) Atti. Acc. P. Nap. XVIII S. 215—225 (1888), Pal. Rend. II S. 165—171 (1888).

†) Gött. Nachr. 1871 S. 335—345, Math. Ann. IV S. 284—345 (1871).

††) Hieraus lässt sich auch unmittelbar die Wirkung derjenigen quadratischen Transformation ablesen, die aus der obigen durch Vertauschung von ξ mit λ hervorgeht.

Sei etwa $F(\xi) = 0$ eine gegebene Gleichung 5. Ordnung, so sind ihre fünf

Die verschiedenen Arten, auf welche man die Punkte (x), (y) noch auf der Geraden (z) wählen kann, entsprechen den verschiedenen linearen Transformationen, welche die transformirte Gleichung noch zulässt.

Denn die Ersetzung jener beiden Punkte durch irgend zwei andere ihrer Verbindungslinie ist genau äquivalent einer linearen Substitution von ξ.

Clebsch betont, dass gerade hierdurch die in der höheren Transformation liegenden eigentümlichen Elemente gesondert erscheinen von dem Einfluss, welchen eine nachträgliche lineare Transformation noch ausüben kann.

Auch der Gordan'sche Satz, dass die Invarianten der transformirten Gleichung nur von den Combinanten der φ, ψ abhängen, tritt hier unmittelbar in Evidenz.

Für Gleichungen sechster*) und siebenter Ordnung wird man analog mit kubischen Transformationen auskommen, zu deren Deutung alsdann eine kubische Raumcurve herangezogen wird.

Clebsch hat als eine Anwendung des geschilderten Princips eine vollständige anschauliche Uebersicht über die Zusammenhänge entwickelt, welche zwischen den Gleichungen fünfter Ordnung und ihren Resolventen bestehen, insbesondere mit der Jerrard'schen Form und der Modulargleichung.

Ueber höhere eindeutige Transformationen im Gebiete von n Variabeln ist neuerdings eine Arbeit von Maurer**) erschienen, die sich im be-

---

Wurzeln ξ_i repräsentirt durch fünf Punkte $(y) - \xi_i (x)$ der Geraden (y)(x). Legt man von diesen die fünf möglichen Tangentenpaare an den Kegelschnitt: $z_1 + \lambda_r z_2 + \lambda_r^2 z_3 = 0$ ($r = 1, 2, \ldots, 10$), so hat man in den 10 Argumenten λ die Wurzeln der transformirten Gleichung.

Die invarianten Bildungen der transformirten Form sind simultaninvariant bezüglich der drei Formen $F(\xi)$, $x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3$, $y_1 + \xi y_2 + \xi^2 y_3$. Eine Reihe von expliciten Formeln dieser Art hat Spottiswoode mitgeteilt (Rom. Acc. L. (3) VII S. 218—223 (1883), Lond. Proc. XVI S. 148—171 (1885). Pittarelli hat mittels symbolischer Rechnung einen vollständigen Beweis dafür gegeben: Rom. Acc. L. Rend. (4) I S. 327—331, 374—381 (1885).

*) Eine Untersuchung der Gleichung 6. resp. 7. Ordnung in diesem Sinne erscheint sehr wünschenswert, so zwar, dass auch die Gruppenverhältnisse dabei deutlich hervortreten.

**) Journ. f. Math. CVII S. 89—116 (1890).

Es sei von vorn herein betont, dass die von Maurer verwendeten Transformationen mindestens einen willkürlichen Parameter enthalten müssen.

Im übrigen tritt die Arbeit als eine directe Verallgemeinerung der auf S. 133 besprochenen desselben Verfassers auf.

Bezüglich der algebraisch-geometrischen Theorie der eindeutigen Transformationen von zwei Variabeln, welche von Riemann, Cremona, Clifford, Noether, Rosanes, Brill u. anderen gefördert worden ist, siehe etwa Clebsch-Lindemann I, 4. Abt. IX, sowie insbesondere Noether, Math. Ann. XXIII S. 311—358 (1887). Erst neuerdings ist es Noether gelungen, die Anzahl der absoluten Invarianten (Moduln) einer „Fläche" zu bestimmen: Berl. Ber. 1888 S. 1—5.

sonderen das Ziel stellt, die Differentialgleichungen der dann existirenden Invarianten zu den bekannten n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen in Parallele zu setzen.

Der Verfasser geht davon aus, dass man bisher solche Eigenschaften specieller Formen, welche in, zwischen den Coefficienten bestehenden (algebraischen) Relationen ihren Grund haben, vom Standpunkt der Invariantentheorie nur*) erst in einzelnen Fällen studirt habe.

Um dem abzuhelfen, teilt er die Formen einer bestimmten Ordnung p von n Variabeln x in Klassen ein: die Gesamtheit der Formen bildet die Klasse Ω_0: diejenigen Formen, deren Coefficienten einem bestimmten (irreducibeln) System algebraischer Gleichungen genügen, bilden die Klasse Ω_1.

Genügen die Coefficienten einem weiteren solchen System algebraischer Gleichungen, so scheidet sich aus Ω_1 die Klasse Ω_2 ab u. s. f.

Die scheinbare Willkür dieser Klasseneinteilung verschwindet, wenn man, um zu Invarianten zu gelangen, Transformationen ausübt, welche eine „Gruppe" bilden.

Man denke sich nämlich vermöge der Gleichungen, welche die Klasse Ω_i charakterisiren, eine Anzahl von Coefficienten der Form als homogene, algebraische Functionen von t noch übrigen, als völlig willkürlich betrachteten Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_t$ bestimmt; die Form sei demgemäss mit $f(x, u)$ bezeichnet.

Man unterwerfe nun die beiden Variabelnreihen x, u einer Transformationsschar:

$$(S) \quad x_i = \varphi_i(y|p), \quad u_k = \psi_k(v|p)$$

von folgender Art.

Die φ sind rationale**) homogene Functionen der x, in welche m Parameter p algebraisch eingehen; die ψ sind algebraische Functionen der v, p und bezüglich der v homogen.

Die Gleichungen (S) sollen ausserdem eine „Gruppe" von Transformationen bilden, welche die identische Transformation enthält; die Umkehrung der Transformation soll demnach wiederum zu Gleichungen derselben Art: $y = \varphi'(x|p')$, $v = \psi'(u|p')$ führen, wo die neuen Parameter p' algebraisch von den alten p abhängen.

Wenn es nun möglich ist, dass für alle Werte der Para-

*) Vgl. indessen die neuesten Entwickelungen von Deruyts (II. D, a), welcher durch directe Untersuchung der invarianten Bildungen (jedoch nur bei projectiven Transformationen) zu Resultaten gelangt, die inhaltlich mit denen von Maurer äquivalent sind.

**) Der weitere Verlauf der Untersuchung ergiebt, dass die φ homogen vom ersten Grade in den x sein müssen.

meter p f(x, u) transformirt werde in f(y, v), so heisst die Gruppe (S) der Klasse Ω_i „zugeordnet".

Es ergiebt sich umgekehrt, dass solche Systeme von Gruppen (S) existiren, und dass diese sämtlichen*) Systeme zu einer ganz bestimmten Klasseneinteilung Ω_i führen, und desgleichen zu einem und demselben Invariantensysteme der Klasse Ω_i.

Der Beweis beruht einmal auf dem früher erwähnten Christoffel'schen**) Satze, wonach — wenn man von gewissen Ausnahmefällen absieht — die Aequivalenz durch die Gleichheit der absoluten Invarianten charakterisirt wird; sodann aber auf den Elementen der Lie'schen Gruppentheorie, die nur, mit Rücksicht auf die Eigenart der hier gebrauchten Transformationen, in bestimmter Weise zu modificiren sind.

Der Verfasser gelangt so zu dem Ergebnis, dass die n Functionen φ', die t Functionen ψ' und endlich f selbst je m charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen zu genügen haben.

Dieselben sind von der Gestalt:

$$(D_1) \qquad \sum_1^m Q_i \frac{\partial\varphi'}{\partial p_i} - \sum_1^n X_k \frac{\partial\varphi'}{\partial x_k} = 0,$$

$$(D_2) \qquad \sum_1^m Q_i \frac{\partial\psi'}{\partial p_i} - \sum_1^t U_l \frac{\partial\psi'}{\partial u_l} = 0,$$

$$(E) \qquad \sum_1^n X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^t U_l \frac{\partial f}{\partial u_l} = 0,$$

wo die Q ausschliesslich von den p, die U von den u, die X von den x abhängen.

„Die Invarianten J der Formenklasse sind bestimmt durch die m Differentialgleichungen:

$$(J) \qquad \sum_1^t U_l \frac{\partial J}{\partial u_l} = 0.$$

Ist m' die Anzahl der wesentlichen unter diesen Differentialgleichungen, so hat die Formenklasse t—m' von einander unabhängige Invarianten."

Jede von f(x, u) verschiedene Lösung der Gleichungen (E) ist als Covariante von f zu betrachten.

*) Hierbei ist stillschweigend die Erweiterung getroffen, dass die Functionen φ auch noch von den u in irgend einer algebraischen Weise abhängen dürfen: solcher Systeme (S), welche die u nicht enthalten, giebt es thatsächlich nur ein einziges. Ganz anders gestaltet sich natürlich das Ergebnis, wenn, wie bei Lie, hinsichtlich des functionalen Charakters der Functionen φ, ψ gar keine Einschränkungen gemacht werden.

**) Math. Ann. XIX S. 280—290 (1882).

Die Gruppeneigenschaft der Transformationen (S) zieht nach sich, dass jene vier Systeme (D_1), (D_2), (E), (J) „vollständige“ sind.

Dass die Einteilung der Formen f in Klassen in bestimmter Weise vor sich geht, sieht man so ein.

Die Form f(x, u) der Klasse Ω_i gehe in eine Form der Klasse Ω_{i+1} über, indem die u dem irreducibeln Gleichungssysteme:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_\nu = 0$$

unterworfen werden.

Nun soll die Klasse Ω_{i+1} dahin festgelegt sein, dass durch die, der Klasse Ω_i zugeordneten Transformationen jede Form der Klasse Ω_{i+1} in eine Form derselben Klasse transformirt wird.

Daraus lässt sich aber ableiten, dass auch die Functionen Π den Differentialgleichungen (D_2) für die ψ' genügen.

Aus den Differentialgleichungen (E), welchen die allgemeine Form der Klasse Ω_i genügt, ergiebt sich damit ein völlig analoges System von Gleichungen, welchen die allgemeine Form der Klasse Ω_{i+1} genügt, und das Entsprechende gilt von den Differentialgleichungen für die Invarianten.

Die n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen für die „allgemeinen“ Formen der Klasse Ω_0 bleiben daher in ihrem wesentlichen Charakter für die folgenden Klassen bestehen.

Nur in besonderen Fällen*) treten für die letzteren Klassen noch weitere Differentialgleichungen hinzu.

II. C, c, β.

Invarianten der erweiterten projectiven Gruppe**).

(Reciprocanten und Differentialinvarianten).

Die Theorie der „Reciprocanten“ ist im Jahre 1885 von Sylvester***) begründet, und seitdem von ihm selbst und von seinen Freunden und

---

*) Damit dies eintritt, muss jedenfalls die Discriminante von f verschwinden, ein Fall, den schon Aronhold als exceptionellen erkannt hat.

**) Siehe die Erklärungen auf S. 102, 103. Der Referent ist sich wohl bewusst, das vorliegende Thema nur in sehr unvollständiger Weise bearbeitet zu haben: indessen war eine Beschränkung auf diejenigen Partien geboten, welche direct den Methoden der gewöhnlichen Invariantentheorie unterworfen worden sind. Aus diesem Grunde ist auch im Texte fast gar nicht auf die von Lie, Halphen, Appell, Brioschi, Vessiot u. anderen ausgebildete Theorie der „Invarianten von Differentialgleichungen“ eingegangen, welche sich zu den Differentialinvarianten verhalten, wie die gewöhnlichen invarianten Bildungen der Algebra zu den „identischen“ (welche nur die Variabeln enthalten).

***) Mess. XV S. 74—76, 88—92. C. R. CI S. 1042—1046, 1110—1111, 1225—1229, 1460—1464.

Schülern Hammond, Mac Mahon, Leudesdorf, Elliott, Forsyth, Rogers, Berry sowie von Perrin weitergeführt worden.

Ein wichtiger Teil*) dieser Lehre, die „Differentialinvarianten", sind indes schon 1878 und 1880 von Halphen**) mit Erfolg in Angriff genommen, während auf der andern Seite noch weiter zurückreichende Untersuchungen von Lie***) denselben Gegenstand in einer solchen Allgemeinheit behandeln, dass allerdings eine Reihe von Theoremen und Methoden der zuvor genannten Autoren nur einen speciellen Ausfluss aus seiner umfassenden Theorie darstellen; dahingegen ist zu betonen, dass hierdurch das Verdienst, derartige allgemeine Erscheinungen für den wichtigsten Fall der ganzen rationalen Functionen in invariantentheoretischem Sinne systematisch auszugestalten und so der projectiven Geometrie der Curven und Flächen erst zugänglich zu machen, in keiner Weise beeinträchtigt wird.

Freilich ist da hinzuzufügen, dass der wirkliche Fortschritt der Wissenschaft ein ungleich grösserer geworden wäre, wenn Halphen und die englischen Forscher mehr Notiz von den tiefen Gedanken Lie's genommen hätten, während es Lie wiederum verschmäht hat, im einzelnen auf jene speciellen Theorien einzugehen†).

Sylvester ist ausgegangen von einer einfachen Eigenschaft des sogenannten „Schwarz'schen††) Ausdrucks:

$$(y, x) = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = \frac{2y_1 y_3 - 3y_2^2}{2y_1^2},$$

Eine zusammenhängende Darstellung der Theorie hat Sylvester in seinen, von Hammond herausgegebenen Vorlesungen geliefert: Am. J. VIII S. 196—260, IX S. 1—37 (1886); Am. J. IX S. 113—161, 297—352, X S. 1—16 (1887).

*) Die „Differentialinvarianten" gehören der allgemeinen projectiven Gruppe an, die „Reciprocanten" können sich auch auf irgend welche Untergruppen derselben beziehen. Nach der ursprünglichen Terminologie Sylvester's soll freilich das Wort Reciprocante nur die Vertauschung der Variabeln andeuten. Bei anderen Autoren ist umgekehrt der Begriff der Differentialinvariante der umfassendere.

**) 1878, Thèse pour le doctorat.

1880, Ec. Pol. Mém. prés. (2) XXVIII 301 S. (1880—1884). Vgl. noch die voraufgehenden Mitteilungen: C. R. LXXXI S. 1053 (1875), Journ. de Math. (3) II (1876).

Wegen des Näheren siehe weiter unten.

***) Siehe etwa Math. Ann. XXIV S. 337—378 (1884), Lie-Engel I Kap. 25.

†) Eine eingehende Darlegung der beiderseitigen Zusammenhänge würde eine sehr dankenswerte Aufgabe sein. Lie selbst geht auf das Verhältnis seiner Untersuchungen zu denen anderer, namentlich Halphen's, verschiedentlich ein. Vgl. etwa: Math. Ann. XXXII S. 212—281, insbes. S. 214—215 (Abdruck aus dem norwegischen Archiv von 1883), Math. Ann. XXIV S. 537—578, bes. S. 549 (1884), Math. Ann. XXV S. 71—151, bes. S. 74 (1885), Leipz. Ber. 1887 S. 83—88, Am. J. XI S. 182—186 (1888), Lie-Engel I bes. S. 552—553, Leipz. Ber 1891 S. 253—270, bes. S. 267.

††) Siehe oben S. 122. Der Ausdruck tritt bereits bei Lagrange auf.

wo y_1, y_2, y_3 die erste, zweite, dritte Ableitung der abhängigen Variabeln y nach einer unabhängigen x bedeuten.

Vertauscht man hier y mit x, so geht (y, x), bis auf eine ganze Potenz von y_1 und das Vorzeichen, über in den „reciproken“ Ausdruck (x, y), und ein Gleiches gilt auch noch von dem Zähler $2y_1 y_3 - y_2^2$.

Derartige rationale Functionen der $y_1, y_2, y_3, \ldots$, die sich nach Vertauschung von y mit x in ihrer Form nur um einen, in denselben Elementen rationalen Factor ändern, sind binäre „Reciprocanten“ der einfachsten Art.

Beschränkt man sich hierbei auf ganz-rationale Functionen oder „Formen“ F der $y_1, y_2, y_3, \ldots$, so ist leicht zu zeigen, dass der hinzutretende Factor nur die Gestalt $\pm y_1^\mu$ besitzen darf, wo μ eine ganze Zahl ist. Je nach dem Vorzeichen dieses Factors scheiden sich die Reciprocanten in zwei Klassen von geradem resp. ungeradem „Charakter“; μ heisst die „Charakteristik“. Für $\mu = 0$ resultirt eine „absolute“ Reciprocante.

Nimmt man überdies die Form F homogen in ihren Elementen an, so zieht das von selbst nach sich, dass sie auch isobar wird; dabei empfiehlt es sich, den $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ succ. die Gewichte $-1, 0, +1, +2, \ldots$ beizulegen. Bedeutet dann i den Grad, w das Gewicht von F, so muss μ den Wert $3i + w$ annehmen.

Da die Formen F die Variabeln x, y explicite nicht enthalten, so ist unschwer zu erkennen, dass sie auch bei den Substitutionen der „Translationsgruppe“ $x' = x + a$, $y' = y + b$ nur einen Factor annehmen, der linear von y_1 abhängt.

Combinirt man die beiden Sätze, dass eine absolute Reciprocante durch Differentiation nach x wieder in eine Reciprocante (von gleichem Charakter) übergeht, sowie dass eine beliebige Reciprocante durch Division mit $t^{\frac{\mu}{2}}$ zu einer absoluten wird, so gewinnt man einen linearen Differentialoperator ξ, der gestattet, aus einer vorliegenden Form F eine unendliche Reihe weiterer solcher Formen herzuleiten.

Es geht nunmehr der Uebergang zu einer umfassenderen Gruppe von linearen Substitutionen vor sich, nämlich zu der der „orthogonalen“. Es gilt der elegante Satz: „Ist F sowohl, wie $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ eine Reciprocante, so ist F eine orthogonale Reciprocante, und umgekehrt.“ Die einfachste derartige Form ist die linke Seite der Differentialgleichung eines Kreises.

Noch wichtiger ist der nächste Schritt zur „affinen“ Gruppe:

$$x' = ax + by + c, \quad y' = dx + cy + f.$$

Durch Zusammensetzung dieser Gruppe aus einzelnen Fundamentalsubstitutionen wird bewiesen, dass eine Reciprocante, abgesehen von der Homogenität und dem Isobarismus, nur noch von y_1 unabhängig zu sein braucht, um der Gruppe gegenüber invariant zu sein.

Derartige „affine“ Reciprocanten heissen „reine“, im Gegensatze zu den „gemischten“, welche y_1 noch enthalten.

Diese reinen Reciprocanten R im besonderen weisen eine auffallende Aehnlichkeit mit den Seminvarianten (vgl. II. D, a) auf, wenngleich eine eingehende Untersuchung auch wieder einzelne, auffällige Unterschiede zu Tage fördert.

Beide Grössenarten genügen je einer charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichung von conformem Aufbau*).

Für beide existirt ein analoger „Generator“, der also hier Seminvarianten in Seminvarianten, dort reine Reciprocanten in reine Reciprocanten überführt.

Der Cayley'schen Abzählungsformel $(w : i, j) - (w - 1 : i, j)$**) für die Anzahl der linear unabhängigen Quellen vom Grade i und Gewichte w einer Grundform von der Ordnung j entspricht für reine Reciprocanten: $(w : i, j) - (w - 1 : i + 1, j)$, wenn R von den Ableitungen $y_2, y_3, \ldots, y_{j+2}$ abhängt. Nur ist für die letztere Formel bisher noch kein ausreichender Beweis gefunden worden.

Für beiderlei Invariantenbildungen lassen sich auch ähnliche associirte Systeme oder „Protomorphe“ ermitteln, d. h. solche einfachste unter ihnen, dass jede weitere (bei unbeschränkter Buchstabenanzahl), bis auf eine Potenz des ersten Buchstabens im Nenner, eine ganz-rationale Function derselben wird.

Während es jedoch Protomorphe der Seminvarianten giebt, welche abwechselnd vom zweiten und dritten Grade sind, steigt der Grad bei denen der reinen Reciprocanten bis zu beliebiger Höhe.

Andere, noch tiefer greifende Verschiedenheiten sind folgende. Zerfällt eine ganz-rationale Invariante in rationale Factoren, so kommt auch jedem der letzteren die Invarianteneigenschaft zu: für die Reciprocanten überhaupt trifft das nicht zu.

---

*) Siehe weiter unten.

**) Siehe S. 170. Sylvester giebt hier einen neuen Beweis der Formel, welche davon ausgeht, dass zwei isobare Formen, die zu den „complementären Typen“ w, i, j und ij—w, i, j gehören, eine gleiche Anzahl von Gliedern besitzen.

Reiner Reciprocanten giebt es für einen bestimmten Grad und unbeschränkte Buchstabenanzahl nur eine endliche Anzahl, während die entsprechende Reihe der Invarianten nicht abbricht.

Dem entsprechend bieten denn auch die beiderlei „erzeugenden Functionen“ trotz ihres ähnlichen Aufbaus tief greifende, aber zugleich auch tief liegende Differenzen dar.

Zu den interessantesten Ergebnissen gelangt man, wenn man sich schliesslich zur allgemeinsten Klasse der „projectiven“ Reciprocanten erhebt, die zur allgemeinen Collineationsgruppe

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + k}, \qquad y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + k}$$

gehören. Das sind die „Differentialinvarianten“ bezüglich einer Variabeln x, zu deren Lehre bereits Halphen*) den Grund gelegt hatte.

Nach Sylvester lässt sich eine derartige Differentialinvariante einfach dahin charakterisiren, dass sie eine Form der y_2, y_3, y_4, ... ist, welche die Reciprocanteneigenschaft mit der der gewöhnlichen Seminvarianz in sich vereinigt.

Die Fruchtbarkeit dieses Zusammenhanges offenbart sich deutlich, wenn eine wirkliche Uebersicht über das System der Differentialinvarianten gewonnen werden soll.

Es existirt nämlich eine, nach einem sehr einfachen expliciten Gesetz darstellbare Kette von reinen Reciprocanten A, B, C, D, ..., die unmittelbar zur Erzeugung aller Differentialinvarianten führt; man hat nur die A, B, C, D, ... als Coefficienten einer binären Form (von succ. ansteigender Ordnung) aufzufassen und bezüglich dieser die Protomorphe für die Seminvarianten zu bilden: irgend eine ganze rationale Function jener Protomorphe, durch eine passende Potenz von y_2 dividirt, liefert eine Differentialinvariante, und umgekehrt.

Statt der Kette der A, B, C, D, ... lässt sich auch direct eine ähnliche Kette von Seminvarianten bez. der y_2, y_3, y_4, ... zu Grunde legen.

Fügt man hierzu noch die besondere Eigenschaft einer rationalen Differentialinvariante vom Grade und Gewichte Null, vermöge Differentiation nach x einen Ausdruck derselben Art hervorzubringen, so wird man verstehen, dass auf diesem systematischen Wege die vollständige

---

*) l. c. Halphen hat auch in der zweitcitirten Arbeit solche „ternären Differentialinvarianten“ in Betracht gezogen, in deren Ausdruck die Ableitungen von zwei abhängigen Variabeln nach einer unabhängigen dritten eingehen. Die englischen Forscher, Elliott, Forsyth u. andere haben sich dagegen auf solche ternären Reciprocanten und Differentialinvarianten concentrirt, wo eine Variable die abhängige, die beiden anderen die unabhängigen sind.

Integration von gleich Null gesetzten Differentialinvarianten in ungezwungener Weise bewerkstelligt wird, während bei Halphen die Lösung solcher, für die Geometrie wichtigen Aufgaben nur durch Aufwand von indirecten Integrationsmethoden*) gelingt.

Es ist noch unsere Aufgabe, einiger hervorragender Ergänzungen und Weiterführungen der Theorie zu gedenken, welche von den schon erwähnten Mitarbeitern Sylvester's herrühren**).

Es gebührt Mac Mahon das Verdienst, die verwirrende Mannigfaltigkeit der, die Lehren von den binären Invarianten und Reciprocanten durchziehenden linear-partiellen Differentiationsprocesse geordnet zu haben. Ein einziger Process dieser Art, in den vier arbiträre ganze Zahlen eintreten, umfasst je nach Specialisirung der letzteren die bekannten Operatoren***). Noch wichtiger scheint hierbei der Nachweis, dass diese vierfache Mannigfaltigkeit von Processen insofern ein vollständiges System

---

*) Dies zeigt sich z. B. deutlich bei der Behandlung der Aufgabe, diejenige Differentialinvariante zu finden, deren Verschwinden „die Differentialgleichung einer ebenen Curve dritter (nter) Ordnung“ liefert, der also y als Function von x genügt, wenn y und x durch eine Gleichung dritter (nter) Ordnung mit einander verknüpft sind.

**) Es ist nicht zu verkennen, dass der äusserlich bedeutende Umfang dieser Weiterführungen teilweise durch eine Reihe vereinzelt herausgegriffener Fragen (Bestimmung einzelner Klassen von Differentialinvarianten von einzelnen Untergruppen der linearen Gruppe) bedingt ist. Es macht sich gerade hier der Mangel an Kenntnis der leitenden Principien Lie's empfindlich fühlbar.

***) Lond. Proc. XVIII S. 61—88 (1887).

Der gemeinte Process ist dargestellt durch die Formel:

$$(\mu, \nu;\ m, n) = \sum_{s=0}^{\infty} (\mu + sn) A_{sm} \frac{\partial}{\partial a_{n+s}},$$

$$A_{sm} = \sum_{k} \frac{(m-1)!}{k_0!\,k_1!\,k_2!\ldots}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots,$$

wo $k_0 + k_1 + k_2 + \ldots = m$, $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = s$, und die vier Parameter μ, ν, m, n ganze Zahlen $\geqq 0$ sind. Beispielsweise ist

$$(1, 1;\ 1, 1) = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

die Differentialgleichung der Seminvarianten;

$$(4, 1;\ 2, 1) = 4\frac{a_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial a_1} + 5a_0 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 6\left(a_0 a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

diejenige der Reciprocanten. Letztere Gleichung rührt nach Angabe Sylvester's von Hammond her.

Mac Mahon hat den gemeinten Processen weiterhin eine Symbolik untergelegt, welche dieselben in unmittelbare Verbindung mit den symmetrischen Functionen bringt (Lond. Proc. XIX S. 112—128, 1888).

Ternäre Analoga des Processes (μ, ν; m, n) sind von Mac Mahon selbst, sodann aber besonders eingehend von Elliott studirt worden: Lond. Phil. Trans. CLXXXI S. 19—51 (1890).

bildet, als die Ausübung der Poisson'schen Klammeroperation auf irgend zwei derselben stets von neuem zu einem Processe des Systems führt.

Perrin*) hat seine Residuentheorie**) fast unmittelbar von den Seminvarianten auf die Reciprocanten übertragen. Liegt demnach eine Reihe von Reciprocantenformen vor, die alle y_n als höchsten Differentialquotienten wirklich enthalten, und fasst man diesen als eine binäre Variable auf, so ist jede Seminvariante der Reihe gleichfalls eine Reciprocante.

Die Ausdehnung der Sylvester'schen Theorie auf n Variable (unter denen eine als abhängig angesehen wird) hat Elliott***) für den Fall der Invarianz bei cyklischer Vertauschung der Variabeln durchgeführt; insbesondere stammt von ihm die Aufstellung des vollen Systems der charakteristischen Differentialgleichungen bei drei Variabeln.

Weiterhin hat Elliott†) auch die Reciprocanten der allgemeinen linearen Gruppe von drei Variabeln in Betracht gezogen, während Forsyth††) die Eigentümlichkeiten des Falles untersucht hat, wo allein die zwei abhängigen Variabeln einer allgemeinen linearen Transformation unterworfen werden.

Hammond†††) hat gewisse integrable Reciprocanten eingehend studirt und ihre Verwendbarkeit in der Geometrie verfolgt.

---

*) C. R. CII S. 351—353 (1886).

**) Siehe oben S. 166.

***) Lond. Proc. XVII S. 172—196 (1886), XVIII S. 142—164 (1887), XIX S. 6—23, 377—405 (1888), Mess. (2) XIX S. 7—14, Lond. Proc. XX S. 131—160 (1889).

Die zweitgenannte Arbeit enthält die Ableitung der sechs charakteristischen Differentialgleichungen für die „reinen ternären Reciprocanten". Denkt man sich z als Function von x, y und bezeichnet $\frac{1}{r!s!}\frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$ mit z_{rs}, so sagen zwei der Gleichungen nur aus, dass die Reciprocante homogen und isobar sei in Bezug auf jeden der beiden Indices r und s. Zwei weitere Gleichungen drücken aus, dass die Reciprocante eine Simultaninvariante ist hinsichtlich der binären Formen

$$z_{20}\lambda^2 + 2z_{11}\lambda\mu + z_{02}\mu^2, \quad z_{30}\lambda^3 + 3z_{21}\lambda^2\mu + 3z_{12}\lambda\mu^2 + z_{03}\mu^3, \quad \ldots$$

Vgl. die analoge Erscheinung für die höheren Seminvarianten bei Forsyth, diesen Bericht S. 158.

Die beiden letzten Gleichungen endlich bilden die Verallgemeinerung der Hammond'schen Differentialgleichung für die binären Reciprocanten.

Das System der sämtlichen sechs Gleichungen ist wiederum ein „vollständiges", wie die dritte Arbeit nachweist.

†) Lond. Proc. XX S. 131—160 (1889).

††) Lond. Phil. Trans. CLXXX S. 71—118 (1889).

†††) Lond. Proc. XVII S. 128—138 (1886).

Insbesondere studirt der Verfasser diejenigen Differentialgleichungen $(y', y'', y''', \ldots) = 0$, welche ein Integral von der Form $y'' = F(y')$ besitzen. Ein einfaches geometrisches Beispiel gewähren die rationalen ebenen Curven, welche stets durch das Verschwinden einer Reciprocante dargestellt werden können.

Für die sogenannten „perpetuirenden (reinen) Reciprocanten", d. h. solche, die sich nicht als lineare, ganze Functionen anderer Reciprocanten von geringerem Grad und Gewicht, aber unbeschränkter Buchstabenanzahl darstellen lassen, hat Mac Mahon*) für die ersten sechs Grade eine numerische Aufzählung mittels einer einfachen erzeugenden Function geleistet.

Leudesdorf**) hat, abgesehen von neuen Beweisen für Sylvester'sche Sätze, ein vollständiges Kriterium dafür angegeben, dass eine vorgelegte Function von $y_1, y_2, \ldots$ eine (gemischte) Reciprocante sei, und zugleich eine Tafel bezüglicher Protomorphe aufgestellt.

Eine bemerkenswerte Ausdehnung des Reciprocantenbegriffs verdankt man Rogers***). Bekanntlich lässt sich eine quadratische, ein-eindeutige Verwandtschaft zwischen zwei Variabelnpaaren (x, y) und (x', y') zurückführen auf zwei incongruente, linear gebrochene Substitutionen der getrennten Variabeln x und y.

Rogers zeigt, wie man die Differentialinvarianten einer solchen quadratischen Transformation bildet.

Im besonderen ergeben sich ihm die Differentialinvarianten für die Transformation durch reciproke Radien.

Berry†) hat simultane Reciprocanten (die sich auf mehrere Reihen von Variabeln beziehen) erforscht. Es dient hierbei zur Erleichterung (wie schon bei Elliott gelegentlich der einfachen ternären Bildungen), bereits solche Reciprocanten zu Grunde zu legen, welche die Variabeln selbst explicite noch enthalten.

An die Arbeiten von Rogers über „homographische Reciprocanten" knüpft Forsyth††) an, um das vollständige System derselben aufzustellen. Es wird dieses Ziel erreicht, indem erst jede der beiden Variabeln ein-

---

*) Lond. Proc. XVII S. 139—151 (1886).

Bezeichnet w das Gewicht, ϑ den Grad, so hat man auf alle möglichen Weisen die Zahl w einmal in ϑ, das anderemal in $\vartheta+1$ Teilzahlen zu zerlegen; die Differenz beider Anzahlen ergiebt die Anzahl der linear unabhängigen Perpetuanten vom „Grad-Gewicht" (ϑ, w). Beispielsweise ist diese Anzahl für $\vartheta = 3$ der Coefficient von x^w in der Entwickelung der erzeugenden Function

$$\frac{1-x-x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = 1+x^2+x^3+x^4+x^6+\ldots$$

Eine allgemeine Formel ist bisher noch nicht aufgestellt worden.

**) Lond. Proc. S. 197—219, 329—343 (1886), ebda. XVIII S. 235—262 (1887).

In der zweiten Arbeit untersucht der Verfasser insbesondere die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine vorgelegte Function von $y_1, y_2, \ldots$ eine gemischte Reciprocante ist.

***) Lond. Proc. XVII S. 220—231, 344—354 (1886), XVIII S. 130—141 (1887), XX S. 161—179 (1889), Mess. (2) XVIII S. 153—158 (1889).

†) Quart. J. XXII S. 260—288 (1888), XXIII S. 289—316 (1889).

††) Mess. (2) XVII S. 154—192 (1888).

zeln linear gebrochen substituirt wird, und dann die beiderseitigen Ergebnisse combinirt werden.

Von besonderem Interesse für die Theorie der linearen Differentialgleichungen ist eine besondere Klasse jener Reciprocanten, die sogenannten „Quotientenableitungen“ *). Versteht man nämlich unter y den Quotienten von zwei Particularlösungen u_1, u_2 einer linearen Differentialgleichung der nten Ordnung und differentiirt man die Gleichung $yu_1 = u_2$ $(2n-1)$-mal, so resultirt durch Elimination der Ableitungen von u_2 ein System von n linearen homogenen Relationen in den Unbekannten u_1, $u'_1, \ldots, u_1^{(n-1)}$. Die Resultante des letzteren Systems heisst eine Quotientenableitung, und verhält sich einer Substitution von der Art:

$$X = \frac{ex+f}{gx+h}, \qquad Y = \frac{ay+b}{cy+d}$$

gegenüber invariant, indem sie sich nur um den Factor $\left(\frac{dY}{dy}\right)^n \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-n^2}$ ändert. (Vgl. auch bei Gordan oben S. 157.)

So entspringt z. B. aus der Stammgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ die Schwarz'sche Reciprocante $3y_2^2 - 2y_1 y_3$.

Die weiteste Ausdehnung hat Forsyth diesem Gegenstande „der Invariantentheorie der linearen Differentialgleichungen“ in einer anderen Arbeit **) gegeben. Ist ein derartiges Gleichungssystem vorgelegt, so wird dasselbe den Substitutionen unterworfen, welches deren Ordnung und linearen Charakter ungeändert lässt, d. i. einer linearen Transformation der abhängigen und einer arbiträren der unabhängigen Variabeln x. Man kann dann nach denjenigen ganzen (und überhaupt algebraischen) Functionen von y und deren Ableitungen, sowie der Coefficienten fragen, welche, für das transformirte Gleichungssystem gebildet, nur einen Factor $\left(\text{eine Potenz von } \frac{dX}{dx}\right)$ annimmt.

Das System (set) dieser Functionen wird in erweitertem Sinne als ein volles nachgewiesen, insofern als aus einer beschränkten Anzahl derselben alle übrigen durch rein algebraische Processe hervorgehen.

Auf besondere Fälle derart waren früher schon Cocle, Laguerre, Brioschi, Malet und Halphen gestossen ***).

---

*) Lond. Phil. Trans. 1888 S. 377—489.

**) Lond. Phil. Trans. 1889 S. 71—118.

***) Siehe die Citate bei Forsyth.

II. C, c, γ.

Auftreten von projectiven Differentialinvarianten in der Krümmungstheorie.

Die projectivische Theorie der Krümmungseigenschaften einer Fläche ist noch wenig untersucht worden. Abgesehen von zerstreuten Bemerkungen, die sich in dem grossen Werke von Darboux*) finden; einigen, nach Grassmann'schen Methoden abgeleiteten Sätzen von Mehmke**), sowie einzelnen diesbezüglichen Anwendungen, die Sylvester und seine Schüler von ihrer Lehre der „Reciprocanten" gemacht haben***), kommt hauptsächlich nur eine ausführliche Arbeit von Voss†) aus neuester Zeit in Betracht.

Eine projectivische Auffassung von metrischen Eigenschaften einer Fläche wird angebahnt, sobald man den Charakter der letzteren, dass vier beliebige ihrer Punkte nicht in einer Ebene liegen, mit der Thatsache combinirt, dass der Inhalt eines Tetraeders bei beliebiger Collineation nur um einen leicht ersichtlichen Factor geändert wird.

Wählt man auf der Fläche ein krummliniges Coordinatensystem u, v, so schneiden sich je zwei benachbarte Linien u_0, u_0+h; v_0, v_0+k in den vier Eckpunkten P, P_1, P_2, P_3 eines Tetraeders T.

Sei P der Punkt (u_0, v_0), P_3 der Punkt (u_0+h, v_0+k). Der letztere Punkt bewege sich nach dem ersteren (auf der Fläche) hin längs einer analytischen Curve mit dem Parameter t:

$$u = u_0 + h't + \cdots, \quad v = v_0 + k't + \cdots$$

Dividirt man den Inhalt T durch das Quadrat des Inhalts Ω des durch P, P_1, P_2 bestimmten Parallelogramms, so erhält man in erster Annäherung einen bereits sehr einfachen Ausdruck; nämlich:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2} = \frac{1}{6} \frac{F}{\sqrt{H}}.$$

Hier bedeutet H die Discriminante $eg - f^2$ des Quadrats des Linien-

*) „Leçons sur la théorie générale des surfaces", Paris 1890 I. livre 2.

**) Schlöm. Z. XXXVI S. 56—60 (1891). Ebenda S. 206—213 (1891) hat derselbe Verfasser untersucht, inwieweit seine Sätze auf beliebige Punkttransformationen ausgedehnt werden können.

Vgl. auch Böklen, Mitteilungen, 1892, Schlöm. Z. XXXVII S. 186—189 (1892).

***) Siehe insbesondere Elliott, Lond. Proc. XVII S. 172—196 (1886).

†) Math. Ann. XXXIX S. 179—256 (1891).

Voss betrachtet auch allgemeinere Differentialinvarianten, welche bei einer beliebigen Transformation bis auf einen beliebigen Factor in gleichgebildete Ausdrücke übergehen.

Wir haben uns im Texte auf projective Transformationen beschränkt.

elementes der Fläche:

$$ds^2 = edu^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

während F die zweite der sogenannten „Fundamentalgrössen 2. Ordnung“ E, F, G ist.

Der angegebene Grenzwert hat im allgemeinen noch keinen Zusammenhang mit den Krümmungsverhältnissen der Fläche.

Dies ändert sich indessen, sobald man zu ausgezeichneten Coordinatensystemen u, v übergeht.

Wird z. B. die eine Schar der Curven u, v von den Haupttangentencurven gebildet, und versteht man unter K das Krümmungsmass der Fläche im Punkte P, so verwandelt sich der Quotient $\frac{F}{\sqrt{H}}$ direct in $\sqrt{-K}$.

Interessantere Ergebnisse stellen sich für ein „conjugirtes“ System u, v heraus, für das also F identisch verschwindet, was von jetzt ab vorausgesetzt werden möge.

Um nunmehr zu einem Grenzwerte zu gelangen, hat man $\frac{T}{\Omega^2}$ noch mit dem Quadrate des Linienelements $S = \overline{PP_3}$ zu dividiren, dann kommt:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2 S^2} = \frac{1}{72\sqrt{H}} \frac{E\alpha h'^2 + G\beta k'^2}{eh'^2 + 2fh'k' + gk'^2},$$

wo die α, β*) nur von den e, f, g abhängen, also jedenfalls einer Biegung der Fläche gegenüber sich invariant verhalten.

Eben diese Ausdrücke α, β bleiben nun auch bei irgend einer Collineation der (auf ein System conjugirter Coordinatencurven bezogenen) Fläche völlig unverändert, sind also in diesem Sinne absolute projectivische Invarianten derselben. Stimmen dieselben überein, und nur dann, so coincidirt jener Grenzwert, die „Parameterkrümmung“ mit der „Normalkrümmung“ (nach der Richtung PP_3 genommen).

Dieser Umstand veranlasste Voss zu einer systematischen Untersuchung der wichtigsten Krümmungsgrössen auf ihre projectivische Invarianz hin.

Seien x, y, z die ursprünglichen Cartesischen Coordinaten eines Flächenpunktes P; x', y', z' die linear transformirten; $t = t(x, y, z)$ bezeichne den gemeinsamen Nenner der letzteren, und D die Substitutionsdeterminante.

---

*) α, β sind zugleich die beiden Invarianten der sog. „Laplace'schen“ Differentialgleichung vgl. Darboux l. c. II § 23 ff.

Dann reproduciren sich die drei Fundamentalgrössen 2. Ordnung je um den nämlichen Factor*), nämlich:

$$E' = \frac{\lambda}{t} E, \quad F' = \frac{\lambda}{t} F, \quad G' = \frac{\lambda}{t} G,$$

wo λ einen einfachen algebraischen Ausdruck bedeutet, der nur von den Substitutionscoefficienten und von den Richtungscosinus der in P errichteten Normale (also nur von den ersten „Differentialquotienten der Fläche") abhängt.

In ähnlicher Weise ergiebt sich für das Verhalten von H:

$$H' = H \frac{D^2}{\lambda^2 t^6},$$

und damit für dasjenige des Krümmungsmasses K:

$$K' = K \frac{(\lambda t)^4}{D^2},$$

Gleichungen, aus denen zahlreiche geometrische Anwendungen fliessen. So hat man damit unmittelbar den von Mehmke**) aufgestellten Satz: „Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte, so ist der Quotient ihrer Krümmungsmasse in jenem Punkte eine absolute projectivische Invariante."

Aus der Relation für K hat Voss im besonderen das Ergebnis abgeleitet: „Für jede Collineation (mit Ausschluss der affinen) existiren Flächen, sodass bei der Ausübung der Collineation die gegebene Fläche derart in eine andere übergeht, dass das Krümmungsmass in entsprechenden Punkten nur um einen constanten Factor geändert wird." Die Gleichungen dieser Flächen werden explicite angegeben.

II. C, c, δ.
Höhere Transformationen von Differentialformen in der Flächentheorie. Differentialparameter.

Die Flächentheorie wird beherrscht von der Transformation***) gewisser binärer Differentialformen. Im Vordergrunde stehen zwei quadra-

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 240.

**) Da der Inhalt dieses Abschnittes nur lose mit dem Hauptgegenstande zusammenhängt, so mag es genügen, an Stelle ausführlicher Citate auf die Namen Riemann, Beltrami, Christoffel, Weingarten, Halphen, Ricci, Knoblauch, Frobenius hingewiesen zu haben.

***) Zwei andere Anwendungen solcher Transformationen von Differentialformen sind schon auf S. 114 mitgeteilt worden.

Eine weitere Ausführung des Textes findet sich bei Knoblauch, „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen", Leipzig, 1888, Abschnitt III. Derselbe Verfasser hat im gleichen Sinne auch kubische Diffe-

tische derartige Formen, das Quadrat des Linienelementes der Fläche:

$$A = ds^2 = edu^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

und die mit dem Krümmungsradius ρ dividirte Grösse A:

$$B = \frac{ds^2}{\rho} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Dabei ist die Fläche auf ein System krummliniger Coordinaten (u, v) bezogen gedacht. Die 6 Grössen e, f, g; E, F, G, die „Fundamentalgrössen 1. resp. 2. Ordnung", sind durch die drei „Fundamentalgleichungen" mit einander verknüpft.

Die Transformation besteht im Uebergange von dem ursprünglichen System u, v zu einem neuen u′, v′, indem die letzteren Grössen gleich eindeutigen und eindeutig umkehrbaren, im übrigen aber arbiträren*) Functionen der ersteren gesetzt werden.

Setzt man:

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial v'}{\partial u} = \gamma, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \delta,$$

$$du = \xi, \quad dv = \eta; \quad du' = \xi', \quad dv' = \eta',$$

so transformiren sich die ξ, η linear in die ξ', η' in der Weise, dass

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \quad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta,$$

während die Umkehrung dieser Formeln unmittelbar liefert:

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\delta, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\beta, \quad \frac{\partial u}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}\alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}.$$

Geht vermöge der angegebenen Transformation irgend eine quadratische binäre Differentialform $A = a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$ über in die entsprechende $A' = a'_{11}\,du'^2 + 2a'_{12}\,du'dv' + a'_{22}\,dv'^2$, so findet das Analoge statt für die bilineare Form:

$$A_1 = a_{11}\,du\,\delta u + a_{12}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + a_{22}\,dv\,\delta v.$$

Dabei brauchen weder die du, dv, noch die δu, δv notwendig Differentiale zu sein: es genügt, wenn es überhaupt Grössen sind, die den ξ, η cogredient sind.

Von dieser Bemerkung lässt sich, ganz wie in der algebraischen**)

---

rentialformen im Zusammenhange mit der Flächentheorie studirt: Journ. f. Math. CIII S. 25—39 (1888).

*) „Die Transformationsgruppe ist also die sog. „unendliche", bezüglich deren man die neuen Untersuchungen von Lie, Leipz. Ber. 1891 S. 316 bis 352, 353—393 nachsehen möge."

**) Siehe oben S. 85.

Invariantentheorie, eine wichtige Anwendung hinsichtlich der Ableitungen einer Function machen.

Ist nämlich $\chi(u, v)$ eine willkürliche Function von u, v: $\bar{\chi}(u', v')$ die Transformirte, so gelangt man leicht zu den Relationen:

$$\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u},$$
$$\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}.$$

Da aber die Discriminante $a = a_{11}a_{12} - a_{12}^2$ von A eine relative Invariante ist, also

$$a = \Delta^2 a', \quad \text{und damit} \quad \sqrt{a} = \Delta\sqrt{a'},$$

so erkennt man unmittelbar, dass die Grössen $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\chi}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\chi}{\partial u}$ mit ξ, η cogredient sind, also in die Identität $A_1 = A_1'$ für die δu, δv substituirt werden können. Damit nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$U du + V dv = U' du' + V' dv',$$

sodass die linke Seite eine lineare Covariante von A darstellt. Hieraus fliesst durch einfache Differentiation die Existenz der Invariante

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

oder mit Einsetzung der wirklichen Werte, von:

$$\Delta_a^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u} - a_{12}\frac{\partial\chi}{\partial v}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial\chi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

Würde man dagegen in die Linearform $U du + V dv$ statt der du, dv die, für eine zweite willkürliche Function $\omega(u, v)$ genau ebenso, wie für χ gebildeten Werte $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\omega}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\omega}{\partial u}$ eingesetzt haben, so hätte sich eine andere Invariante $\Delta_a(\chi, \omega)$ herausgestellt, wo:

$$\Delta_a(\chi, \omega) = \frac{1}{a}\left\{a_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v} - a_{12}\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) + a_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right\},$$

aus der im besonderen, wenn χ mit ω übereinstimmt, die speciellere Invariante $\Delta_a^1(\chi)$ entsteht.

Lässt man nunmehr an Stelle der Form A die Form

$$ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

treten, wodurch die drei Invarianten $\Delta_a^1(\chi)$, $\Delta_a^2(\chi)$, $\Delta_a(\chi, \omega)$ übergehen

mögen in $\Delta^1(\chi)$, $\Delta^2(\chi)$, $\Delta(\chi, \omega)$, so sind die letzteren drei Ausdrücke nichts anderes, als die von Beltrami mit so grossem Erfolge eingeführten „Differentialparameter erster und zweiter Ordnung von χ“, und der „Zwischenparameter von χ, ω“.

Vermöge der Function Δ^2 lässt sich nunmehr ein Einblick in die Invariantennatur des Gauss'schen Krümmungsmasses K gewinnen.

Bedeutet nämlich n den Multiplicator der Form A, so dass

$$nA = dp\,dq,$$

so stimmt K mit dem Ausdruck $\frac{1}{2}\Delta^2 \lg n$ überein.

Weitere Aufschlüsse solcher Art gewinnt man durch simultane Transformation zweier Differentialformen, wie A und B:

$$A = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \quad B = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Die Algebra liefert sofort zwei absolute Invarianten, nämlich

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{eg - f^2}, \quad K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}.$$

Hier ist H genau gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Krümmungen, K gleich ihrem Product, d. i. das Krümmungsmass:

$$H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Bildet man noch die Functionaldeterminante von A, B, und dividirt sie mit $4\sqrt{a} = 4\sqrt{eg - f^2}$, so stimmt dieselbe mit der „Krümmungslinienform“ Γ überein.

Aus der Algebra entlehnt man dann ohne weiteres die Darstellung:

$$\Gamma^2 = -KA^2 + HAB - B^2.$$

Endlich stellt sich das Quadrat des Linienelementes $d\sigma$ auf der Gauss'schen Kugel direct als Covariante von A und B dar:

$$ds^2 = -KA + HB.$$

Um die geometrischen Bedeutungen der hier auftretenden Formen zu vervollständigen, sei noch erwähnt, dass die bilineare Form A_1 $(= \Sigma dx\,\delta x)$ das Product der beiden Linienelemente ds, δs mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels repräsentirt.

Endlich hat man:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = ds\,\delta s\left(\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\rho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\rho_2}\right),$$

wo ψ, ψ' die Winkel sind, welche ds, δs mit einer der beiden, durch ihren Schnittpunkt gehenden Haupttangenten bilden.

II. D.

Specielle Substitutionsgruppen und Formen.

II. D, a. Seminvarianten*) und seminvariante Functionen.

Haben wir bisher die allgemeinen Eigenschaften invarianter Formen erörtert, so sollen uns im vorliegenden Schlusskapitel Erscheinungen specielleren Charakters beschäftigen, sei es, dass man die Gruppe der auszuübenden Substitutionen beschränkt, oder die zu Grunde liegenden Urformen, oder endlich auch beide.

Unter den invarianten Bildungen, welche zu Untergruppen**) der allgemeinen linearen Substitutionsgruppe gehören, sind am eingehendsten untersucht worden die sogenannten „Seminvarianten"***), d. s. die Leitglieder der Covarianten, Contravarianten, Zwischenformen u. s. f., und deren Verallgemeinerungen.

Um mit dem binären Gebiete zu beginnen, so setzen wir von vorn herein immer voraus, dass die zu betrachtenden ganz-rationalen Ausdrücke C_0 in den Coefficientenreihen (a), (b), ... der Urformen homogen und isobar sind, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, dass sich dieselben bei allen Substitutionen der Gruppe:

$$\text{(A)} \qquad x_1 = ax'_1, \quad x_2 = dx'_2$$

nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ad ändern†).

Fügt man nunmehr die analoge Forderung bezüglich derjenigen Gruppe hinzu, welche entsteht, wenn man (A) zusammensetzt mit der

---

*) Die bequemere Schreibweise „seminvariant" an Stelle von „semiinvariant" ist, etwa nach dem Vorbild des Wortes „seminanis = semiinanis" (halbleer) gewählt worden.

**) In den in nächster Zeit erscheinenden, von Scheffers herausgegebenen „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen" von Lie, II. Band werden alle endlichen continuirlichen Untergruppen der projectiven Gruppe von 2, 3, 4 Variabeln bestimmt. Zu jeder derselben gehört eine besonders auszubildende Invariantentheorie. Im Texte beschränken wir uns, abgesehen von einigen Notizen über orthogonale Invarianten, auf die Seminvarianten.

***) Einige Eigenschaften der Seminvarianten sind schon früher berücksichtigt worden, siehe S. 92, 157, 158, 164, 166, 169, 177, 179, 197, 211, 212, 219, 232 u. flgde.

†) Sei der Einfachheit halber eine einzelne Urform f_n mit den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vorgelegt, und sei $a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ irgend ein Glied von C_0, so folgt in der That unmittelbar bei Ausübung der Substitution (A), dass sowohl die Summe $0.\alpha_0 + 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n$, wie auch die Summe $n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2 + \ldots$ einen constanten Wert besitzen muss. Die Addition der beiden Summen zeigt dann, dass auch $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ constant, d. h. dass C_0 homogen ist.
Das Entsprechende gilt für ternäre, ... Formen.

folgenden:

$$\text{(B)} \qquad x_1 = x'_1 + b x'_2, \quad x_2 = x'_2,$$

so wird C_0 zu einer Seminvariante, und genügt der charakteristischen Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad \Omega \equiv a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \cdots$$
$$+ b_0 \frac{\partial C_0}{\partial b_1} + 2b_1 \frac{\partial C_0}{\partial b_2} + 3b_2 \frac{\partial C_0}{\partial b_3} + \cdots$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0.$$

Enthält C_0 $n+1$ Argumente a, $m+1$ Argumente b u. s. f., so ist C_0 stets das Leitglied, d. i. der Coefficient der höchsten Potenz von x_1, einer bestimmten Covariante der Formen f_n, g_m, ... mit den Coefficienten a, b, ...

Sylvester*) geht von der einfachen Bemerkung aus, dass dann C_0 zugleich zum Leitgliede einer Covariante der Formen

$$f'_{n'}, \; g'_{m'}, \; \ldots \; (n' \geqq n, \; m' \geqq m, \ldots)$$

wird, deren erste $n+1$, $m+1$, ... Coefficienten mit den a, b, ... übereinstimmen.

Die Theorie der Seminvarianten wird damit von der Grundlage der particulären Formen f_n, g_m, ... und ihrer Ordnungen losgelöst, und erscheint nur noch als Attribut der beliebig fortsetzbaren „Elementenreihen" der (a), (b), ...

Der Einfachheit halber sei nur eine einzige Elementenreihe (a) vorgelegt.

Ersetzt man die a durch numerische Vielfache derselben, so ändern sich auch die Glieder von Ω nur um numerische Factoren, und umgekehrt.

Setzt man demnach in C_0 das erste Element a_0 gleich Null, so ist der „Rest" eine Seminvariante in Bezug auf die neue Elementenreihe

$$a_1, \; \frac{a_2}{2}, \; \frac{a_3}{3}, \ldots$$

Sylvester und Perrin**) haben nachgewiesen, wie auf Grund dieses

---

*) Am. J. V S. 79—96 (1882), S. 97—137 (1883).

In dem zweiten Teile der Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit der Ermittelung der „irreducibeln" Seminvarianten (Perpetuanten), d. h. solcher, die sich nicht als rationale ganze Functionen niedrigerer Seminvarianten darstellen lassen. Es wird auch hier eine erzeugende Function für einzelne Fälle aufgestellt, welche die Anzahl der linear unabhängigen Perpetuanten von gegebenem Grad und Gewicht liefert; die Ordnung der zugehörigen Urform ist jetzt bedeutungslos geworden. Die betreffende Formel ist weiterhin von Mac Mahon allgemein angegeben worden, vgl. oben S. 174, 193, 198. Vgl. auch die Tabellen von Cayley, Quart. J. XIX S. 131—138 (1883).

**) S. M. F. Bull. XI S. 88—107 (1883).

Satzes nicht nur die Ableitung der „Grundformen", sondern auch die der zugehörigen Syzygien*) wesentlich vereinfacht wird.

Es mag dies etwa durch den Satz von Perrin illustrirt werden, dass man den Leitgliedern eines vollen Systems von Grundformen einer Urform f_n nur noch eine einzige „Restform" der $a_0, a_1, \ldots, a_n$ hinzuzufügen hat, um ein volles System der zu einer Urform f_{n+1} gehörigen Restformen zu besitzen.

Ein anderer Fortschritt wird durch die Auffassung begründet, C_0 als eine binäre Function der (nicht homogenen) Variabeln a_n anzusehen**).

Hat man dann eine Reihe von Leitgliedern $C_0, C_0', C_0'', \ldots$ einer Urform f_n, so ist nach Sylvester jede Covariante der C, als Formen von a_n betrachtet, wiederum das Leitglied einer Covariante von f_n.

In dem angegebenen Sinne kommt jeder Seminvariante C_0 selbst abermals ein Leitglied zu, nämlich der Coefficient der höchsten Potenz von a_n. Diese „Keime" (germs) der Covarianten von f_n gewähren, wie Sylvester an dem Beispiel der f_5 und f_6 näher ausführt, einen guten Einblick in die Structur des vollen Formensystems von f_n.

Der Benützung der Seminvarianten zweiten und dritten Grades in den a zur Aufstellung „associirter Systeme" ist schon früher***) gedacht worden; ebenso der fundamentalen Aufgabe, unter den Seminvarianten (für ein unbegrenzt hohes n) die „Perpetuanten", d. h. die „irreducibeln" herauszugreifen†), welche sich nicht als ganze Functionen von solchen niedrigeren Grades in den Elementen darstellen lassen; endlich auch des engen Zusammenhanges††) zwischen Seminvarianten und symmetrischen Functionen.

In einer sehr einfachen Weise ist d'Ocagne†††) 1886 zu einem neuen Systeme associirter Seminvarianten einer f_n gelangt.

Man sehe a_0 für den Augenblick als eine Function einer Variabeln ξ an, und $a_1, a_2, \ldots$ als deren erste, zweite, ... Ableitung nach ξ. Dann

---

*) Siehe oben S. 166.

**) Eine weitere Ausbildung der beiden genannten Principien verdankt man Petersen, Zeuthen Tidsskr. (4) IV S. 177—190 (1880), V S. 33—40 (1881); (5) VI S. 152—156 (1888). Die letztere Arbeit bringt Anwendungen auf die Aufstellung voller Systeme.

***) Siehe oben S. 157, 158.

†) Siehe oben S. 174, 193, 198.

††) Siehe oben S. 197.

†††) C. R. CII S. 916—917, Brux. S. sc. X. B. S. 75—78, ebda. XI S. 314 bis 319 (1887).

Es wäre wünschenswert, den ersichtlich sehr engen Zusammenhang zwischen der Methode von d'Ocagne und den, von Bruno (S. 211) und Mac Mahon (S. 197) befolgten zu untersuchen.

liefern die successiven Ableitungen von la_0 nach ξ, von der ersten bis zur $(n-1)$ten, ein System der gewünschten Art, durch dessen Individuen sich also alle anderen Seminvarianten von f_n rational, mit einer Potenz von a_0 im Nenner, ausdrücken lassen.

d'Ocagne*) und Cesaro**) haben den Zusammenhang zwischen diesem Systeme und dem von Hermite gelieferten näher untersucht.

Die Differentiation nach ξ ist offenbar nur eine symbolische Abkürzung für den Process

$$\frac{d}{d\xi} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

und das obige Verfahren liess mittels desselben aus zwei gegebenen Seminvarianten, z. B. $a_0 a_2 - a_1^2$ und a_0^2, eine neue entstehen.

In diesem Sinne haben d'Ocagne***), Perrin†), Deruyts††), Roberts†††) eine ganze Reihe ähnlicher Processe („Differentialgeneratoren") construirt.

Deruyts hat dabei eine ganze Reihe von Elementengruppen (a), (b), ... zu Grunde gelegt und insbesondere die enge Verwandtschaft zwischen dem dadurch entstehenden Processe

$$\frac{d}{d\xi} = \Sigma\left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots\right)$$

mit den früher besprochenen Cayley'schen D und Δ (in ihren Wirkungen auf Seminvarianten) weiter verfolgt.

Wir führen zur Illustration den Satz an, wonach durch die Substitution

$$x_1 = X_1 - X_2 \frac{\lambda}{S}, \quad x_2 = X_2,$$

wo der Ausdruck λ die Eigenschaft besitzt, dass $D\lambda$ gleich der Seminvariante S wird, jede Covariante sich derart transformirt, dass die neuen Coefficienten zu Zählern Seminvarianten haben.

Nimmt man hier speciell $S = a_0$, $\lambda = a_1$, so kommt man auf einen bekannten Satz von Hermite zurück.

---

*) S. M. F. Bull. XVI S. 183—187 (1888), Brux. S. sc. XII. B. S. 185 bis 189.

**) Nouv. Ann. (3) VII S. 464—467 (1888).

***) C. R. CIV S. 961—964, 1364—1365 (1887). Vgl. auch Cayley, Quart. J. XXI S. 212—213 (1885), Mac Mahon, ebda. S. 362—365. Der Letztere hat auch für die specielle Klasse der „asyzygetischen" Seminvarianten Generatoren aufgestellt: Am. J. VIII S. 1—18 (1885).

†) C. R. CIV S. 1097—1099, 1258—1260 (1887).

††) Belg. Bull. XIII S. 226—235 (1887).

†††) Lond. M. S. Proc. XXI S. 219—233 (1889).

Deruyts hat weiterhin die Lehre von den Seminvarianten auf Urformen mit mehreren Reihen von n Variabeln ausgedehnt, und damit zugleich die Invariantentheorie solcher allgemeinen Urformen wesentlich gefördert. Seine vielfach zerstreuten und schwer zugänglichen Untersuchungen hierüber*) hat Deruyts 1891 in einer Monographie**) vereinigt, sodass wir die letztere hier zu Grunde legen können. Die Abstractheit des Stoffes nötigt uns freilich, es beim Hervorheben einiger Hauptgesichtspunkte bewenden zu lassen.

Deruyts***) setzt, ähnlich wie Kronecker†), die allgemeine lineare Transformation von n Variabeln x aus zwei geeigneten Reihen einfacherer zusammen.

Es sind das einmal diejenigen, bei denen allein eine einzelne Variable einen constanten Factor annimmt:

$$(S_h)\quad x_h = \varepsilon X_h,\quad x_k = X_h\ (k \gtrless h),$$

andererseits solche, wo eine einzelne Variable um eine zweite, noch mit einem constanten Factor behaftete Variable vermehrt wird:

$$(S_{h,l})\quad x_l = X_l + \eta X_h,\quad x_k = X_k\ \ (k \gtrless l).$$

Man betrachte nun ganze Functionen F der Coefficienten von den Urformen, welche ausserdem noch in ganzer Weise von einer oder mehreren der Variabelnreihen (x), (y), (z), … abhängen können, und welche sich nach Ausübung der Substitutionen S_h, $S_{h,l}$ immer nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante (ε resp. 1) ändern sollen.

Die erstere Forderung, bezüglich der S_h, sagt nur aus, dass F „hinsichtlich der einzelnen Indices 1, 2, …, n“ isobar††) wird: F ist dann

*) Belg. Bull. (3) XIV S. 53—79 (1887), ebda. XV S. 951—980 (1888), XVI S. 207—215, 576—589 (1888); Liège Mém. (2) XV, zwei Noten (1888). Belg. Mém. S. E. LI, 3 Abhandlungen, ebda. LII.

**) „Essai d'une théorie générale des formes algébriques“, Bruxelles.

***) l. c. Chap. II.

†) Siehe oben S. 223.

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Entwickelungen ist indessen der, dass Kronecker die allgemeine lineare Substitution aus einer gewissen Anzahl specieller — welche insgesamt die erstere vertreten können — zusammensetzt, und jeder der letzteren entsprechend eine Differentialgleichung für die invarianten Bildungen erhält. Deruyts dagegen benutzt nur einen Teil seiner speciellen Repräsentanten, um Differentialgleichungen für seminvariante Functionen zu bilden, während an Stelle des Restes eine Reihe von arithmetischen Gleichheiten (nämlich der der n Gewichte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$) tritt, um dann zu einer invarianten Bildung zu führen.

††) Um diesen Begriff klar zu legen, denken wir uns etwa eine ternäre Form C_n mit einer Variabelnreihe x_0, x_1, x_2; der Coefficient des Gliedes $x_0^i x_1^k x_2^l$ $(i+k+l=n)$ sei mit a_{ikl} bezeichnet.

Irgend eine ganze Function F der a sei als ein Aggregat von Gliedern

von selber auch **homogen** in den einzelnen Coefficienten und Variabelnreihen.

Aendert sich F bei Anwendung von S_h um die Potenz ε^{π_h}, so heisst π_h das **Gewicht** von F **bez. des Index** h; es giebt also n solcher Gewichte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$.

Aus den Substitutionen $S_{h,l}$ lassen sich nun $n-1$ derart herausgreifen, dass die Zahlen h, l auf die $n-1$ Wertepaare

$$h, l = (1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$$

beschränkt werden. Es zeigt sich, dass es für das Folgende genügt, diese $n-1$ Substitutionen $S_{i,i+1}$ zu verwenden.

Die Bedingung, dass F gegenüber $S_{l,h}$ invariant ist, erweist sich als äquivalent mit einer linearen partiellen Differentialgleichung $[h, l] = 0$.

Als eine „seminvariante Function" wird jede isobare Form F der Coefficienten und Variabeln definirt, welche die $n-1$ Gleichungen $[i, i+1]\ F = 0$ erfüllt*): ist F frei von den Variabeln, so heisst F eine „Seminvariante".

Fügt man dagegen noch die Forderung hinzu, dass die n Gewichte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$*) von F **sämtlich einander gleich** $(=\pi)$ werden, so geht F über in eine gewöhnliche „invariante Function" (invariante Bildung), resp. in eine gewöhnliche Invariante.

Beispielsweise ist irgend eine, dem Schema der Variabelnreihen entnommene ein-, zwei-, dreireihige Determinante**) eine seminvariante Function.

$\pi a_{ikl}^{\alpha_{ikl}}$ gegeben, wo sich das Productzeichen auf sämtliche a erstreckt, und die Exponenten $\geqq 0$ sind. Dann heisst F bez. des Index 0 isobar, wenn die Summe $\sum\limits_i i\alpha_{ikl}$, auf alle a ausgedehnt, einen constanten Wert (d. i. das bez. „Gewicht" π_0) besitzt; desgleichen bez. des Index 1, 2, wenn das Entsprechende von den Summen $\sum\limits_k k a_{ikl}$, $\sum\limits_l l a_{ikl}$ gilt.

Der Unterschied zwischen der hier gewählten Bezeichnung und der in der analytischen Geometrie üblichen tritt an einem Beispiel deutlich hervor. Eine C_4 schreibt sich nach der letzteren Vorschrift:

$$x_0^4\, a_{0000} + x_1^4\, a_{1111} + x_2^4\, a_{2222} + 4x_0^3\, x_1\, a_{0001} + \cdots,$$

dagegen nach der ersteren einfacher:

$$x_0^4\, a_{400} + x_1^4\, a_{040} + x_2^4\, a_{004} + 4x_0^3\, x_1\, a_{310} + \cdots,$$

wo also die Summe der Indices jedes Coefficienten ein- und dieselbe ist, genau wie die Summe der Exponenten.

*) Es wird bewiesen, dass mit dem Erfülltsein der $n-1$ Gleichungen $[i, i+1] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ für eine isobare Form **zugleich** alle Gleichungen $[h, l] = 0$, bei welchen der Index h kleiner ist, als der Index l, befriedigt werden.

**) Es sind das dieselben „Zwischenvariabeln" p_{ik}, p_{ikl}, ..., welche den allgemeinen Untersuchungen von Clebsch zu Grunde liegen.

Behufs weiterer Entwickelung überträgt*) der Verfasser die Clebsch-Aronhold'sche Symbolik, welche bis dahin nur für invariante Functionen benützt wurde, auf seminvariante Functionen. Es empfiehlt sich dabei, den symbolischen Ausdrücken eine „canonische"**) Gestalt beizulegen, welche in den einzelnen äquivalenten Symbolelementen symmetrisch ist: es hat das unter anderem den Vorteil, dass jeder nicht verschwindenden symbolischen Bildung auch eine nicht verschwindende reale correspondirt, und umgekehrt.

Bei dieser Festsetzung ist es nicht schwer, nachzuweisen, dass „eine seminvariante Function ψ zum symbolischen Ausdruck ψ' eine, auf Linearformen bezügliche seminvariante Function von den nämlichen Gewichten besitzt"***).

Diese Linearformen dürfen linear angenommen werden, nicht nur in den symbolischen Coefficienten, sondern auch in den Variabelnreihen; sie sind also sämtlich von dem Typus $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$.

Bildet man nun aus den n ersten Colonnen des Schemas der symbolischen Coefficienten der Reihe nach alle möglichen Determinanten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ von den Ordnungen 1, 2, ..., n; andererseits aus den n letzten Colonnen des Schemas der Variabeln entsprechend alle möglichen Determinanten $\delta'_n, \delta'_{n-1}, \ldots, \delta'_1$ von den Ordnungen n, n — 1, ..., 1, so gilt der grundlegende Satz†):

„Der symbolische Ausdruck ψ' einer seminvarianten Function ψ ist darstellbar als eine Summe von Producten aus den drei Factorengruppen δ; δ'; $(a_x, b_x, \ldots)$".

Im besondern treten bei einer invarianten Function nur n-reihige Determinanten δ_n, δ'_n ein, und man gelangt unmittelbar zum Clebsch'schen Fundamentalsatz der Symbolik zurück.

Eine weitere Vereinfachung der Theorie wird erzielt, wenn man sich, nach dem Vorgange von Capelli, des Aronhold'schen Processes bedient; der Fortschritt bei Deruyts wird durch die gleichzeitige Berücksichtigung der (symbolischen) Coefficienten- und der Variabelnreihen erzielt.

Hiermit ergiebt sich, in Verbindung mit der oben berührten symbolischen Darstellung für die seminvarianten Functionen, auf der einen

---

Der Fortschritt bei Deruyts liegt eben darin, dass an Stelle der speciellen Grössen p mit den weit allgemeineren seminvarianten Functionen operirt wird.

*) l. c. Chap. III.

**) l. c. S. 13, 14.

***) l. c. S. 55.

†) l. c. S. 57.

Seite der symbolische Ausdruck für irgend eine Seminvariante von den Gewichten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, indem das aus den Hauptunterdeterminanten des Coefficientenschemas gebildete Product:

$$a_1^{\pi_1-\pi_2}(a_1\,b_2)^{\pi_2-\pi_3}\ldots(a_1\,b_2\,c_3\ldots k_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n}\,(a_1\,b_2\,c_3\ldots k_{n-1}\,l_n)^{\pi_n}$$

genügend oft mal Processen von der Art D_{ab}, D_{ac}, D_{bc}, ... unterworfen wird*).

Auf der anderen Seite**) gelangt man, wenn man hier überall die Coefficientenreihen der a, b, ... mit den Variabelnreihen vertauscht, zu einer neuen Art von invariantiven Functionen, den „identischen Semicovarianten zweiter Gattung".

Es hat nun keine wesentliche Schwierigkeit, zu sehen, dass das „Leitglied"***) einer invarianten Function, welche n Variabelnreihen zu den Ordnungen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ enthält, eine Seminvariante von den Gewichten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ ist, und dass diese Beziehung auch in eindeutiger Weise umgekehrt werden kann.

In der That hat man nur†) in dem symbolischen Ausdrucke der Seminvariante ψ die symbolischen Elemente (a), (b), ... durch ebensoviele Reihen von symbolischen Linearformen zu ersetzen, um die seminvariante Function Ψ mit dem Leitgliede ψ vor sich zu haben.

Die Function Ψ besitzt die $\pi_n$te Potenz von δ'_n, der Determinante der Variabeln, zum Factor. Nennen wir den anderen Factor χ, so ist χ eine invariante Function, welche nur noch die $n-1$ ersten Variabelnreihen zu den Ordnungen $\pi_1-\pi_n$, $\pi_2-\pi_n$, ..., $\pi_{n-1}-\pi_n$ enthält, vom Gewichte π_n ist, und wiederum ψ zum Leitgliede hat.

„Diese Functionen χ, welche Deruyts als primäre Covarianten bezeichnet, erweisen sich, wie schon Capelli††) nachgewiesen hatte, als das eigentliche Fundament der Invariantentheorie der Formen von beliebig vielen cogredienten Reihen von n Variabeln." In der That lassen sich dieselben auch definiren als diejenigen, allseitig isobaren Formen von $n-1$ Variabelnreihen, welche den $n-2$ linearen partiellen Differentialgleichungen

$$D_{12}=0,\ D_{23}=0,\ \ldots,\ D_{n-2,n-1}=0$$

genügen.

---

*) l. c. S. 64.

**) l. c. S. 65.

***) Sind mit x_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ die n Reihen von je n Variabeln bezeichnet, mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ die bezüglichen Ordnungen einer Form, so ist unter dem Leitgliede der Coefficient von $x_{11}^{m_1}x_{22}^{m_2}\ldots x_{nn}^{m_n}$ zu verstehen.

†) l. c. S. 71.

††) Siehe S. 200 u. flgde., 216.

Deruyts findet aber nicht nur die Capelli'schen Ergebnisse wieder, namentlich den Fundamentalsatz über Reihenentwickelung*), sondern deckt auch eine Reihe neuer Eigenschaften der Functionen χ auf, eben mit Hülfe seiner durchsichtigen symbolischen Darstellung der Seminvarianten.

Hierher gehört vor allem der nach Hilbert's Methode geführte Nachweis**), dass die Functionen χ einen Integritätsbereich mit endlicher Basis bilden.

Mit Hülfe der Functionen χ ist Deruyts ferner in der Lage, einem Sylvester'schen Satze (S. 219) die weiteste Ausdehnung zu geben, indem aus zwei seminvarianten Functionen dadurch eine neue erzeugt wird, dass die Coefficienten der einen durch die ersten Ableitungen der zweiten nach den ihrigen ersetzt werden.

Die Functionen χ lassen sich auf eine Reihe einfachster Typen reduciren***), aus denen alle übrigen durch einen verallgemeinerten Ω-Process ableitbar sind.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass es die Functionen χ auch erlauben, „specielle"†) Urformen, zwischen deren Coefficienten gewisse algebraische Relationen herrschen, der Formentheorie zugänglich zu machen.

Vorausgesetzt ist nur, dass jene Relationen selbst invariantiver Natur sind, d. h. dass sie ihre Form bei linearer Transformation der Variabeln nicht ändern.

Es hat zunächst den Anschein, als ob zu derartigen Urformen Functionen gehören, welche erst in Folge jener Relationen die Eigenschaft der Invarianz annehmen. Dies ist indessen nicht der Fall, da sich nachweisen lässt, dass sich sämtliche Functionen χ aus solchen „regulären" herleiten lassen, welche unabhängig von jenen Relationen existiren.

---

*) l. c. Chap. IV. Die Anwendung hiervon auf die Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen invarianten Bildungen von gegebenen Gradordnungen ist schon auf S. 176 u. flgde. besprochen worden.

**) l. c. S. 116 u. flgde. Die Verallgemeinerungen bei invarianten Functionen befinden sich schon auf S. 23 u. flgde.

***) l. c. Chap. VI.

†) l. c. Chap. VIII; Bull. Belg. (3) XXIII S. 152—167 (1892).
Vgl. Maurer, S. 229.
Auch Study („Methoden ..." II § 10) verwendet derartige „invariante Gleichungssysteme" behufs allgemeiner Erledigung des Aequivalenzproblems: insbesondere findet sich bei ihm der Satz, dass ein invariantes Gleichungssystem ersetzt werden kann durch eine Reihe von verschwindenden Invarianten und identisch verschwindenden Covarianten.

II. D, b.

Combinanten und Apolarität.

Unter den Formen mit mehreren Reihen von Variabeln, welche verschiedenen*) linearen Transformationen unterliegen, sind bereits wiederholt**) die „Combinanten" als die am häufigsten vorkommenden namhaft gemacht worden.

Die Verknüpfung der Combinanten mit der „Apolaritätstheorie" ist eine so innige, dass eine gemeinsame Besprechung am Platze ist. Freilich wird es uns nicht gut möglich sein, von der Bedeutung dieses Zweiges der Formentheorie eine richtige Vorstellung zu geben, da dessen wichtigste Anwendungen der Geometrie angehören; gerade hier aber tritt wiederholt die Erscheinung auf, dass Sätze, die in der Algebra nahezu selbstverständlich, oder wenigstens von nur particulärem Interesse sind, in der Geometrie zur Quelle weitreichender Forschungen werden.

Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_p$ homogene Functionen $n$ten Grades der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Unter den simultanen invarianten Bildungen der f werden diejenigen als Combinanten bezeichnet, welche sich bei linearer Sub-

---

*) Siehe S. 106 u. flgde., 140, 148, 154, 178, 193. Von besonderem Interesse (auch für die Theorie der elliptischen Functionen) sind die binären quadrato-quadratischen Formen. Ihre beiden Discriminanten besitzen gleiche Invarianten (Cayley, Quart. J. XI S. 83—91, 1870; Capelli, Batt. G. XVII S. 69—148, 1879; Zeuthen, Proc. L. M. S. X S. 196—204, 1879; Frobenius, Journ. f. Math. CVI S. 125—188, 1890). Frobenius geht dabei auch auf die Aequivalenz solcher Formen ausführlich ein. Dass die soeben genannte Eigenschaft auch bei mehrfach linearen Formen von drei und vier binären Variabelnreihen in entsprechender Weise auftritt, hat le Paige untersucht; vgl. die Citate auf S. 178 unten.

**) Siehe S. 87, 148, 155, 162, 184 u. flgde., 193, 225.

Combinanten im allgemeinsten Sinne sind die invarianten Bildungen von denjenigen unter den bezeichneten Formen, bei welchen eine der Variabelnreihen nur linear eingeht. Siehe weiter unten. Wegen der auf diesen Abschnitt bezüglichen, bis 1883 reichenden Litteratur sei auf das Verzeichnis in des Referenten „Apolarität" hingewiesen. Zur Begründung der Theorie sei hier noch nachgetragen: Clifford, Proc. L. M. S. II S. 116—118 (1869), Darboux, Bull. I (1870).

Eine der wichtigsten Combinanten ist die schon von Jacobi eingehend studirte Functionaldeterminante von n Formen mit n Variabeln (siehe etwa Gordan's Vorles. I). Die Functionaldeterminanten der Functionaldeterminanten sind den ursprünglichen Formen proportional (Clebsch, Journ. f. Math. LXIX S. 355—358 (1868), LXX S. 175—181 (1869), Rosanes, ebda. LXXV S. 166—172 (1872), Pasch ebda. LXXX S. 177—182 (1875)). Die auf S. 165 erwähnte Clebsch'sche Darstellung der binären Functionaldeterminante resp. des Productes zweier solcher durch die ursprünglichen Formen ist erweitert worden von d'Ovidio, Atti Tor. XIV S. 963—972 (1879), le Paige, Bull. de Belg. (2) XLIX S. 113—125 (1880), (3) I S. 480—499 (1881), C. R. XCII S. 688—690 (1881), Torelli, Nap. Rend. XXVS. 125—134 (1886).

stitution der f nur um eine Potenz der Determinante der Substitutionscoefficienten ändern.

Bildet man sich mit Hülfe der neuen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die Linearform

$$F = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_p f_p,$$

so lassen sich die Combinanten der f offenbar auch definiren als diejenigen Functionen von den Coefficienten und Variabeln der f, welche sich gegenüber beliebigen linearen Transformationen, sowohl der u, wie der x, invariant verhalten, und welche die u nicht enthalten.

Die letztere Definition ist insofern zweckmässiger, als sie nicht nur unmittelbar zu einer specifischen schon früher berührten Symbolik*) Veranlassung giebt, sondern auch zu einer wichtigen Verallgemeinerung führt; man gelangt zu „Combinanten der f in weiterem Sinne", wenn man die angegebene Beschränkung hinsichtlich der u fallen lässt.

Gordan**) hat den Grund zu der heutigen Ausbildung der Theorie gelegt mittels des Satzes: „dass jede Combinante der f sich darstellen lässt als eine invariante Bildung einer ausgezeichneten Combinante R, derjenigen Determinante nämlich, deren Elemente entstehen, wenn man die f so oft mit verschiedenen (cogredienten) Veränderlichen anschreibt, als ihre Anzahl ergiebt".

Gordan gelangt hierzu, indem er den Fundamentalsatz***) der Symbolik, „dass jede Invariante eines Systems linearer Formen eine Form der aus den Coefficienten der Formen zu bildenden Determinanten ist", in eigentümlicher Weise in Verbindung bringt mit der Reihenentwickelung†) einer Form, welche zwei Reihen contragredienter Variabeln enthält.

Die Combinanten bilden somit ein geschlossenes System von Formen, dem nach Hilbert unmittelbar die Eigenschaft der Endlichkeit zukommt, da sie aus einer einzigen Urform mit cogredienten Variabelnreihen ableitbar sind††).

Sehr viel durchsichtiger gestaltet sich die Lehre der

---

*) Siehe S. 193.

**) Math. Ann. V S. 95—122 (1872), bes. S. 116. Vgl. auch Voss, Münch. Ber. 1888 S. 15—19.

In § 11 werden insbesondere die Combinanten R für binäre Formen auf noch einfachere Bildungen reducirt.

***) Siehe S. 188.

†) Siehe S. 217.

††) Siehe S. 148.

Combinanten, wenn man dem Princip der Dualität Rechnung trägt.

Construirt man nämlich mit Stroh*) eine neue Determinante Q, indem man die p Coefficientenreihen der f ergänzt durch die entsprechenden Producte der Potenzen von einer hinreichenden Anzahl von Variabelnreihen (v), (w), ..., welche zu den ursprünglichen Variabeln contragredient sind, so ist Q im Stande, die Form R völlig zu vertreten. Denn Q ist selbst eine Combinante der f, und R eine invariante Bildung von Q.

Ist N die Anzahl der Coefficienten einer allgemeinen Form f, so beträgt N — p die Anzahl der neuen Variabelnreihen.

Der angegebene Satz legt es nun nahe, den p „Ordnungsformen" f (geschrieben mit Polynomialcoefficienten) N — p „Klassenformen" φ (geschrieben ohne Polynomialcoefficienten und) in contragredienten Variabeln gegenüber zu stellen.

„Alsdann gehen die Combinanten des einen Systems in die des andern einfach dadurch über, dass man in allen Formen an Stelle der Determinanten des ersten Coefficientensystems die adjungirten des zweiten setzt."

Hier ist der Punkt, wo die Apolaritätstheorie eingreift.

Man bezeichnet zwei Formen, wie f und φ (wo also die Ordnung von f gleich der Klasse von φ ist) als „conjugirt" (Rosanes**)) oder „apolar" (Reye***)), wenn ihre bilineare Invariante verschwindet.

Einem Systeme von p linear unabhängigen Formen f correspondirt gerade ein System von N — p linear unabhängigen Formen φ und umgekehrt, so, dass jede Form f zu jeder Form φ apolar ist.

Zwei solche Systeme heissen dann selbst „apolar zu einander".

Wählt man nunmehr das obige System der φ als ein zum System der f apolares, so werden, nach einem, zuerst von Brill***) vollständig

---

*) Math. Ann. XXII S. 393—405 (1883).

Im Falle der binären Formen erhält der Verfasser einen sehr durchsichtigen symbolischen Ausdruck für alle Combinanten ersten Grades, welche zu p Formen nter Ordnung gehören (l. c. S. 403).

**) Siehe S. 180, 218.

***) Math. Ann. IV, bes. S. 530 (1871).

Vgl. Grassmann's Ausdehnungslehre, 1862 No. 112.

Derselbe Satz bildet auch die Grundlage der Untersuchungen von Clebsch über die Invarianten von Formen mit n Variabeln (Gött. Abh. XVII S. 1—62, 1872), sowie von Gordan über den grössten gemeinsamen Factor (Math. Ann. VII S. 433—448, 1874), und der auf S. 264 citirten Arbeiten von W. Stahl.

nachgewiesenen Satze, je zwei der adjungirten Determinanten der beiderlei Coefficientensysteme einander proportional, oder auch, wenn man den unwesentlichen Proportionalitätsfactor gleich der Einheit setzt, einander gleich.

Hieraus fliesst das fundamentale „Combinantenprincip“: „Die Combinanten zweier apolarer Formensysteme stimmen der Anzahl und Form nach mit einander überein“*).

Beispielsweise lassen sich darnach drei biquadratische binäre Formen hinsichtlich ihrer Combinanten ersetzen durch nur zwei solche; waren die ersteren „allgemeine“ Formen, so sind es auch die letzteren**).

Von besonderem Interesse sind die einfachsten, die Combinanten binärer Formensysteme, weil sich auf ihnen die höheren aufbauen lassen.

Der Beweis, den Brill***) für diesen Fall geliefert hat, ist um so bemerkenswerter, als dabei ein wesentlich neuer Gesichtspunkt zu Tage tritt.

Aus der Gordan'schen, nicht homogen geschriebenen Determinante R werden die $\frac{p(p-1)}{2}$ Differenzen der p Variabeln y, welche R zu Factoren besitzt, abgesondert, und nachträglich sämtliche y einander gleichgesetzt.

Die so entstehende einfachere Combinante W(y)†), von der Ordnung $p(n-p+1)$ in der einen Variabeln y, ist insofern die Gordan'sche Form R zu ersetzen geeignet, als man auf die rationale Darstellung der invarianten Bildungen Verzicht leistet: in der That wird nachgewiesen, dass jede Combinante der f als eine irrationale In- oder Covariante der binären Form W darstellbar ist. (Vgl. II. B, b.)

Die „Allgemeinheit“ der Formen f zieht wiederum die-

---

*) Stéphanos, Sav. étr. 1883 (eingereicht Dez. 1881, siehe einen Bericht von Jordan vom Dez. 1881). Brill hat den Beweis des Satzes so geführt, dass er ohne weiteres auf ein System von Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausgedehnt werden konnte (Math. Ann. XX insbes. S. 335, 1882, datirt vom April 1882).

Vgl. wegen binärer Formen die Darstellung beim Referenten „Apolarität ...“ § 11.

**) Vgl. Stéphanos (l. c.), Brill (l. c.), Referent (l. c. Cap. II), sowie die Dissertationen von Friedrich (Giessen, 1886), Gross (Tübingen, 1887, auch Math. Ann. XXXI S. 136—150, 1888), E. Meyer (Königsberg, 1888).

***) l. c.

†) Diese „Functionaldeterminante“ der f oder „Hauptcombinante“ hat in Bezug auf ihre Abhängigkeit von den f Igel in einer Reihe von Abhandlungen in den Wien. Ber. u. Abh. genauer untersucht, und im Anschlusse daran Methoden zur Bildung von Combinanten entwickelt.

jenige der Form W nach sich, d. i. die Coefficienten von W sind von einander unabhängig.

Will man umgekehrt eine allgemein vorgelegte binäre Form von der Ordnung $p(n-p+1)$ in die Gestalt von W bringen, so bedarf es der Adjunction einer irrationalen Function der Coefficienten.

Beispielsweise ist die letztere bei einer Form sechster Ordnung die Wurzel einer Gleichung fünfter*) Ordnung: diese Adjunction genügt aber auch, um die gegebene Form durch lineare Transformation auf zwei gewisse canonische Gestalten**) zu bringen.

Zur Begründung des Combinantenprincips war der Begriff von apolaren Systemen benützt worden. Der letztere ist indessen schon früher aufgetreten: seine Quelle ruht in der Ausdehnung der Sylvester'schen canonischen Darstellung binärer Formen als Potenzsummen auf Systeme von Formen.

Rosanes hat 1872 einen ersten***) Schritt in dieser Richtung gethan, indem er mittels symbolischer Rechnung den einfachen, aber weittragenden Satz nachwies, „dass das Verschwinden der bilinearen Invariante zweier binärer Formen gleicher Ordnung notwendig und hinreichend sei, damit jede von ihnen sich als Summe der Potenzen der Linearfactoren der anderen darstellen lasse“. Noch zweckmässiger spricht sich dies dahin aus, dass, „wenn eine binäre Form nter Ordnung den Factor $\lambda-\alpha$ besitzt, so ist sie zur nten Potenz von $\lambda-\alpha$ apolar, und umgekehrt“.

Daraus folgt dann insbesondere, dass n gegebene binäre Formen nter Ordnung als lineare Verbindungen der vollständigen Potenzen derselben n linearen Formen darstellbar sind. Das Product der letzteren ist nämlich nichts anderes, als die zu den gegebenen Formen apolare Form.

Rosanes hat bald darauf†) das in Rede stehende Princip der apolaren Zuordnungen auf höhere Formen ausgedehnt. Man hat hier

---

*) Wegen der Beziehungen zwischen den Wurzeln der Gleichungen sechster und fünfter Ordnung vgl. Stephanos (l. c.) und den Referenten (l. c.).

**) Siehe oben S. 182.

***) Journ. f. M. LXXV S. 172—176. Weitere Anwendungen des Satzes finden sich in des Referenten „Apolarität“.

W. Stahl ist in die Beziehungen zwischen binären apolaren Systemen noch tiefer eingedrungen und hat interessante Anwendungen auf die Theorie der abwickelbaren Flächen gemacht: Journ. f. Math. CI S. 73—98 (1886), S. 300 bis 325 (1887); CIV S. 38—61 (1888), S. 302—320 (1889). Vgl. auch Study, Leipz. Ber. 1886 S. 3—9.

Eine rein geometrische Theorie der binären Apolarität verdankt man H. Wiener, Habil. Schrift, Darmstadt 1885, 83 S. Vgl. Thieme, Schlöm. Z. XXIV S. 221—229, 276—284 (1879); Math. Ann. XXIII S. 597—598 (1884).

†) Journ. f. M. LXXV S. 312—330 (1873).

analog: „Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ eine Form nter Ordnung von r Variabeln, und bedeuten $u_1, u_2, \ldots, u_r$ die contragredienten Variabeln, so ist f dann und nur dann zur nten Potenz der Linearform $u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_r y_r$ apolar, wenn die Gleichung $f(y_1, y_2, \ldots, y_r) = 0$ erfüllt ist".

Hierauf gründet sich die Möglichkeit*), eine allgemeine Form f durch eine gewisse Anzahl von Potenzen linearer Formen darzustellen, eine Aufgabe, die bereits vorher**) Reye mit Hülfe seiner mechanischen Interpretation mit Erfolg in Angriff genommen hatte.

Es tritt aber jetzt ein neues Moment hinzu, welches den Zusammenhang mit den Polareigenschaften der Form f vermittelt.

Man bilde von der Form f die erste Polare bezüglich eines Wertsystems („Punktes") (y); von dieser Form abermals die erste Polare bez. eines zweiten Punktes (z), und so fort, bis man zu einer Form gelangt, die in n Punkten (x), (y), (z), ..., (w) linear ist.

Verschwindet die letztere Bildung, so sagt man, dass die n Punkte ein „Pol-n-Eck" von f***) bilden.

Alsdann ist leicht zu sehen, dass ein Pol-n-Eck von f, d. i. das Product der n Linearformen $u_x, u_y, \ldots, u_w$, eine zu f apolare Klassenform ist, und umgekehrt.

Der Begriff des Pol-n-Ecks lässt sich zu dem eines vollständigen Pol-$(n+1)$-Ecks erweitern, wenn je n-Ecken des letzteren ein Gebilde der ersteren Art darstellen.

Daraus fliessen nun in Verbindung mit dem Obigen Sätze, wie der folgende, wobei wir uns auf den Fall von drei Variabeln beschränken, und der Kürze wegen die geometrische Fassung wählen:

„Eine allgemeine C_n lässt sich mittels der „Seiten" eines vollständigen Pol-$(n+1)$-Ecks als Summe der nten Potenzen von $\frac{n(n+1)}{2}$ Linearformen darstellen."

Es ist bemerkenswert, dass die Kraft der hierher gehörigen Sätze wesentlich darauf beruht, dass man von zwei apolaren Formen f, φ die eine als reducibel, nämlich als ein Product von lauter Linearformen voraussetzte.

Naturgemäss wird man nach der Bedeutung der Apolarität von zwei nicht reducibeln Formen fragen. Thatsächlich ist dieses allgemeinere Pro-

*) Die geometrische Bedeutung der linearen Relationen zwischen gleich hohen Potenzen von Linearformen hatte schon P. Serret 1869 eingehend untersucht (Géométrie de direction, Paris).

**) Journ. f. Math. LXXII S. 293—326 (1870).

***) Vgl. Grassmann, Gött. N. Dez. 1872, S. 567—577.

blem das ältere, wenn man sich dabei auch auf den Fall der zweiten*) Ordnung und auf die darauf zurückführbaren**) beschränkt hat.

Indessen schien die gegebene Antwort, so wichtig sie für die Geometrie ist, algebraisch von zu specieller Natur zu sein, um auf die Formentheorie einen fruchtbaren Einfluss auszuüben.

Hesse***) hatte nämlich bereits nachgewiesen, dass die Apolarität zweier Formen zweiter Ordnung resp. Klasse das Kriterium dafür ist, dass man vermöge linearer Transformation (und zwar dann noch auf unendlich viele Weisen) die beiden Formen auf eine derartige Normalform bringen kann, dass in der einen Form ausschliesslich die Quadrate, in der andern ausschliesslich die Producte der Variabeln auftreten.

Rosanes und Reye†) haben hieraus, in Verbindung mit dem oben dargelegten Principe, weitreichende Folgerungen entwickelt für Systeme von Kegelschnitten resp. Flächen zweiter Ordnung (und Raumcurven dritter Ordnung).

Mit der Aufgabe, die in Rede stehende, ganz anders geartete canonische

---

*) Der Fall der dritten Ordnung ist erst neuerdings für das ternäre Gebiet von O. Schlesinger untersucht worden. Sein Hauptresultat lautet geometrisch, dass, wenn eine Curve dritter Ordnung zu einer Curve dritter Klasse conjugirt ist, die erste unendlich viele Polfünfecke der letzteren enthält. (Vgl. auch de Paolis, Acc. L. 1886.) Es wird für diese Polfünfecke eine einfache Construction angegeben (Math. Ann. XXX S. 453—477 (1887)). Eine allgemeinere Auffasung der Apolarität entwickelt derselbe Verfasser, Math. Ann. XXXI S. 183—219 (1888), insofern man auf elliptischen Curven mit linearen Aggregaten gewisser θ-Producte ganz ähnlich rechnen kann, wie mit solchen von algebraischen Formen auf rationalen Curven. Im besonderen folgt daraus, dass die oben mitgeteilte Bedingung des Conjugirtseins nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

London (Math. Ann. XXXVI S. 535—584) hat hieran angeknüpft, um eine oder mehrere kubische ternäre Formen als Summen von Kuben linearer Formen darzustellen.

**) So z. B. wenn eine Curve zweiter Klasse k_2 apolar ist zu einer Curve dritter Ordnung C_3, d. h. zu allen Polarkegelschnitten der C_3, oder, wenn eine Fläche zweiter Klasse Φ_2 apolar ist zu einer Raumcurve dritter Ordnung φ_3, d. h. zu allen durch φ_3 gehenden Flächen zweiter Ordnung. Vgl. auch S. 86.

***) Journ. f. M. XLV S. 82—90 (1853).

†) Siehe S. 180. Die Anwendungen auf linear abhängige Punktsysteme sind seitdem von Rosanes noch weiter verfolgt worden, Journ. f. M. LXXXVIII S. 241—273 (1880), XC S. 303—321 (1881), XCV S. 247—255 (1883), C S. 311 bis 316 (1887).

In jüngster Zeit hat Reye die Geometrie um einen neuen Zweig bereichert, der mit der Apolarität vielfache Berührungen aufweist, nämlich um die Theorie der linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel und Räume, und der hier geltenden Dualitätsprincipien. Berl. Ber 1889 S. 833—839, Journ. f. Math. CIV S. 211—240 (1889), CVI S. 30 bis 47, 315—329; CVII S. 162—178 (1890); CVIII S. 89—124 (1891). Vgl. W. Stahl, Journ. f. Math. CVII S. 179—188 (1890).

Darstellung auf die früheren zurückzuführen, verbindet sich eine andere von allgemeinerem Charakter, nämlich die Apolaritätserscheinungen im Gebiete von drei, vier, ... Variabeln aus einer rein binären Quelle herzuleiten.

Der Referent*) hat sich hiermit eingehend beschäftigt und hat nachgewiesen, dass beide Fragen zu bejahen sind: Apolaritäts- und Combinanteneigenschaften höherer Gebiete lassen sich der Theorie der binären Combinanten unterordnen.

Es wird das erreicht durch eine Kette von Uebertragungsprincipien (oder umgekehrt, wenn man will, von Reductionsprincipien).

Der Kern des Verfahrens ist der, dass unter Zugrundelegung eines canonischen „Coordinatensystems" die erforderlichen Polarenprocesse umgesetzt werden in einfache Umwandlungen elementar-symmetrischer Functionen.

Da es bei den in Rede stehenden Gebilden irrelevant ist, ob man die Formen gleich Null setzt oder nicht, so möge das Erstere erlaubt sein, und damit zugleich eine bequeme geometrische Redeweise.

Um uns nicht in Erklärungen complicirter Begriffe einzulassen, genüge es, den einfachsten Fall von zwei Kegelschnitten**) der Illustration unterzulegen.

Es seien ein Ordnungs- und ein Klassenkegelschnitt vorgelegt:
$f \equiv a_x^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \varphi \equiv u_\alpha^2 \equiv \Sigma\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \;\; (i, k = 0, 1, 2).$
Den letzteren denke man sich bereits in die „Normalform"***) gebracht

$$\varphi \equiv u_0 u_2 - u_1^2 = 0,$$

oder auch, mit Einführung eines willkürlichen Parameters λ:

$$u_0 : u_1 : u_2 = \lambda^2 : -\lambda : 1.$$

Die Apolaritätsbeziehung zwischen f und φ drückt sich jetzt aus durch:

$$a_{02} = a_{11},$$

sodass man bei ihrem Erfülltsein setzen kann:

$$a_{00} = a_0, \quad a_{01} = a_1, \quad a_{02} = a_{11} = a_2, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{22} = a_4.$$

---

*) „Apolarität ...", Tübingen 1883. Die in Rede stehenden Uebertragungsprincipien hat des weiteren (auch für nicht apolare Gebilde) Study verfolgt: Leipz. Ber. 1890 S. 172 u. flgde.

**) l. c. § 18.

***) Die Verwendung dieser Normalform ist für die Durchsichtigkeit des ganzen Verfahrens durchaus wesentlich. Selbstredend können einzelne Ergebnisse auch unter Zugrundelegung allgemeiner Urformen abgeleitet und weiter verfolgt werden, wie das mittels symbolischer Rechnung Schlesinger für das ternäre, Lindemann für das quaternäre Gebiet nachgewiesen haben. Cf. O. Schlesinger, Dissertation, Breslau 1882 oder Math. Ann. XXII S. 520—568, Lindemann, Math. Ann. XXIII S. 111—142 (1884).

Ursprünglich ist der letztere von der „typischen" Darstellung binärer Formen ausgegangen, siehe oben S. 161.

Von einem Punkte (x) mögen die Tangenten α, β an den „Norm-Kegelschnitt" φ gehen, dann hängen die x_0, x_1, x_2 mit den α, β zusammen durch die einfachen Relationen:

$$x_0 : x_1 : x_2 = 1 : \alpha + \beta : \alpha\beta.$$

Dann lautet der grundlegende Satz:

„Die Bedingung dafür, dass zwei Punkte $(x) = (\alpha, \beta)$, $(y) = (\gamma, \delta)$ in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, drückt sich vermöge der, in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ **symmetrischen** Gestalt aus:

$$a_{xy} \equiv a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0,$$

wo die $\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0}, \frac{s_3}{s_0}, \frac{s_4}{s_0}$ die elementarsymmetrischen Functionen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bedeuten".

Daraus fliessen unmittelbar die nachstehenden Folgerungen.

„Die sämtlichen Lösungen (s) der Gleichung $a_s = 0$ stellen die (dreifach unendliche) Schar von, φ umschriebenen Polvierseiten des zu φ apolaren Kegelschnitts f dar."

Setzt man in $a_s = 0$: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \lambda$, so erhält man die Gleichung $a_\lambda^4 = 0$ für die vier Schnittpunkte von φ mit f.

Daraus und aus der Definition der binären Apolarität ergiebt sich:

„Die Polvierseite des vorigen Satzes sind auf φ dargestellt durch die zum binären Quadrupel a_λ^4 der Schnittpunkte von φ mit f apolare Gruppe."

Von den Polvierseiten von f gelangt man zu den Poldreiseiten von f, indem man eine Seite der ersteren unbestimmt werden lässt.

Sollen zugleich die Seiten eines Poldreiseits Tangenten α, β, γ von φ sein, so spaltet sich die Gleichung $a_s = 0$ in die beiden:

$$a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = 0, \quad a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2 + a_4 \sigma_3 = 0,$$

wo $\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \alpha + \beta + \gamma$, $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \alpha\beta\gamma$ gesetzt ist.

Damit findet aber der Satz von Hesse seine vollständige Erklärung; „denn die, φ umschriebenen Poldreiseite von f sind auf φ repräsentirt durch die zur Gruppe der ersten Polaren des Schnittpunktquadrupels (f, φ) apolare Gruppe."

Die Verknüpfung zwischen dem binären und ternären Gebiete wird eine noch engere mittels eines weiteren, zuerst*) von O. Schlesinger mit

*) Dissertation, Breslau 1882 oder Math. Ann. XXII S. 520—568 (1883). Unabhängig davon ist der Referent auf dieses Princip gekommen, und hat dasselbe Math. Ann. XXI S. 528—544 (1883) und in „Apolarität" allgemein mit unsymbolischen Mitteln entwickelt.

symbolischer Rechnung aufgestellten Uebertragungsprincipes, welches wesentlich auf der Auffassung beruht, dass man einen und denselben Kegelschnitt K einmal als Ordnungs-, das anderemal als Klassengebilde ansieht.

Auf einem Kegelschnitt K sei ein Punktquadrupel a_λ^4 nebst einem Tangentenquadrupel b_λ^4 gegeben. Es giebt einen einzigen zu K apolaren Ordnungskegelschnitt f, der mit K das Punktquadrupel a_λ^4 gemein hat, und ebenso einen einzigen zu K apolaren Klassenkegelschnitt Φ, der mit K das Tangentenquadrupel b_λ^4 gemein hat.

„Dann ist (bis auf einen unwesentlichen Factor) die binäre bilineare Invariante der beiden Quadrupel a_λ^4, b_λ^4 identisch mit der ternären bilinearen Invariante der beiden Kegelschnitte f, φ."

Wir brechen hier ab und begnügen uns damit, die Ausdehnung auf höhere Gebiete dadurch zu charakterisiren, dass man die Ordnung n einer Binärform $f_n = a_\lambda^n$ in zwei Factoren $n_1 n_2$ zerlegt*), und nunmehr die Wurzeln von $f_n = 0$ interpretirt als Punkte auf einer, in einem Raume von n_1 Dimensionen gelegenen einfach-ausgedehnten Mannigfaltigkeit, deren homogene Coordinaten nichts anderes sind, als die Potenzen 1, λ, $\lambda^2, \ldots, \lambda^{n_1}$ der Variabeln λ.

Als eine Anwendung der in Rede stehenden Uebertragungsprincipien mögen zwei Sätze ihre Stelle finden, welche auf die Natur der canonischen Potenzdarstellungen ein neues Licht werfen.

Der erste**) sagt beispielsweise aus, dass die beiden Probleme, eine Binärform neunter Ordnung als Summe von fünf neunten Potenzen, andererseits eine quaternäre kubische Form als Summe von fünf dritten Potenzen darzustellen, äquivalent sind: man kann das eine auf das andere vermöge invarianter Processe zurückführen.

Der zweite Satz***) zeigt abermals die Aequivalenz zweier Probleme der canonischen Potenzsummendarstellung von Formensystemen und der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers von Formensystemen.

Seien nämlich zwei apolare binäre Formengruppen vorgelegt, so entspricht **jeder Untergruppe** der einen, deren sämtliche Individuen als Summen derselben vollständigen Poten-

*) Für den Fall, dass die Ordnung der Urform eine Primzahl ist, führt man deren Polaren von einer zerlegbaren Ordnung ein. Im übrigen wird ein ausgedehnter Gebrauch vom „Princip des Projicirens" gemacht, bez. dessen man die grundlegende Arbeit von Veronese vergleiche: Math. Ann. XIX S. 161—234 (1882).

**) „Apolarität . . ." § 32.

***) l. c. § 34.

zen darstellbar sind, eine bestimmte Untergruppe der anderen, deren sämtliche Individuen ein und dieselbe Form als gemeinsamen Factor besitzen, und umgekehrt.

In neuerer Zeit sind auch die oben berührten „erweiterten Combinanten“ eines Systems binärer Formen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$ in Betracht gezogen, welche also ausser der Variabeln λ noch eine (oder mehrere) Reihen von, mit den f, contragredienten Grössen u enthalten.

Es erweist sich dabei als zweckmässig, an Stelle der u variable Grössenreihen (x), (y), ... einzuführen, welche mit den f cogredient sind.

Die Gordan'sche erzeugende Combinante R (die Determinante der in verschiedenen Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ geschriebenen f) ist nunmehr nach Brill*) um einige weitere zu vermehren, die dadurch hervorgehen, dass man successive eine, zwei, drei, ..., p Reihen der f ersetzt durch Variable (x), resp. (x), (y), resp. (x), (y), (z) etc.

Geometrisch dienen die erweiterten Combinanten zur Erkenntnis der invarianten Eigenschaften der durch die f repräsentirten einfachen Mannigfaltigkeit, innerhalb einer Mannigfaltigkeit von $p-1$ Dimensionen.

Eine der wichtigsten Aufgaben ist in diesem die projectivische Erzeugung der vorliegenden Mannigfaltigkeit der f durch solche von niedrigerer Ordnung. Algebraisch lautet dieselbe:

„Man soll $p-1$ Reihen von Formen der Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ $(n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{p-1})$ ermitteln, derart, dass die p vollständigen, aus den $p-1$ Reihen zu bildenden Determinanten mit p vorgelegten Formen f nter Ordnung übereinstimmen.“

Der Referent**) hat diese Aufgabe mit Hülfe eines, später von Hilbert***) als allgemeingültig nachgewiesenen Postulates erledigt, indem er dieselbe als besonderen Fall der Teilbarkeitsaufgabe†) behandelte:

*) Siehe bei Gross, Dissertation, Tübingen 1887, oder im Auszug, Math. Ann. XXXII S. 136—150, Einleitung.

**) Math. Ann. XXX S. 30—74 (1887).

Wegen besonderer Fälle siehe Math. Ann. XXIX S. 447—467 (1887), XXXI S. 96—133 (1888).

***) Gött. N. 1889, bes. S. 30; Math. Ann. XXXVI, bes. S. 516 (1890).

Das gemeinte Postulat setzt die geforderte „Erzeugung“ als möglich voraus. Es sei also möglich, für ein gegebenes System von $d+1$ Formen $f(\lambda)$ nter Ordnung, d Systeme von $d+1$ Formen $\varphi(\mu)$ von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d$ so zu bestimmen, dass einmal jede Summe von der Art $\Sigma f(\lambda)\varphi(\mu)$ durch $\lambda - \mu$ teilbar wird, und zugleich die Summe der ν gleich n wird.

Für den Fall $p = 3$ war das gemeinte Postulat vom Referenten (l. c.) bewiesen worden.

†) Das Princip der Teilung geht in seiner einfachsten Fassung auf eine Arbeit von Brill zurück: Math. Ann. XXXVI S. 230—238 (1890), Abdruck

„Für eine ganze Function $F(\lambda, \mu)$ zweier nicht homogenen Variabeln das Kriterium dafür zu finden, dass F durch eine andere Function von λ, μ teilbar wird, welche eine der Variabeln nur zum ersten Grade enthält."

Die Lösung geschieht mit Hülfe von Ueberschiebungs- und Polarenprocessen.

W. Stahl hat*) für eine Reihe von Fällen $r = 3$ und $r = 4$ eine directe Lösung der gemeinten Aufgabe durch explicite Determinantenformeln hergestellt.

II. D, c.

Resultanten und Discriminanten.

Unter den speciellen Invarianten verdienen, mit Rücksicht auf die zahlreichen Anwendungen, die Resultanten und Discriminanten eine besondere Berücksichtigung**).

Die Lehre von den Resultanten und Discriminanten algebraischer Formen kann hier freilich nur insoweit in Betracht kommen, als ihre invariante Natur auch formal***) in den Vordergrund tritt.

In dieser Hinsicht drängte die historische Entwickelung der Formentheorie zunächst zur Lösung der Aufgabe, für jene Bildungen in den einfachsten Fällen einen symbolischen Ausdruck herzustellen.

Für die Resultante einer binären Form f_n nter Ordnuug und einer binären, linearen f_1 bot das keine Schwierigkeit.

Ersetzt man die f_1 durch eine f_2, so gab Salmon†) eine Lösung mittels des Hyperdeterminantencalcüls in einer Weise, die auch die Möglichkeit einer Erweiterung auf höhere Fälle zuliess.

Clebsch††) ging hierin einen Schritt weiter, indem er auf Grund

(mit Zusätzen) aus den Münch. Ber. 1885. Die Darstellung der Endbildungen als Combinanten gehört dem Referenten an.

*) Math. Ann. XXXVIII S. 561—585 (1891), XL S. 1—54 (1892). Die Entwickelung beruht hier wesentlich auf dem S. 256 erwähnten Determinantensatze. Vgl. noch Schuhmacher, Math. Ann. XXXVIII S. 298—306 (1891), sowie Jolles, Habil. Schrift, Aachen 1886, 24 S.

**) Siehe die früheren Bemerkungen S. 85, 86, 92, 94, 150, 162, 184, 185.

***) Wir verzichten daher auch auf eine Ausführung der schönen Anwendungen, welche insbesondere die Discriminante in der Theorie der Differentialgleichungen und in der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen erfahren hat.

†) Siehe etwa Salmon-Fiedler, No. 309, 310.

††) Journ. f. Math. LVIII S. 273—291 (1861).

Vgl. die Darstellung bei Gordan, Journ. f. Math. LXXI S. 164—194 (1870). Clebsch hat weiterhin für die Teilbarkeit einer f_n durch eine f_2 ein Kriterium mittels einer identisch verschwindenden Covariante gegeben (Binäre Formen

der Aronhold'schen Symbolik den Ausdruck für die Resultante einer f_n und f_2 so weit umgestaltete, dass seine reale Zurückführung auf eine Reihe von intermediären In- und Covarianten ausführbar wird.

Weniger durchsichtig gestaltet sich bei ihm die Verallgemeinerung auf mehrere Variable, wenn die Resultante von einer Form beliebiger Ordnung, einer quadratischen und einer Reihe linearer Formen gebildet werden soll.

Das Verfahren von Clebsch hat Gordan*) weitergeführt für die Resultante R von zwei beliebigen binären Formen f_m und f_n.

Zunächst gelingt es, in dem ausgezeichneten Falle $m = n$, durch Einführung der Symbole von den einzelnen „Elementarcovarianten“ der Cayley-Bézout'schen Resultantenform, und vermöge des Princips der Reihenentwickelung, die Resultante durch alleinige Anwendung des Ueberschiebungsprocesses aus den gegebenen Formen abzuleiten. Darüber hinaus wird in gleichem Sinne die Covariante construirt, deren Coefficienten für $R = 0$ den Potenzen der gemeinsamen Wurzel von f_m und f_n gleich werden, sodann diejenige Covariante, deren identisches Verschwinden das Kriterium für eine gemeinsame Doppelwurzel abgiebt u. s. f.

Sind f_m und f_n von ungleicher Ordnung, so erscheint freilich die Resultante in ihrem symbolischen Aufbau als Quotient zweier verhältnismässig einfacher Bildungen. In jedem speciellen Falle ist indes die Division ausführbar, und es kommt ein dem obigen analoges Ergebnis.

Die ausgerechneten Beispiele umfassen alle Fälle, wo keine der Ordnungen m, n die Zahl Fünf überschreitet.

Für den Fall, wo n beliebig, $m = 3$ ist, hat Pascal**) die Resultante in symbolischer Gestalt fertig hingeschrieben, sodass auch einer realen Ueberführung in ein Aggregat von Ueberschiebungen keine wesentlichen Schwierigkeiten entgegenstehen.

S. 91). Siehe die Verallgemeinerung bei Igel, Wien. Ber. 1880, der die f_2 durch eine Form höherer Ordnung ersetzt.

*) Math. Ann. III S. 355—414 (1871).

In einer voraufgehenden Arbeit Gött. N. 1870 S. 427 u. flgde. hatte Gordan ein System von partiellen Differentialgleichungen für die Resultante R einer f_n und f_m ($n \geqq m$) aufgestellt. Bezeichnet nämlich φ_μ ($\mu \leqq n$) eine Simultancovariante von f_n und f_m, welche die gemeinsamen Factoren der letzteren beiden Formen ebenfalls besitzt, so wird die μte Ueberschiebung von φ mit der Evectante von R durch R teilbar. Daraus fliessen die gewünschten Gleichungen. Siehe oben S. 205, 222. Die Invarianten-Kriterien für die Existenz mehrerer gemeinsamer Wurzeln zweier Formen gleicher Ordnung hat für eine Reihe von Fällen Pascal in Gordan'schem Sinne ausgeführt: Napoli Rend. (2) II S. 402—409, Annali di Mat. (2) XVI S. 85—99. Vgl. auch Perrin, C. R. CVII S. 22—24 (1888). Wegen der Discriminanten siehe folg. S.

**) Batt. G. XXV S. 257—280 (1887).

Napoli Rend. (2) II S. 67—72 (1888).

Die allgemeine Lösung der bezeichneten Aufgabe scheint vorderhand unmöglich*) zu sein; man hat sich damit begnügt, in den untersten Fällen die invariante Darstellung der Resultante dahin zu vervollkommnen, dass nur Formen des bezüglichen vollen Systems zur Verwendung gelangen. Vgl. für $m = 3$, $n = 4$ Brioschi**); für $m = 4$, $n = 4$, und für $m = 5$, $n \leqq 5$ d'Ovidio***).

Noch weniger entwickelt ist eine entsprechende Darstellung der Discriminante. Für binäre Formen f_n verdankt man Gordan†) ein systematisches Verfahren, um die Discriminante durch fundamentale Invarianten auszudrücken: indessen steigern sich bei zunehmender Ordnung die Schwierigkeiten der (symbolischen) Rechnung derart, dass der Fall $n = 7$††) eben noch bewältigt werden konnte.

Liegt etwa eine f_7 vor, so liefert das Bézout-Cayley'sche Verfahren zur Bestimmung eines Doppelfactors $\alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ von f sechs homogene Gleichungen vom fünften Grade in den α. Durch geeignete Ueberschiebung der linken Seiten und darauffolgende Division mit α_x resultiren Gleichungen vom vierten Grade in den α. So fortfahrend gelangt man zu quadratischen Gleichungen, aus denen die Elimination der α möglich ist; die linke Seite der Resultante erweist sich direct als die gesuchte Discriminante.

*) Der combinatorisch-symbolischen Darstellung der Resultante von Schendel, Schlöm. Z. XXXII S. 46—55, 83—90 (1887), XXXIII S. 1—13, 65 bis 77 (1888), sowie der Mac Mahon'schen Darstellung mittels symmetrischer Functionen Quart. J. XXIII S. 139—143 (1888) kann wohl eine Bedeutung für die Invariantentheorie vorderhand nicht beigelegt werden.

**) Chelini Coll. M. 1881 S. 221—223.

***) Atti Tor. XV S. 385—389, 1880 ($m = 4$, $n = 4$).

Nap. Mem. XI, 1883 ($m = 5$, $n = 2, 3$).

Mem. Soc. It. d. Sc. IV (1888) oder Rom. Acc. L. Mem. (4) IV S. 607—622, 1888 ($m = 5$, $n = 2, 3, 4, 5$).

†) „Vorlesungen" II No. 99.

Durch fundamentale Invarianten waren vorher schon ausgedrückt:
die Discriminante einer f_4 durch Boole (1845), bei Cayley, Papers I S. 94;
die Discriminante einer f_5 durch Salmon (1854), Cambr. a. Dublin M. J. IX S. 32;
die Discriminante einer f_6 durch Brioschi (1867), Annali di Mat. (2) I S. 159.

Das letztere Ergebnis ist auf Gordan's Wege durch Maisano hergeleitet worden, Math. Ann. XXX S. 442—452 (1885).

Die Structur der binären Discriminanten (in ausgerechneter Form) haben untersucht: Joachimsthal, Journ. f. M. XXXIII S. 371—376 (1846), Cayley, ebda. XXXIV S. 30—45 (1847), Pasch, ebda. LXXIV S. 1—6 (1872), Bauer, Münch. Ber. 1886 S. 183—191. Eine entsprechende Untersuchung der binären und ternären Resultante findet sich bei Noether, Math. Ann. XXIII S. 311—358 (1884), bes. S. 315 u. flgde.

Eine Darstellung der Resultante zweier binärer Formen n ter Ordnung als Determinante von $(n-1)^2$ Elementen, die mit der Theorie der Combinanten zusammenhängt, hat W. Stahl gegeben: Math. Ann. XXXV S. 395—400 (1889).

††) Math. Ann. XXXI S. 566—600 (1888).

Auf indirectem Wege hat Maisano*) den nächstfolgenden Fall $n = 8$ erledigt, indem er zunächst die specielle f_8 behandelt, welche Hesse'sche Covariante einer f_6 ist, und daraufhin für die Discriminante der allgemeinen f_8 einen analogen Aufbau nachweist.

Was die Bedingungen für einen mehrfachen Factor einer f_n betrifft, so ist neuerdings der Fall $n = 6$ durchgeführt worden. Die bezüglichen Covarianten, die dazu identisch verschwinden müssen, sind als Discriminanten von Polaren der Stammform von Maisano**) und d'Ovidio***) durch Systemformen ausgedrückt worden.

Für ternäre Gebilde ist nur Einzelnes zu erwähnen. Die Resultante dreier quadratischer Formen erscheint bei Gundelfinger****) und Mertens†) als ganze Function der zwei Fundamentalcombinanten.

Die Discriminante einer ternären Form C_n hat Gordan††) mit Hülfe einer schon bei Dersch auftretenden Covariante in Determinantenform als Function der Coefficienten hergestellt.

Wir wenden uns nunmehr zu einzelnen Eigenschaften der Resultanten und Discriminanten binärer Formen.

Diese Bildungen werden, als Functionen der Coefficienten, specifischen, partiellen Differentialgleichungen — neben den, für jede Invariante gültigen — genügen. Brioschi†††) hat zuerst je ein vollständiges System von linear unabhängigen Gleichungen derart aufgestellt, während Noether††††) nachwies, dass bereits eine einzige derselben, nach Belieben auswählbare, zur Charakterisirung jener Bildungen ausreicht.

Eine bemerkenswerte Anwendung von den Brioschi'schen Discriminantengleichungen hat Wiltheiss*†) gemacht, indem er die Differentialgleichung der hyperelliptischen Θ-Functionen in eine solche invariante Form umsetzte, dass sie geradezu durch geeignete lineare Combination von Brioschi's Gleichungen hervorgehen; die bezügliche binäre Form ist nichts anderes als der unter dem Integralzeichen auftretende Radicand.

---

*) Pal. Rend. III S. 53—59 (1889), IV S. 1—8 (1890).
**) Math. Ann. XXXI S. 493—506 (1888).
***) Torino Atti XXIV S. 164—176 (1888).
****) Journ. f. Math. LXXX S. 73—85 (1875).
†) Wien. Ber. XCIII S. 62—77 (1886).
††) Münch. Ber. XVII (1887).
Bezüglich des Falles $n = 4$ siehe bei Klein, Math. Ann. XXXVI, bes. S. 56.
†††) Journ. f. Math. LIII S. 372—376.
Die Resultante bezieht sich auf zwei binäre Formen gleicher Ordnung. Für Formen ungleicher Ordnung hat erst später Gordan die entsprechenden Differentialgleichungen aufgestellt, Gött. N. 1870 S. 427 u. flgde.
††††) Bruno-Walter's Binäre Formen, § 25.
*†) Math. Ann. XXXIII bes. S. 279 (1888).

Auf eine innige Wechselbeziehung zwischen Resultanten und Discriminanten zu einander und unter sich hat zuerst Gordan*) hingewiesen. Einfache Rechnung ergab, dass die Resultanten gewisser, hervorragender Covarianten einer Stammform f die Discriminante der letzteren als Factor enthielten. Den wahren Grund dieser Erscheinung hat Kohn**) in jüngster Zeit aufgedeckt. Führt man nämlich die Wurzeln einer ausgezeichneten, von Hermite stammenden typischen Darstellungsform von f als selbständige Grössen ein, so gelangt man fast unmittelbar zu dem Satze, dass alle Covarianten von f, deren Gewichte jeweils unter einer gewissen Grenze liegen, die Eigenschaft besitzen, dass ihre Resultanten mit f, resp. ihre Discriminanten die Discriminante von f in einer gewissen Potenz als Factor aufweisen.

Entsprechende Sätze gelten für Systeme von Stammformen.

Für eine binäre Form f ungerader Ordnung $n = 2l + 1$ hat Referent***) eine geschlossene Reihe von Covarianten $f, f_1, f_2, \ldots, f_l$ aufgestellt, deren Discriminanten, abgesehen von der ersten und letzten, in zwei Factoren zerfallen und derart kettenförmig mit einander verknüpft sind, dass je zwei aufeinander folgende einen Factor gemein haben.

Für gewisse particuläre Systeme von binären Formen ist der Connex zwischen ihren Resultanten und Discriminanten noch genauer untersucht worden. Es sind das diejenigen, welche, gleich Null gesetzt, die (Ordnungs-) Singularitäten einer rationalen Curve der Ebene oder des Raumes bestimmen.

Die Resultanten und Discriminanten jener Formen zerfallen, wie das geometrische Ueberlegungen nahe legen, jeweils in eine Anzahl irreducibler Factoren, und haben die letzteren, wenn auch in verschiedener Vielfachheit, zum Teil mit einander gemein. Für die Ebene und ein gewisses canonisches Gleichungssystem hat Brill†), für Ebene und Raum allgemein hat††) Referent die bezüglichen Zerlegungen vollständig ausgeführt.

---

*) Math. Ann. III S. 169—171 (1871).

**) Wien. Ber. Juli 1891, 29 S., Oct. 1891, 5 S. Siehe auch S. 157.

***) Gött. N. 1891 S. 279—286.

†) Math. Ann. XVI S. 345—408, bes. S. 388. Vgl. auch Math. Ann. XII S. 90—122 (1877).

††) Für die Ebene in Gött. N. 1888 S. 74—77, Math. Ann. XXXVIII S. 369—404 (1891); für den Raum in Gött. N. 1890, Juli, 10 S., 1890 Dez., S. 493—501, 1891 Jan., S. 1—12.

Im Gebiete der algebraischen Functionen einer Variabeln existirt eine ähnliche Erscheinung. Die „Discriminante" einer Form $C(1, s, z)$, d. i. die Resultante von C und $\frac{\partial C}{\partial s}$, zerfällt in zwei rationale Factoren, deren einer die Verzweigungen von $C = 0$, während der andere die Singularitäten von $C = 0$ liefert (Kronecker, Journ. f. Math. XCI S. 331—334, 1881). Vgl. die projectivische Verallgemeinerung bei Noether, Math. Ann. XXIII S. 311—358 (1884).

Im besonderen zerfällt dabei die Discriminante der Functionaldeterminante von drei oder vier binären Formen gleicher Ordnung in zwei Factoren, ein Ergebnis, welches Brill*) schon vorher auf eine beliebige Anzahl solcher Formen ausgedehnt hatte.

Die Kenntnis einer anderen, hierher gehörigen Reducibilitätserscheinung verdankt man Cayley**). Bildet man die Discriminante eines binären Formenbüschels $k_1 f + k_2 \varphi$, und von dieser, welche eine Form der Variabeln k_1, k_2 ist, abermals die Discriminante, so zerfällt die letztere in ein Product von der Gestalt $A B^2 C^3$, wo das Verschwinden der Invarianten A, B, C eine leicht ersichtliche Bedeutung für das vorgelegte Büschel besitzt.

Im Gebiete von mehreren Variabeln existirt in dieser Richtung ein Satz von Brill***). Eliminirt man aus n Gleichungen $f_i = 0$ in n (nicht homogenen) Veränderlichen $n-1$ der letzteren: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, so wird die Resultante der f eine binäre Form der übrig bleibenden x_n. Die bez. x_n gebildete Discriminante derselben ist durch die Resultante aus den f und ihrer Functionaldeterminante teilbar.

Wir erwähnen noch eine anderweitige fundamentale Eigenschaft der Discriminante D einer Form F. Es lässt sich erwarten, dass auch alle Ausartungen von F allein aus dem Verhalten von D erschlossen werden können. Für binäre Formen F hat Hilbert†) die bezügliche Frage mittels Potenzreihenentwickelung von D in allgemeinster Weise erledigt. Verschwindet für ein gewisses Wertsystem der Coefficienten a_i von F_n nicht nur die Form $D(a_i)$, sondern auch ihre sämtlichen ersten $n-k-1$ Polaren identisch, so zerfällt die nächstfolgende, $(n-k)$te Polare in $n-k$ lineare Factoren. Existiren unter diesen etwa je $\mu_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gleiche, so zerfällt auch die Stammform F derart, dass ihre Linearfactoren zu je μ_i vereinigt sind, und umgekehrt.

Für eine specielle Gattung von Polaren, die sogenannten „Evectanten“, ist dieses Ergebnis schon weit früher von Sylvester††) abgeleitet worden.

Die Hilbert'sche Methode erlaubt indessen, darüber hinaus, alle Singularitäten des Gebildes $D(a_i) = 0$ der Form und Anzahl nach anzugeben.

---

*) Math. Ann. XX bes. S. 336 u. flgde. (1882).

**) Siehe Russell, Quart. J. XXI S. 373—375 (1886).
Hilbert, Math. Ann. XXXI S. 482—492 (1888).

***) Gött. N. 1892 S. 89—92.

†) Math. Ann. XXX S. 437—441 (1887). Als eine besondere Anwendung erscheint die Verallgemeinerung eines Satzes über Identitäten zwischen gleich hohen Potenzen binärer Formen, welchen der Referent in „Apolarität“ S. 350 u. folgde. aufgestellt hatte.

††) Phil. Mag. (4) III 1852.

Wir beschliessen diesen Abschnitt, indem wir noch einiger Fortschritte in der Fassung des Resultanten- (und Discriminanten-) Begriffs gedenken, obschon denselben zur Zeit noch die Ausführung im invariantentheoretischen Sinne mangelt.

Bis auf die neueste Zeit ist die Resultante einer Reihe von n Formen F_i als die linke Seite der (von überflüssigen Factoren befreit gedachten) Gleichung formulirt worden, die durch Elimination der $n-1$ Variabeln hervorgeht.

Allerdings hat schon Bézout thatsächlich die Resultante dadurch gebildet, dass er mit Hülfe geeigneter polynômes multiplicateurs*) die Formen F_i derart linear combinirte, dass sich der entstehende Ausdruck auf eine Constante, eben die Resultante, reducirt.

Indessen gebührt Mertens**) das Verdienst, durch Umkehrung dieses Verfahrens den Begriff der Resultante vom Processe der Elimination losgelöst zu haben: unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen $F_i = 0$ kein Lösungssystem gemein haben, wird nachgewiesen, dass eine lineare Combination der F von vorgegebenem Grade in den Coefficienten der F existirt, die von den Variabeln nicht mehr abhängt.

Auf der anderen Seite hat man, den einfachsten Ausartungen der Grundformen F entsprechend, den Begriff der „reducirten" Resultante R' eingeführt. Besitzen nämlich die Gleichungen $F_i = 0$ bereits eine Anzahl von gemeinsamen Lösungssystemen, so giebt es immer noch eine ganze Function R' der Coefficienten, deren Verschwinden das Kriterium dafür abgiebt, dass jene Gleichungen noch eine weitere Lösung zulassen.

Cayley***) hat wohl zuerst ein derartiges Beispiel construirt, Perrin†) und Brill††) haben allgemeinere Untersuchungen darüber angestellt.

Perrin legt das Princip zu Grunde, die ursprüngliche Resultante R als Function der von den Variabeln freien Glieder der F aufzufassen, und gelangt so zu einer ausartungsfähigen Darstellung von R als ganzer

---

*) Die Bézout'sche Methode ist von End ausgedehnt worden auf Functionen von drei Variabeln, welche ausser für eine endliche Anzahl von Wertsystemen der Variabeln noch für ein einfach unendliches Wertsystem derselben verschwinden. (Dissert. Tübingen, 1888 oder im Auszuge: Math. Ann. XXXV S. 82—90, 1889.)

**) Wien. Ber. XCVII S. 618—621 (1888). Für binäre Formen findet sich eine entsprechende Behandlung der Resultante bereits bei Kronecker, Berl. Ber. 1881 S. 535—600.

***) Quart. J. XI S. 211—213 (1871). Vgl. auch Journ. f. Mat. XXXIV S. 30—45 (1847).

†) C. R. CVI S. 1789—1791; CVII S. 22—24, 219—221 (1888).

††) Math. Ann. IV S. 510—526, 527—549 (1871), Münch. Abh. XVII S. 91 bis 101.

Function der F, deren Coefficienten dann aber nicht mehr von den Variabeln abhängen.

Durch Combinirung des genannten Princips mit dem Poisson'schen Eliminationsverfahren gelingt es Brill*), die Frage zu einem algebraisch befriedigenden Abschluss zu bringen, sodass die reducirte Resultante explicite als gemeinsamer Factor gewisser Glieder einer Entwickelung erscheint, welche durch einen übersichtlichen Algorithmus berechnet werden können.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass auch die Theorie der Combinanten und der Apolarität mit Vorteil zum Zwecke von Resultantenbildungen bei complicirteren Fällen verwendet worden ist**).

II. D, d.
Weitere specielle Formen***).

II. D, d, α. Formen mit verschwindender Hesse'scher†) Determinante.

Eine der wichtigsten Fragen der Formentheorie ist die nach einem Kriterium, welches zu entscheiden gestattet, wann eine vorgelegte Form

---

*) l. c. Brill hat auch eine Verallgemeinerung anderer Art angegeben, indem er den Begriff der Resultante auf zwei Potenzreihen ausdehnte (Math. Ann. XXXIX S. 129—141, bes. 138, 1891), während O. Schlesinger schon vorher Resultanten und Discriminanten von θ-Functionen in Betracht gezogen hatte (Math. Ann. XXXII S. 411—443, 1889).

**) Stephanos, Thèse pour le doctorat. 1883. Referent: Gött. N. 1890 No. 10, Math. Ann. XXXVIII S. 369—404, bes. § VIII (1891), Verhandl. der Bremer Naturforscherversammlung 1891 S. 9—11. Geometrisch gesprochen ist dies Verfahren mit gewissen Projectionen äquivalent.

***) Aus der ausgedehnten Reihe weiterer specieller Formen sind im folgenden noch zwei Klassen herausgegriffen, welche von weiterem Interesse sind, und wir verweisen im übrigen auf eine Reihe von Notizen am Schlusse dieses Abschnittes II. D, d.

†) Zwei andere Eigenschaften der Hesse'schen Determinante H seien hier noch kurzweg erwähnt. Voss hat allgemein nachgewiesen, dass bei kubischen Formen F von n Veränderlichen die Hesse'sche Form von H eine lineare Combination von der Urform F und von H ist (Math. Ann. XXVII S. 515—536 (1886). Für $n = 4$ war der Satz vorher von Bauer bewiesen (Münch. Abh. 1883 S. 1—14) und auf die Geometrie der Flächen 3. Ordnung angewandt worden.
Andererseits hat Brill, behufs Untersuchung der Hesse'schen Curve $H = 0$ in singulären Punkten einer Grundcurve $C = 0$ die Form H aus gewissen binären Covarianten aufgebaut Math. Ann. XIII S. 175—182 (1878), nach einem Principe, welches Forsyth später weiter ausgeführt hat (siehe oben S. 158).
Die nämliche geometrische Aufgabe hat dann Wölffing veranlasst, die Form H einer ganzen Function ternärer Formen aus einfachsten Simultancovarianten der letzteren herzustellen: Dissert. Tübingen 1890, oder Math. Ann. XXXVI S. 97—120. Vgl. auch Gerbaldi, Pal. Rend. III S. 60—66 (1889).

F von n Variabeln vermöge linearer Substitution in eine solche von weniger Variabeln übergeführt werden kann, und, wenn dies der Fall ist, die bezüglichen Substitutionen wirklich zu ermitteln.

Die allgemeine Erledigung dieses Problems verdankt man*) Gordan und Noether, welche damit zugleich einen Satz von Hesse**) rectificirten, dem zufolge das besagte Kriterium durch das identische Verschwinden der nach ihm benannten Covariante H, der Functionaldeterminante der ersten Polaren von F, ausgedrückt sei.

Es ergab sich, dass der von Hesse aufgestellte Satz nicht allgemein gültig ist, sondern nur für die binären, ternären und quaternären, sowie die allgemeinen quadratischen Formen, während bereits im Gebiete von fünf homogenen Variabeln ganze Klassen von Formen existiren, deren H identisch verschwindet, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden.

Die Untersuchung von Gordan und Noether basirt auf einer linearen partiellen Differentialgleichung, welcher F und deren Polaren genügen, und deren Coefficienten selbst wieder von einem System partieller Differentialgleichungen abhängen.

Aus der Zahl der Lösungen dieses Systems sind diejenigen auszuscheiden, welche ganze Functionen der Variabeln sind.

---

*) Gordan, Erl. Ber. 1876 S. 89—95; Noether, Erl. Ber. 1876 S. 51—56, Gordan und Noether Math. Ann. X S. 547—568 (1876). Das Hauptmoment des Beweises befindet sich in der letzteren Arbeit auf S. 561.

Für die ternären kubischen und quaternären kubischen Formen war der fragliche Satz von Pasch auf dem Wege von Determinantenrelationen als richtig nachgewiesen worden, Journ. f. Math. LXXX S. 169—176 (1875).

In der erstgenannten Note von Gordan sind durch Betrachtung der Hesse'schen Determinante einer reducibeln Form in Bezug auf deren Factoren, und der zwischen den Polaren bestehenden Relation die ternären Formen überhaupt erledigt.

Man kann ganze Klassen von Formen f in $r (> 4)$ Variabeln, für welche der Hesse'sche Satz nicht mehr gilt, nach Gordan und Noether folgendermassen angeben.

Man bilde sich $r-s \left(s < \frac{r}{2}\right)$ Formen $P_1, P_2, \ldots, P_{r-s}$ von s Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_s$, und setze aus ihnen eine neue Form

$$Q = x_{s+1} P_1 + x_{s+2} P_2 + \ldots + x_r P_{r-s}$$

zusammen. Dann sind die gesuchten Formen f dargestellt in der Gestalt

$$f = \varphi(Q, x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

wo φ in den $x_1, x_2, \ldots, x_s$ homogen zu sein hat (l. c. S. 564).

Insbesondere erhält man sämtliche, den Hesse'schen Satz nicht erfüllenden quinären Formen, in der canonischen Gestalt:

$$f = \varphi(x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_5 P_3, x_1, x_2),$$

wo die P binäre Formen gleicher Ordnung der x_1, x_2 sind.

**) Journ. f. Math. XLII S. 117—124 (1851), LVI S. 263—269 (1859).

Es geschieht dies, indem die letzteren „uneigentlich" rational transformirt werden, d. i. derart, dass die Determinante der Transformation nebst einer Reihe ihrer Minoren identisch verschwindet.

II. D, d, β.

Specielle Formen, deren Natur durch algebraische Differentialgleichungen charakterisirt ist*).

Da die Ueberschiebung zweier Formen durch einen Differentiationsprocess ersetzt werden kann, alle invarianten Bildungen aber auf Ueberschiebungen zurückkommen, so ist theoretisch klar, dass, wenn die invariantive Ausartung einer Form oder eines Formensystems durch das Verschwinden von Invarianten oder das identische Verschwinden von Covarianten festgelegt ist, die Form selbst einer oder mehreren algebraischen Differentialgleichungen zu genügen hat, deren Herstellung freilich in praxi auf dem angedeuteten Wege auf grosse rechnerische Schwierigkeiten stösst.

Noch weit schwieriger aber würden sich so umgekehrt, wenn derartige Differentialgleichungen für specielle Formen gegeben vorliegen, daraus die äquivalenten Invariantenkriterien gewinnen lassen.

Für das vorliegende Problem wird daher ein Satz von Bedeutung**), den Bruno zunächst für binäre Formen bewiesen, der sich aber nach Hilbert und Perrin leicht auf höhere Formen ausdehnen lässt, ein Satz, der jene gegenseitige Ueberführung zu leisten im Stande ist.

Ist nämlich $f(x) = f_0$ eine binäre Form in der nicht homogenen Variabeln x:

$$f_0 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

und bedeuten $f_1, f_2, \ldots$ die mit einfachen Zahlenfactoren dividirten Ableitungen von f nach x:

$$f_1 = \frac{1}{n} f'(x), \quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)} f''(x) \text{ etc.},$$

so lässt sich jede Covariante von f_0 unmittelbar dadurch aus ihrem Leitgliede (Quelle) gewinnen, dass man die a_i durch die f_i ersetzt.

Daraus folgt sofort, dass jede homogene und isobare Function F der f_i eine Covariante von f(x) ist, welche der einen Quellengleichung

*) Vgl. die früheren Bemerkungen auf S. 209 unten.

**) Siehe S. 210.

genügt:

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \cdots = 0.$$

Mit diesem Hülfsmittel hat Hilbert*) gezeigt, wie man z. B. die Kugel-

---

*) Dissert., Königsberg 1885, Math. Ann. XXX S. 15—29 (1887).

Bezüglich anderweitiger specieller Formen und Substitutionsgruppen, soweit sie nicht schon im Texte berücksichtigt worden sind, sei noch Folgendes erwähnt.

Die einfachsten Formen des binären, ternären und quaternären Gebietes sind, mit besonderer Rücksicht auf geometrische Interpretation, auf Trägern erster und zweiter Ordnung, systematisch von Battaglini studirt worden.
Binäre Formen der ersten vier Ordnungen: Rend. Acc. Napoli 1864, 1865, 1866.
Binäre Formen der fünften Ordnung: Batt. G. XIV S. 54—66 (1876).
Binäre Formen von beliebiger Ordnung: Batt. G. IX S. 1—18, 78—86 (1871).
(Eine Anwendung der binären quadratischen Formen auf die Transformation des elliptischen Differentiales findet sich Rom. Acc. L. (4) I S. 653—657 (1885), Batt. G. XXIV S. 128—140 (1886)).

Binäre bilineare Formen: Rom. Acc. L. (4) I S. 691—699 (1885), Batt. G. XXV S. 281—297 (1887). (Diese Formen sind auch eingehend, mit Anwendungen auf die Drehungen des Raumes um einen festen Punkt, von Stéphanos behandelt worden, Math. Ann. XXV S. 299—368, 1883.)
Ternäre Formen zweiter Ordnung: Atti di Napoli III 1867. 2 Abhdl. Batt. G. VIII S. 38—59, 129—156 (1870).
Ternäre Formen dritter Ordnung: Chelini, Coll. Math. S. 27—51 (1881)).
(Combinanten der Form und ihrer Hesse'schen in binärer Behandlung.)
Ternäre Formen beliebiger Ordnung: Batt. G. X S. 152—169, 193—205 (1872).
Ternäre bilineare Formen: Rom. Acc. L. Mem. IX (1880); Acc. L. (3) V S. 24 bis 26 (1881); Batt. G. XXI S. 50—68 (1883).
Ternäre Connexe erster Ordnung und erster Klasse: Atti di Napoli IX 1880, Nap. Rend. XIX S. 110—112 (1881).
Ternäre Connexe zweiter Ordnung und zweiter Klasse: Atti di Napoli VIII 1879, Nap. Rend. XIX S. 316—328 (1881).
Quaternäre bilineare Formen: Rom. Acc. L. Mem. XII 1882, Acc. L. (3) VI S. 40—42 (1882), Batt. G. XXI S. 293—323 (1883).

Wir erwähnen noch Einiges über die kubischen ternären Formen C_3 (siehe S. 152). Poincaré hat die algebraische (und hierauf gestützt die arithmetische) Aequivalenz dieser Formen (und auch der kubischen quaternären) vollständig erledigt (Ec. Pol. L S. 199—253, LI S. 45—91, 1883). Je nach dem Verhalten der beiden Invarianten S und T werden die C_3 in sieben Klassen eingeteilt, und für eine jede die Substitutionen aufgestellt, welche die Form in sich überführen. Hierauf gründet sich die Aequivalenz zweier Formen C_3 und C'_3, die noch besonders für den Fall reeller Coefficienten und Substitutionen discutirt wird.

In einer späteren Arbeit (Ec. Pol. LVI S. 79—142, 1886) werden auch die zerfallenden C_3 einer analogen Behandlung unterzogen.

Gundelfinger hatte schon vorher nachgewiesen, wie sich alle Ausartungen einer C_3 invariantentheoretisch charakterisiren lassen (Math. Ann. IV S. 561 bis 572, 1871, Annali di Mat. (2) V S. 223—236, 1872, vgl. Gordan, Math. Ann. III S. 631—632, 1871): seine Resultate sind für den Fall, dass die C_3 in drei Linearfactoren zerfällt, von Brioschi (Annali di Mat. (2) VII S. 189—192, 1875) und Thaer (Math. Ann. XIV S. 545—556, 1875) vereinfacht worden.

Brioschi hat in Annali di Mat. (2) VII S. 52—60 (1875) den Parallelismus

functionen, und allgemeiner diejenigen hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, welche ganze rationale Functionen in x sind, invariantentheoretisch beherrscht. Soll F eine binäre Form f von x werden, so ist α (resp. β) gleich einer negativen ganzen Zahl $-n$ anzunehmen: n wird dann die Ordnung von f.

Versteht man nun unter φ und ψ die kubische bez. lineare, homogen

---

zwischen einer C_3 und f_4 verfolgt; vgl. damit Hilbert, Journ. de Math. (4) IV S. 249—256 (1888), wo der innere Grund deutlicher hervortritt.

Brioschi macht davon eine interessante Anwendung auf die vorher von Cayley (Quart. J. XIII S. 211—216, 1874) studirte Transformation dritter Ordnung der zu f_4 oder C_3 gehörigen elliptischen Functionen.

Dingeldey hat eine einfache Transformation einer C_3 mit verschwindender Discriminante auf eine canonische Form angegeben (Math. Ann. XXX S. 177—182, 1888); Gross hat die Erzeugung solcher C_3 studirt (siehe S. 262).

Harnack hat die, mit gewissen Zwischenformen der C_3 nach Clebsch verknüpften Differentialgleichungen untersucht (Math. Ann. IX S. 218—240, 1875).

Zur Kenntnis einzelner invarianter Bildungen einer C_3 haben noch Beiträge geleistet Bonsdorff, Helsingfors (1876); Gerbaldi, Atti Tor. XV S. 707—714 (1880); Maisano, Pal. Rend. IV S. 153—158 (1890) u. a.

Wegen der geometrischen Bedeutung der wichtigsten der zu einer C_3 gehörigen Bildungen sei auf Clebsch-Lindemann I. Band 2. Teil, erste Abteil. verwiesen, wo man auch weitere Litteratur nachsehen möge.

Die einfachsten invarianten Bildungen einer kubischen quaternären Form nebst geometrischer Interpretation finden sich in Salmon-Fiedler's Raumgeometrie. V Kap. Art. 317—324.

Bezüglich specieller Substitutionsgruppen (siehe I. A und II. D, a) haben wir zu den an ersterer Stelle gemachten Bemerkungen über orthogonale Gruppen noch einige Zusätze zu machen.

Prym hat die von Cayley (siehe S. 89) gegebene rationale Darstellung für die Coefficienten einer allgemeinen orthogonalen Substitution nter Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ von einander unabhängige Parameter auf die involutorischen Substitutionen ausgedehnt (Gött. Abh. 1892, 42 S.). Die „charakteristische" Gleichung hat dann nur Wurzeln $+1$ und -1. Ist m die Anzahl der ersteren, so beträgt die Anzahl der Parameter 2mn. Es wird eine explicite Formel für die Gesamtheit der zu einer Zahl m gehörigen involutorischen, und im besondern der orthogonal-involutorischen Coefficientensysteme abgeleitet. (Wegen der letzteren vgl. man die auf S. 114*) citirten Arbeiten von Lipschitz und Kronecker.) Eine andere Herleitung und Formulirung der gemeinten Ergebnisse rührt von Cornely her (Dissert. Würzburg, ersch. Göttingen 1892), der übrigens zeigt, wie sich der Uebergang von seinen Formeln zu denen Prym's bewerkstelligen lässt.

Hofmann hat versucht, eine allgemeine Parameterdarstellung der Substitutionen involutorischen Charakters zu geben, welche eine ganze Function zweiten resp. dritten Grades in sich selbst transformiren, Hoppe. Arch. (2) VIII S. 225—268 (1889).

Mit rein geometrischen Mitteln hat H. Wiener allgemein Gruppen involutorischer Verwandtschaften („Spiegelungen") studirt: Leipz. Ber. 1890 S. 13 bis 23, 71—87, 245—267; 1891 S. 424—447.

Auf die Theorien einzelner Involutionen, wie sie mit geometrischen Mitteln Bertini, Weyr u. a. untersucht haben, kann hier nicht eingegangen werden. Das Gleiche gilt von den geometrischen Interpretationen binärer Formen auf rationalen Trägern, bezüglich deren bereits eine umfangreiche Litteratur existirt.

geschriebene Form:

$$\varphi = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, \quad \psi = \frac{3\gamma + 2(n-1)}{3(n-1)} x_1 + \frac{3\beta + n - 1}{3(n-1)} x_2,$$

so setzt sich die lineare Differentialgleichung für F ohne weiteres um in die Ueberschiebungsgleichung:

$$(\varphi, f)_2 + (\psi, f)_1 = 0$$

und vice versa.

Die Kenntnis der Formen φ und ψ lehrt auch sofort die linearen Transformationen finden, welche f in die Gestalt der hypergeometrischen Reihe F bringen. Es sind das genau diejenigen sechs Transformationen, vermöge deren die kubische Form φ den obigen canonischen Typus annimmt.

Durch eine eingehendere Untersuchung lassen sich aber auch die Hülfsformen φ, ψ eliminiren. Es ergiebt sich so, dass zur Charakterisirung der speciellen Form das identische Verschwinden einer gewissen Covariante Γ notwendig und hinreichend ist, die sich ihrerseits in einfachster Weise durch vier bekannte Grundcovarianten darstellen lässt.

Anhang.

II. D, e.

Realitätsfragen.

Es existiren mannigfache, wenn auch ihrem Wesen nach sehr verschiedene Anwendungen der Invarianten, im besondern der binären, auf Realitätseigenschaften von algebraischen Gleichungen und Gleichungssystemen.

Der älteren Periode gehören die klassischen Untersuchungen*) von Hermite und Sylvester an, in denen sämtliche Realitätsunterschiede, welche die Wurzeln einer Gleichung 5. Ordnung darbieten können, durch Invariantenkriterien charakterisirt werden.

Vorher hatte schon Cayley den Fall der Gleichungen 3. und 4.**) Ordnung erledigt.

---

*) Siehe S. 93. Vgl. insbes. noch Hermite, C. R. 1853 I, Jacobi 1847, siehe J. für Math. LIII S. 275—280, Sylvester, Phil. Trans. of L. 1864 S. 579 bis 666, und Cayley VIII Mem. ebda. 1867 S. 513—554.

**) Eine hier gebliebene Lücke hat Noether ausgefüllt, indem er nachweist, wie sich auch die beiden Fälle von vier complexen und vier reellen Wurzeln durch Invariantenkriterien genau von einander trennen lassen (Bruno-Walter, Binäre Formen § 20).

Die auf S. 280 Anm. *) zu erwähnenden Modelle von Rohn stellen sämtliche Realitätskriterien bez. der Wurzeln einer Gleichung 4. Ordnung anschaulich dar.

Das Sylvester-Jacobi'sche Trägheitsgesetz*) der quadratischen Formen ist gleichfalls schon früher erwähnt worden.

Zu Beginn der neueren Periode tritt Schramm**) mit zwei merkwürdigen Arbeiten hervor. Die alte, durch Sturm vollständig beantwortete Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung zwischen gegebenen Grenzen tritt hier, vom Standpunkt der Formentheorie aus, in ein neues Stadium. Die Sturm'schen Functionen, auf deren Zeichenwechsel es ankommt, werden mit gleichem Erfolge ersetzt einmal durch eine Reihe von Covarianten, das anderemal durch eine solche von Invarianten.

Im besonderen ergiebt sich der Satz, dass, wenn alle Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f = 0$ reell sind, diejenigen der gleich Null gesetzten Hesse'schen Covariante imaginär ausfallen und umgekehrt.

Sylvester***) hat den letzteren Satz auf andere Art bewiesen, und zugleich auf alle Covarianten zweiten Grades (in den Coefficienten von f) ausgedehnt.

Andererseits gelang es Laguerre†), die bekannten Processe behufs Separation und Approximation der reellen Wurzeln, unter Einführung invariantentheoretischer Hülfsmittel (der Hesse'schen Covariante u. a.), wesentlich zu verallgemeinern.

In jüngster Zeit hat der Referent††) eine Art Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen $f_{2n+1} = 0$ von ungeradem Grade aufgestellt.

Es existirt eine geschlossene Reihe von Covarianten $f_1, f_2, \ldots, f_n$, derart, dass das System dieser $n+1$ Gleichungen $f = 0$, von Uebergangsfällen abgesehen, eine von der Wahl der Coefficienten unabhängige Anzahl von reellen Wurzeln besitzt.

Wir erwähnen noch kurz einiger Realitätseigenschaften particulärer algebraischer Gebilde, die ihren Ursprung aus geometrischen Fragestellungen genommen haben.

) Siehe S. 87. Zum Abschnitt I. A sei noch erwähnt, dass sich besonders Weierstrass (S. 108)), Sylvester (S. 112*)), Lipschitz (S. 114*)), Stickelberger (S. 115*)) und Voss (S. 115***)) mit der reellen Transformation reeller bilinearer resp. quadratischer Formen beschäftigt haben.

**) Annali di Mat. (2) I S. 259—279 (1867), III S. 41—55 (1869).

***) Journ. f. Math. LXXXVII S. 217—219 (1879).

Bezüglich der Hesse'schen Covariante vgl. noch Gerbaldi, Pal. Rend. III S. 22—26, Schoute ebda. S. 160—164 (1889).

†) Laguerre hat seine diesbezüglichen, in den C. R. von 1879, 1880, 1881, 1882 mitgeteilten Untersuchungen zusammengefasst in der Abhandlung Journ. de Math. (3) IX S. 99—147 (1883).

††) Gött. N. 1891 S. 272—286.

Derartige Ergebnisse stellen sich unter anderm immer dann mit Notwendigkeit ein, wenn man den Bereich der Variabeln einer Form systematisch in das complexe Gebiet verlegt.

Dahin gehört also vor allem die Interpretation der complexen Variabeln $z = x + iy$ auf der Kugeloberfläche, wie sie nach Klein*) auf Grund der Thatsache eingeführt ist, dass die lineare Transformation von z ihren Ausdruck in der projectivischen Massgeometrie auf der Kugel findet.

Stellt man nun die Gruppe der linearen Transformationen von z auf, welche einen regulären Körper mit sich zur Deckung bringen, und unterwirft denselben einen beliebigen Punkt z der Kugel, so ist leicht zu erkennen, welche von diesen Werten z reell sind; im Falle des Ikosaeders hat man z. B. stets vier solche**).

Wedekind hat in diesem Sinne das Doppelverhältnis von vier Punkten auf der Kugel studirt: es ergiebt sich wiederum, dass dasselbe nur dann reell sein kann, wenn die vier Punkte zugleich in einer Ebene liegen***).

Von besonderer Wichtigkeit für die Geometrie der ebenen oder räumlichen Curven sind die (binären) Gleichungen, von denen die singulären Stellen der Curven abhängen.

Indem Brill†) die Discriminante von solchen Gleichungen in ihre irreducibeln Factoren spaltete und, je nachdem die Vielfachheit der letzteren eine gerade oder ungerade ist, die Realitätsveränderungen der Wurzeln bei einem Durchgange der Discriminante durch Null angab, gelang es ihm, auf rein algebraischem Wege die Richtigkeit einer gewissen Relation zwischen Singularitätenanzahlen darzuthun, welche Klein††) zuvor vermöge geometrischer Anschauungsmittel gefunden hatte.

---

*) Siehe etwa Klein's Erlanger Programm (1872). Neuerdings haben Segre und Juel systematisch die projectivischen Eigenschaften der einfachsten Gebilde in Ebene und Raum unter der Voraussetzung untersucht, dass sowohl die Coordinaten der Punkte, wie die Coefficienten der Substitutionen complexe Grössen sind. Segre, Atti di Torino XXV (1890, Jan., 28 S., März, 30 S., April, 23 S., Nov., 40 S.), Math. Ann. XL S. 413—467 (1892); Juel, Acta Math. XIV S. 1—30 (1890).

**) Math. Ann. IX S. 183—208 (1875).

***) Math. Ann. IX S. 209—217 (1875).

†) Math. Ann. XVI S. 345—408, insbes. § 7.

††) Math. Ann. X S. 199—209 (1876). Vorher hatte schon Zeuthen die Realitätsverhältnisse der 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung, sowie ihrer 24 Wendetangenten eingehend untersucht (Math. Ann. VII S. 410—432, 1874). Insbesondere ergiebt sich als Maximalanzahl der reellen Wendungen Acht.

Eine Realitätsbetrachtung anderer Art bezieht sich auf die Anzahl der reellen Züge einer algebraischen Curve nter Ordnung. Für die Ebene hat Harnack gezeigt (Math. Ann. X S. 189—198, 1876), dass jene Anzahl höchstens

Eine entsprechend ausgeführte Ausdehnung auf Raumcurven rührt vom Referenten*) her.

II. D, f. Ueber eine Anwendung der Formentheorie auf die Zusammensetzung endlicher continuirlicher Transformationsgruppen.

Die Invariantentheorie bietet, wie Lie wiederholt hervorgehoben hat, die mannigfaltigsten Beziehungen zur Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Einen typischen Fall dieser Art hat Engel**) untersucht. Es handelt sich dabei um die Bestimmung aller „Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen".

Eine solche ist bekanntlich definirt durch die Relationen:

$$(X_i X_k) = X_i(X_k f) - X_k(X_i f) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f,$$

wo die Constanten c ausschliesslich den Bedingungen zu genügen haben:

$$c_{iks} = -c_{kis}; \quad C_{ikjs} \equiv \sum_1^r {}^\nu (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0$$
$$(i, k, j, s = 1, \ldots, r).$$

Die $X_s = X_s f$ sind die (linear unabhängigen) infinitesimalen Transformationen der Gruppe, die beliebig linear transformirt werden können, ohne deren Zusammensetzung zu ändern.

---

gleich $p+1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ ist, und dass dieses Maximum reeller Züge auch realisirt werden kann. Hilbert hat nachgewiesen, dass bei Raumcurven jene Zahl zu ersetzen ist durch $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ resp. $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und dass wiederum Curven mit soviel Zügen existiren. (Math. Ann. XXXVIII S. 115—138, 1891).

Klein hat in seinen neuesten Vorlesungen (Sommersemester 1892) über Riemann'sche Flächen die Realität der sog. „Symmetrielinien" verfolgt.

Weitere Sätze über Zahl und Anordnung der reellen Züge ebener algebraischer Curven mit Doppelpunkten rühren von Hulburt her (Am. J. XIV S. 246—250, 1892).

Dass reelle ebene algebraische Curven n ter Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ reellen (und nicht isolirten) Doppelpunkten existiren, lässt sich durch allmählichen Uebergang von einer Curve n ter zu einer solchen (n+1) ter Ordnung zeigen.

Im übrigen sind die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von Singularitätengleichungen noch wenig bekannt.

*) Gött. N. 1891 S. 1—13. Als Beispiel ist eine rationale Raumcurve 4. Ordnung hinsichtlich der Realitätsverhältnisse ihrer Singularitäten studirt worden. Von Rohn sind Faden-Modelle construirt, welche jene Verhältnisse (insbes. für die zugehörige abwickelbare Fläche) illustriren. Vgl. zwei Noten in den Leipz. Ber. von 1891, 1892.

**) Leipz. Ber. 1886 S. 83—96.

Eine weitere Durchführung der von Engel angeregten Untersuchung erscheint sehr wünschenswert.

Schreibt man daher die Definitionsgleichungen der Zusammensetzung für zwei beliebige lineare Combinationen der X:

$$F(x, y;\ X) \equiv \left(\sum_1^r x_i X_i,\ \sum_1^k y_k X_k \right) = \sum_{iks}^{1 \ldots r} c_{iks} x_i y_k X_s,$$

so repräsentirt die trilineare Form F — oder auch die Gleichung $F = 0$ — geradezu die Zusammensetzung der Gruppe in dem Sinne, dass alle Formen, die aus F durch lineare Transformation der x, y; X hervorgehen (wo die X den cogredienten x, y contragredient gegenüberstehen), die nämliche Zusammensetzung liefern.

Man hat demnach nur noch die Form F invariantentheoretisch zu untersuchen, ihr volles System aufzustellen u. s. f.

Auf Grund der Beziehungen zwischen den c ist die Form F als die allgemeinste trilineare Form charakterisirt, für welche die beiden Covarianten

$$\sum_{iks}^{1 \ldots r} (c_{iks} + c_{kis}) x_i y_k X_s, \qquad \sum_{ikjs}^{1 \ldots r} C_{ikjs} x_i y_k z_j X_s$$

identisch verschwinden. Die erste Bedingung sagt einfach aus, dass F eine, hinsichtlich der x, y alternirende, bilineare Form vorstellt.

Was die Bedeutung der zweiten Bedingung angeht, so fasse man für den Augenblick $F = 0$ als das „Symbol" einer infinitesimalen Collineation auf:

$$\sum_1^r (x_i X_i) + \partial t F = 0.$$

Dann erzeugen diese letzteren die sogenannte „adjungirte" Gruppe der gegebenen, d. i. eine projectivische Gruppe, welche mit der gegebenen isomorph ist.

Das Verschwinden der zweiten Covariante erhält jetzt den Inhalt, dass „jede infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe die Form F invariant erscheinen lässt".

Als wichtigste Anwendung dieser Interpretation ergiebt sich, dass „jede lineare Mannigfaltigkeit der x, welche eine Covariante von F ist, eine „invariante" Untergruppe der ursprünglichen darstellt".

Wegen der weiteren gruppentheoretischen Folgerungen mag auf die Note von Engel selbst verwiesen sein.

Zusätze.

Seite Anm.

82 *) Z. 13. Vgl. die Darstellung in Gordan-Kerschensteiner's „Determinanten", Leipzig 1885, wo insbesondere der Resultante als Functionaldeterminante eine eingehende Behandlung zu Teil wird.

82 ***) Später haben auch Escherich (Wien. Denkschr. XLIII, 1880), Gegenbauer (ebda. XLIII S. 15—32, 1881) und Zajaczkowski (Warschau, 1881) die von Gasparis, Armenante, Padova, Zehfuss u. a. weiter ausgebildeten Determinanten höheren Ranges zur Bildung von Invarianten verwertet.

87 *) Vgl. noch Sylvester, Phil. Mag. (4) IV S. 138 ff. (1852); Hermite, C. R. 1852 II; Jacobi (1847), s. J. für Math. LIII S. 275—280 (1857).

87 ††) Vgl. die Erklärungen der wichtigsten unter den neu eingeführten termini bei Cayley, Papers IV S. 594—608 (Abdruck aus der Encyclop. Brit. von 1860).

88 ***) Deruyts, Belg. Bull. (3) XXII S. 11—23 (1891).

Eine directe Ausdehnung des Reciprocitätsgesetzes ist, wie leicht ersichtlich, nur auf höhere Formen speciellen Charakters möglich. Der Verf. beschränkt sich auf die in lineare Factoren zerlegbaren Formen. Der Gedankengang ist im wesentlichen analog dem ursprünglich von Hermite eingeschlagenen.

90 **) Vgl. dazu die kritischen und litterarischen Noten, welche Cayley selbst in der neuen Ausgabe zugefügt hat.

93 **) Vgl. Seite 89, Schluss der ersten Anm. Die Hermite-Brioschi'sche Transformation des elliptischen Integrals 1. Gattung, welche dasselbe auf die typische Normalform $\frac{dz}{\sqrt{z^3 - \frac{1}{2} g_2 z - \frac{1}{3} g_3}}$ bringt, ist vom 4. Grade in der ursprünglichen Variabeln. Pittarelli hat die Transformation, mit Anwendung von Polarenprocessen, durch eine nur lineare ersetzt (Rom. Acc. L. R. (4) IV S. 703—705, 1888). Derselbe Verf. hat auch solche höheren Transformationen untersucht, vermöge deren im transformirten Integral die Invariante g_2 resp. g_3 verschwindet (ebda. S. 509—513).

98 ***) Unter den späteren Anwendungen, welche Clebsch von der Invariantentheorie auf die Geometrie gemacht hat, ist besonders merkwürdig diejenige auf das sog. „Charakteristikenproblem bei Kegelschnitten", Math. Ann. VI S. 1—15 (1872). Clebsch's Behandlung

Seite Anm.

ist nicht einwandsfrei, vgl. die neueste Arbeit von Study (Math. Ann. XL S. 563—578, 1892), der die Methoden seines Buches mit Erfolg auf das Problem anwendet.

99 †††) Die „Fortschritte der Mathematik" wurden vom II.—X. Bande von C. Ohrtmann, F. Müller und A. Wangerin herausgegeben, vom XI.—XIV. Bande von Ohrtmann, unter Mitwirkung von Müller und Wangerin, vom XV.—XIX. Bande von M. Henoch und E. Lampe, unter Mitwirkung etc., endlich vom XX. Bande an von Lampe, unter Mitwirkung etc.

104 *) Vgl. auch noch den Beweis von Kronecker, Berl. Ber. 1889 S. 609 u. flgde.

105 *) Das von Gordan daselbst berechnete System einer gewissen doppelt-binären Form dient bei Klein-Fricke „Modulfunctionen" II S. 127 ff. (1892) zur Aufstellung von Modulargleichungen. Ist nämlich τ ein Hauptmodul bei Transformation $n$ter Ordnung, τ der transformirte, so ist in der That die linke Seite $f(\tau', \tau)$ der Modulargleichung, wenn man noch homogen macht, als eine doppelt-binäre Form anzusehen, welche sich bei den Simultan-Substitutionen einer bestimmten endlichen Gruppe nicht ändert, somit als ganz-rationale Function der Formen des bez. vollen Systems herstellbar ist. Es sind hier nur die Fälle der Cogredienz und Contragredienz zu unterscheiden.

Das Entsprechende gilt im ternären Gebiete für die sog. „Modularcorrespondenzen" (l. c. S. 690 ff.).

Auch hier kommt nur Cogredienz und Contragredienz der beiden ternären Variabelnreihen in Betracht. Beispielsweise kommt nunmehr das auf S. 284 dieses Berichtes (Zusatz zu „S. 130 Z. 6 v. unten") erwähnte volle System Gordan's zur Geltung.

Vgl. noch Klein's Ikosaeder S. 232 ff. sowie die Leipziger Dissertationen von Fischer (1885) und Fiedler (1885) oder auch Wolf. Z. XXX S. 129—229).

106 ††) Siehe z. B. die Anwendungen auf „das Problem der kleinen Schwingungen" bei Pockels „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0 \ldots$" Leipzig 1891, S. 44—50, sowie solche auf „gedämpfte" Schwingungen in dem Werke von Routh „Dynamics of a system of rigid bodies" (1890) Part. VII.

108 ***) Mit Hülfe der Elementarteiler hat neuerdings Frobenius auch die Aequivalenz zweier biquadratischer binärer, sowie zweier quadrato-quadratischer binärer Formen erledigt (Journ. f. Math. CVI S. 125 bis 188, 1890, §§ 4, 5, 14, siehe auch oben S. 253***).

Die Aequivalenz zweier biquadratischer binärer Formen, sowie diejenige einer solchen mit sich selbst wird bei Klein direct mit Hülfe irrationaler Invarianten (Zähler und Nenner der sechs bez. Doppelverhältnisse) behandelt (Klein-Fricke, Modulfunctionen, Leipzig 1890, §§ 4, 5, 6).

Die simultane lineare Transformation zweier Bilinearformen in ihre „reciproken" ist von Segre studirt worden (Batt. G. XXII S. 29 bis 33, 1884).

In nahem Zusammenhange mit den Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker steht eine solche von Study, welcher solche Eigenschaften der Bilinearformen betrachtet, die aus der Theorie der recurrirenden Reihen entspringen und sich hierbei auf ein System irrationaler Invarianten jener Formen stützt (Wiener Monatshefte II S. 1—32, 1891).

Die Aequivalenz einer bilinearen Form, von je drei homogenen Variabeln, mit sich, haben Poincaré und Picard für den Fall unter-

Seite Anm.

sucht, dass die entspr. Variabeln und Coefficienten conjugirt complexe Grössen sind (C. R. XCVIII S. 344—352, resp. C. R. XCVIII S. 416—417, 1884).

Es sei noch einer geometrischen Anwendung der Elementarteiler von Killing (Dissert. Berlin 1872) gedacht, welcher mit Hülfe derselben die Schnittverhältnisse zweier Flächen zweiter Ordnung vollständig discutirt.

111 ***) In einer neuesten Arbeit (Progr. der 4. Städt. Höh. Bürgerschule Berlin, Ostern 1892) stellt Rosenow als Anwendung des Früheren die Normalformen auf für die 472 verschiedenen „Klassen" eigentlicher Bilinearformen von 10 Variabelnpaaren bei congruenter Transformation der Variabeln.

114 **) Vgl. Forsyth, Theory of differential equations I, Cambridge 1890. Chapter XI.

118 †) Vgl. Study, Gött. N. 1889 S. 237—268, Leipz. Ber. 1889, S. 177 bis 228. (Siehe auch noch Wien. Monatshefte I, 1890, II, 1891.)

Es sei hier noch erwähnt, dass Stéphanos die Lehre von den complexen Zahlsystemen mit formentheoretischen Hülfsmitteln untersucht hat. Athen, Jubelband (griechisch), 1888.

Die Thatsache, dass jedem Zahlsysteme eine lineare Gruppe mit linear auftretenden Parametern entspricht, ist zuerst von Poincaré bemerkt worden (C. R. XCIX S. 740—742, 1884).

118 †††) Die ausführlichere Arbeit Bolza's findet sich im Am. J. X S. 47 bis 70 (1887).

122 oben. Dass überhaupt zu jeder endlichen Gruppe von linearen Substitutionen stets ein volles System von Invarianten gehört, geht erst aus dem auf S. 145 aufgeführten Satze von Hilbert hervor.

123 ††) Erweiterungen der Klein'schen Betrachtungen auf höhere Räume finden sich bei Biermann (Wien. Ber. XCV S. 523—548, 1887), der lineare Substitutionen von zwei complexen Variabeln im Raume von fünf Dimensionen mit den bez. regulären Körpern in Verbindung bringt, sowie bei Goursat (C. R. CVI S. 1786—1789, 1888), der mittels der regulären Körper im Raume von vier Dimensionen das Problem der Aufsuchung der linearen, orthogonalen Substitutionsgruppen endlicher Ordnung von vier Variabeln vereinfacht.

Vgl. auch Clebsch-Lindemann II, 1, Abt. 3, IX, X.

Mit den reellen Bewegungsgruppen überhaupt hat sich Jordan eingehend beschäftigt: Annali di Mat. (2) II S. 168—215, 320—345 (1869). Eine vollständige Discussion derjenigen von diesen Gruppen, bei welchen aus den erzeugenden Bewegungen nicht beliebig kleine Ortsveränderungen abgeleitet werden können, findet sich bei Schönflies, Math. Ann. XXVIII S. 319—342, XXIX S. 50—80 (1887); XXXIV S. 172—203 (1889). Die letztgenannte Arbeit behandelt solche Gruppen von endlichen Transformationen des Raumes in sich, bei denen eine beliebige Raumfigur stets in eine ihr congruente oder symmetrisch gleiche übergeht.

127 †) Vgl. auch Halphen, Sav. étr. T. XXVIII (1880—1883).

128 ††) Brioschi hat auch den Fall einer f_8 untersucht, deren vierte Ueberschiebung über sich selbst mit der ursprünglichen Form, bis auf einen constanten Factor, übereinstimmt, und ist dabei ebenfalls zu der Form der Schwarz'schen Differentialgleichung dritter Ordnung gelangt (Chelini, Coll. Math. S. 213—219, 1881; C. R. XCVI S. 1689 bis 1692, 1883).

Seite Anm.

Die Arbeiten stehen in naher Beziehung zu der auf S. 177***) citirten.

129 **) Bei Valentiner bleiben schliesslich drei endliche ternäre Gruppen übrig, eine G_{72}, die durch „Erweiterung" der binären Tetraedergruppe entsteht, eine G_{360}, die analog aus der binären Ikosaedergruppe hervorgeht, und die eigentlich ternäre G_{168} des Textes. (Letztere ist, nebenbei bemerkt, als Gruppe von 7 Buchstaben, zuerst 1858 von Kronecker entdeckt worden.) Merkwürdigerweise ist indessen die zweite Gruppe G_{216} des Textes bei ihm keine eigentlich ternäre. (Siehe bei ihm S. 222.)

Valentiner stützt seine Entwickelungen auf die Wiederholungen von Substitutionen. Das Kriterium dafür, dass eine Substitution von n Veränderlichen nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution liefert, ist, wie schon Lipschitz Acta Math. X S. 137—144 (1887) nachgewiesen hatte, dass ihre charakteristische Gleichung nur μte Einheitswurzeln hat und dass ihre Elementarteiler von der ersten Ordnung sind. (Vgl. für die ternären orthogonalen Substitutionen Bermbach, Diss., Bonn 1887.)

Valentiner zeigt dann vor allem, dass die Ordnung einer endlichen Gruppe entweder das kleinste gem. Vielfache der Ordnungen ihrer „Fundamentalsubstitutionen" ist, oder aber das 2- resp. 3- resp. 6-fache desselben (S. 226 daselbst).

Es sei noch erwähnt, dass, abstract genommen, die Ikosaedergruppe G_{60} und die G_{168} des Textes, bis zur Ordnung 200 hin die einzigen einfachen Operationen-Gruppen von zusammengesetzter Ordnungszahl sind (Hölder, Math. Ann. XL S. 55—88, 1892), sowie dass Askwith alle möglichen Gruppen von Substitutionen aufgestellt hat, welche sich aus 3, 4, 5, 6, 7 Buchstaben bilden lassen (Quart. J. XXIV S. 111—167, 1889). Die G_{168} fehlt indessen bei ihm.

130 *) Die bei Klein, Rohn u. a. auftretende Gruppe G_{16} von sechzehn vertauschbaren involutorischen Transformationen, durch welche die Punkte oder Ebenen des Raumes zu Kummer'schen Configurationen zusammengeordnet werden, ist eingehend (unter Aufstellung des vollen Systems u. s. f.) von Study untersucht worden (Leipz. Ber. 1892 S. 122—161).

Diese Gruppe dient indessen dem Verf. nur als ein Beispiel einer systematischen Theorie, welche die formentheoretische Behandlung endlicher Gruppen linearer Substitutionen auf gewisse Reihenentwickelungen gründet (siehe den Text S. 218), wobei dem Apolaritätsbegriff eine leitende Rolle zufällt. Das bemerkenswerteste Resultat ist, dass zur Bestimmung der Invarianten einer solchen Gruppe im ungünstigsten Falle nur reine Gleichungen aufzulösen sind. (Vgl. oben bei Valentiner.)

130 **) Die von Maschke (siehe S. 132) gelöste Aufgabe, das volle Formensystem der G_{216} aufzustellen, führte daher unmittelbar auf die andere zurück, das volle Combinantensystem einer C_3 und ihrer Hesse'schen Form abzuleiten (Math. Ann. XXXIII S. 328 u. flgde.).

Mit den im Texte erwähnten Arbeiten von Witting und Maschke vgl. man noch Burkhardt, Math. Ann. XXXVIII S. 161—224 (1891).

130 Zeile 6 v. unten. Das „volle System" von f in dem Sinne, dass auch die Substitutionen der contragredienten Variabeln mitberücksichtigt werden, also auch die Contravarianten und Zwischenformen mitumfassend, ist erst von Gordan aufgestellt worden, Math. Ann. XVII S. 217—233, siehe insbes. die Tafel am Schlusse der Abh. Vgl. S. 153 des Textes.

Seite Anm.

130 †) Die Coefficienten der beiden Gleichungen 7. Ordnung bilden nach Gordan das volle System der bez. „Affectfunctionen“, während ein Teil davon ausreicht, um als associirtes System derselben zu dienen (Math. Ann. XX S. 528). Auf die allgemeinen Bemerkungen, welche Gordan daselbst über den Begriff des Affectes, in seiner Beziehung zur Invariantentheorie, macht, sei ganz besonders hingewiesen.

132 Zeile 4 v. u. Mit den im Texte berührten Untersuchungen, soweit sie sich auf binäre und ternäre endliche Gruppen beziehen, steht in engem Zusammenhange ein Cyklus von Arbeiten Autonne's:

1883; C. R. XCVII S. 567—570.

1884; C. R. XCVIII S. 565—567, IC S. 646—649.

1885; C. R. CI S. 53—56; Journ. de Math. (4) I S. 431 –454.

1886; C. R. CII S. 313—316, CIII S. 1176—1178; Journ. de Math. (4) II S. 49—104.

1887: C. R. CIV S. 767—770, 1422—1425, CV S. 267—270, 929 bis 932; Journ. de Math. (4) III S. 63—85.

1888; Journ. de Math. (4) IV S. 177—247, 407—464,

der sich die Ermittelung aller endlichen Gruppen und Untergruppen von Cremona-Transformationen (der Ebene), insbesondere der quadratischen und kubischen, zum Ziel gesetzt hat. Vgl. auch S. Kantor, Wien. Denkschr. 1882, 46 S.

142 Text, Z. 6 v. unten. Der fragliche Satz stammt von Gordan her: Math. Ann. VI S. 23—28 (1875), Vorl. I § 15.

142 **) Es sei hier noch eines eigenartigen Endlichkeitsbeweises (für binäre Formen) von Cayley gedacht, der sich auf die Benützung irrationaler Invarianten stützt, wobei allerdings ein wesentlicher Hülfssatz unbewiesen bleibt (Quart. J. XVII S. 137—147, 1882).

146 ***) Einen symbolischen Beweis für die Hilbert'sche Methode der Ableitung von invarianten Bildungen (im ternären Gebiete) hat H. White geliefert (Am. J. XIV S. 253—290, 1892).

149 **) Wegen weiterer Resultate der besprochenen Arbeit Hilbert's, insbes. bezüglich des fundamentalen Begriffes „der charakteristischen Function eines Moduls“ sehe man den ausführlichen Bericht des Referenten in den Fortsch. d. Math. Bd. XXII.

149 ***) In einer Fortsetzung (Gött. N. 1892 No. 12, 11 S.) löst Hilbert die wichtige, im Texte bezeichnete Aufgabe allgemein, für eine Reihe von Urformen ein System von Invariantenbildungen aufzustellen, durch welche sich alle übrigen als ganze algebraische Functionen ausdrücken lassen. Die Aufgabe wird darauf zurückgeführt, alle Nullformen m^{ter} Ordnung von n Variabeln (d. h. solche, deren Invarianten sämtlich verschwinden) aufzufinden, und dies gelingt wiederum mittels einer gewissen canonischen Gestalt derselben.

(Beispielsweise sind die ternären canonischen Nullformen bis zur sechsten Ordnung berechnet worden.)

Danach bietet die Aufstellung „voller Systeme“ keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr. Die ausführlichere Arbeit wird demnächst in den Math. Ann. erscheinen.

151 ***) Vgl. hiermit noch die Arbeiten von Maisano: Rom Acc. L. Mem. (3) XIV, 1883, XIX, 1884.

153 †††) Die Aufgabe, das volle System zweier C_2 zu bilden, wird von Perrin auf die vorher von ihm gelöste (S. 152 †††)) zurückgeführt, das volle System von vier binären Formen zu bilden, von denen zwei linear und zwei quadratisch sind.

Seite Anm.

Das Entsprechende gilt für die Syzygien. Vgl. einen ausführlicheren Bericht des Referenten in den Fortsch. d. Math. Bd. XXII.

Das zu Grunde gelegte Princip ist wohl zuerst von Brioschi für eine C_4 verwendet worden (Annali di Mat. (2) VII S. 202—216, 1876), und tritt auch als fundamental in den Untersuchungen von Brill (S. 272) und Forsyth (S. 158) auf.

Dasselbe lässt sich einfach dahin formuliren, dass, wenn etwa eine ternäre Form $C_n(x_1, x_2, x_3)$ nach Potenzen von x_3 angeordnet wird, so sind die invarianten Bildungen von C_n gewisse Aggregate von (binären) simultan-invarianten Bildungen jener Coefficienten.

Uebrigens stellt jeder der vier genannten Autoren dieses Princip unabhängig von den andern auf.

Wegen des Systems zweier C_2 vgl. noch Osgood, Am. J. XIV S. 262—273 (1892).

154 *) Neuerdings ist es Mertens auch gelungen, das volle System (von 47 Bildungen) dreier F_2 explicite aufzustellen. (Wien. Ber. 1890 S. 367—384.)

156 **) Eine eingehende Untersuchung der typischen Darstellung einer f_5, unter Zugrundelegung von Clebsch's associirten Formen, rührt von Cayley her: X. Mem. Phil. Trans. 1878 S. 603—661.

163 *) Vgl. hierher noch Bruno, Am. J. V S. 1—25 (1882), Burkhardt, Diss., München 1887, White, Nova Acta LXII No. 2 S. 43—128, sowie die Citate im Texte S. 185, und die zusammenhängende Darstellung bei Halphen, Traité des fonctions elliptiques T. II Paris, 1888.

173 †) Vgl. noch Hammond für die f_6: Am. J. VII S. 327—344 (1885), und für das System (f_2, φ_3): Am. J. VIII S. 138—155 (1886).

174 †) Vgl. auch Hammond, Am. J. VIII S. 104—126 (1886).

182 *) Die Invarianten der f_6 sind von Bolza durch die Nullwerte der zugehörigen Θ-Functionen ausgedrückt worden (Math. Ann. XXX S. 478—495).

185 *) Eine andere Erweiterung auf Formen f, welche in zwei binären Variabelnreihen quadratisch sind, stammt von Frobenius her (Journ. f. Math. CVI S. 125—189, 1890). f besitzt zwei Discriminanten (d. h. biquadratische binäre Formen mit gleichen Invarianten): umgekehrt wird f gesucht, wenn diese Discriminanten gegeben sind. Man hat im allgemeinen zweifach unendlich viele Lösungen der Aufgabe.

188 ***) Vgl. auch Study, Leipz. Ber. 1890 S. 172 u. flgde.

210 *) Vgl. auch Bôcher, Göttinger Preisarbeit 1891, Kap. II.

215 ***) Eine eigenartige Darstellung der Gordan'schen Reihenentwickelung hat Baker gegeben. Mess. (2) XIX S. 91—96 (1889).

219 *) Von den älteren Sylvester'schen Sätzen über Substitutionen homogener Differentialquotienten hat Sharp eine interessante Anwendung gemacht (Proc. L. M. S. XIII S. 216—239, 1882), indem er nachweist, wie sich die Invariantennatur, insbesondere gegenüber orthogonalen Substitutionen, der meisten in der mathematischen Physik auftretenden Differentialausdrücke jenem Principe unterordnet. Siehe auch Text S. 242.

Study hat die Differentiation nach den Coefficienten einer orthogonalen Substitution verwendet zur Bildung von Invarianten endlicher Gruppen. (Leipz. Ber. 1892 S. 122—161.)

220 ***) Wegen des durch Clebsch entdeckten Zusammenhanges der Connexe mit den Differentialgleichungen und der daraus folgenden Möglich-

Seite Anm.

keit, die letzteren nach algebraischen Principien zu behandeln, sehe man etwa Clebsch-Lindemann I. Bd. 2. Teil. 7. Abth.

226 †) Bez. der Gleichungen 5. Ordnung vgl. die Darstellung bei Clebsch-Lindemann II, 1, Abt. 3, No. XI.

231 **) Halphen macht besonders von dem Satze Gebrauch, dass eine Differentialinvariante durch Differentiation nach der unabhängigen Variabeln x wieder in eine solche übergeht. Vgl. Sylvester Am. J. IX S. 297—352 (1887), Elliott, Mess. (2) XIX S. 7—14 (1889).

237 **) Vgl. auch Griffiths Ed. Times LI S. 137—149 (1889).

245 **) Wir entnehmen dem citirten Werke die Anm. auf S. 287: „Lie veröffentlichte seine schon im Jahre 1874 ausgeführte Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene im Jahre 1884 im Archiv for Math. Doch findet sich seine Bestimmung aller projectiven Gruppen der Geraden schon 1880 in den Math. Ann. Bd. XVI.“ Die Bestimmung der projectiven Gruppen des Raumes hat Lie im Jahre 1878 durchgeführt, indessen bisher nur einige Bruchstücke darüber publicirt; die vollständige Discussion wird in dem dritten Bande von Lie-Engel“ enthalten sein. Die Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes hat Knothe aufgestellt, Dissert., Leipzig 1892.

249 *) le Paige hat den Begriff der Seminvariante ausgedehnt auf binäre Formen mit mehreren Variabelnreihen, die auch verschiedenen Transformationen unterworfen werden können (Belg. Bull. (3) II S. 40—53, 1881).

Druckfehler.

(Ohne nähere Angabe bedeutet Z. Zeile des Textes.)

Seite	88	Anm. ***) Z. 3.	Statt 1892 ist zu lesen 1891.
-	94	Z. 7 von oben.	Statt: „einer binären Form“ ist zu lesen: „von binären Formen“.
-	101	Letzte Z. der Anm.	Hinter „Fricke“ ist zu ergänzen „Bianchi, Stouff“.
-	103	Z. 13 von unten.	Statt: „man unterwirft“ ist zu lesen „unterwirft man“.
-	106	- 11 - unten.	Es fehlt die Bezeichnung I. A, sowie darüber der Haupttitel: I. Aequivalenz.
-	107	- 10,11 - unten.	Hinter „Reduction“ und „Form“ gehört je ein Komma.
-	109	- 5 - unten.	Vor „1868“ gehört ein Komma.
-	118	- 6 - oben.	Statt „verwendete“ ist zu lesen „verwendeten“.
-	118	- 11 - oben.	Es fehlt der Haupttitel: I. B. Weitere Formen.
-	123	- 7, 11, 14.	Das Zeichen †) ist zu streichen, dagegen ††) in †), und †††) in ††) zu ändern.
-	127	- 2 - unten.	Statt „Gordan“ ist zu setzen „Gordan“.
-	133	Anm. ***) Z. 1.	Statt r_n ist zu lesen r^n.
-	144	Z. 1 von oben.	Der Buchstabe „G“ ist zu streichen.
-	156	Anm. ***) Z. 4.	Statt „XLI S. 1—24“ ist zu lesen: XL S. 503 bis 526.
-	158	Z. 11 von unten.	Anstatt „$F = F_n(x_1, x_2, x_3)$ etwa“ ist zu lesen „etwa $F = F_n(x_1, x_2, x_3)$“.
-	160	- 2 - oben.	Hinter „y“ gehört ein Komma.
-	-	- 2 - unten.	Statt „β^x“ ist zu lesen „β_x“.
-	161	- 12 - oben.	Statt: „Tschirnhaus“ ist zu lesen: „Tschirnhausen“.
-	190	- 7 - oben.	Das Wort „einer“ ist zu streichen.
-	191	- 2 - oben.	Statt „σ“ ist zu lesen „b“.
-	194	- 13,14 - oben.	Statt „von Study,“ ist zu lesen „, von Study“.
-	203	- 5 - oben.	Statt „b_y“ ist zu lesen „b_x“.
-	221	- 11 - unten.	Statt „.“ ist zu lesen „= 0.“.
-	223	- 13 - unten.	Statt „m“ ist zu lesen „2n“.
-	245	- 4 der Anm. **)	Die Zahl „4“ ist zu streichen.
-	254	- 2 der Anm. ***) von unten.	Es ist einzufügen: „(2) XLVIII S. 530--549 (1879)“.
-	267	- 3 der Anm. †).	Statt „(1854), Cambr. a. Dublin M. J. IX S. 32“ ist zu lesen „(1850), Cambr. a Dublin M. J. V“.

Selbständig erschienene Monographien über Invariantentheorie.

G. Salmon. Lessons introductory to the modern higher algebra. Dublin I ed. 1859; IV ed. 1885. (Hauptsächlich binäre Formen.)

In deutscher Bearbeitung unter dem Titel:

G. Salmon. Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. Leipzig. I. Aufl. 1863; II. Aufl. 1877.

F. Brioschi. Teorica dei Covarianti. Roma 1861. (Binäre Formen.)

W. Fiedler. Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig. 1862.

A. Clebsch. Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig. 1872.

A. Clebsch. Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. I. Band, 1. Teil. Leipzig 1875. 3. Abteilung. (Elemente der binären und ternären Formen.)

Faà di Bruno. Théorie des formes binaires. Turin 1876.

In deutscher Bearbeitung unter dem Titel:

Faà di Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von M. Noether deutsch bearbeitet von Th. Walter. Leipzig. 1881.

P. Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausgegeben von G. Kerschensteiner. I. Band. Determinanten. Leipzig. 1885. II. Band. Binäre Formen. Leipzig. 1887.

G. Rubini. Teoria delle forme in generale, e specialmente delle binarie. Parte prima. Esposizione dell' algoritmo fondamentale di questa teoria. Lecce. 1886.

E. Study. Methoden zur Theorie der ternären Formen. Leipzig. 1889.

Toledo y Zulueta. Elementos de la teoria de las formas. Madrid. 1889.

J. Deruyts. Essai d'une théorie générale des formes algébriques. Bruxelles. 1891.

Inhaltsverzeichnis.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Zweiter Band.
1891—92.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für 1891—92,
kurze Berichte über einzelne der für die Versammlung in Nürnberg
bestimmten Vorträge, sowie einen ausführlichen

Bericht
über die Entwickelung der Lehre
vom Erddruck,

von Dr. **Fritz Kötter** in Berlin.

Mit zwei Figurentafeln.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Cantor in Halle a. S. **W. Dyck** in München **E. Lampe** in Berlin.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1893.

Inhalt.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Kurze Berichte über einzelne der für Nürnberg bestimmten Vorträge.

III. Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck.

Chronik
der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Vorbericht.

Auf der vorjährigen Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Halle war beschlossen worden, im Jahre 1892 zusammen mit der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte die Jahresversammlung in Nürnberg abzuhalten. Ein wohl vorbereitetes Programm versprach zahlreiche Beteiligung. Es sollte bei der Zusammenkunft dem Andenken L. Kronecker's eine Gedächtnisrede durch Herrn H. Weber (Göttingen) gewidmet werden; Herr R. Sturm (Breslau) hatte es übernommen, das Andenken H. Schröter's zu feiern.

An wissenschaftlichen Referaten standen auf der Tagesordnung der Bericht der Herren Brill und Nöther zur Theorie der algebraischen Functionen sowie ein Bericht Ueber ausgewählte Kapitel der Mechanik von Herrn F. Kötter. Daneben war eine reiche Zahl von Vorträgen specielleren Inhaltes angemeldet.

Unterstützt von der K. Bayer. Staatsregierung und vom Reichsamt des Innern hatte der Vorstand eine Ausstellung mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente ins Leben gerufen, zu welcher ein grosser Teil der Hochschulen, staatliche wie private Sammlungen, einzelne Gelehrte, Verlagshandlungen und mathematisch-mechanische Institute und Werkstätten im In- und Auslande, im ganzen 109 Aussteller, ihre Beteiligung zugesagt hatten; die geplante Ausstellung versprach in Verbindung mit dem ausführlichen, durch Zusammenwirken vieler Collegen entstandenen Kataloge ein übersichtliches Bild der vielseitigen Entwicklung zu geben, welche all' diese dem Unterricht und der Forschung bestimmten Apparate gerade in den letzten Decennien gewonnen haben.

So waren alle Vorbereitungen getroffen, den Teilnehmern an der Nürnberger Versammlung Interessantes und Neues zu bieten. Da nötigten Ende August die Gesundheitsverhältnisse in Deutschland zur Absage der

Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte; sie hatten auch die Absage unserer Versammlung im Gefolge.

Der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ist sich der Verantwortung und des Verlustes, der durch den unabweisbar gewordenen Ausfall der Versammlung die Interessen der Vereinigung getroffen hat, wohl bewusst; er hofft aber, diesem Verluste einigermassen dadurch zu begegnen, dass er den gegenwärtigen Jahresbericht schon jetzt der Oeffentlichkeit übergiebt.

An erster Stelle setzen wir in demselben die schon oben erwähnten Gedächtnisreden auf Leopold Kronecker und Heinrich Schröter und den von Herrn Papperitz verfassten Nekrolog auf Heinrich Gretschel.

Ueber die für Nürnberg angemeldeten wissenschaftlichen Vorträge haben uns eine Anzahl der Beteiligten kurze Referate zur Verfügung gestellt, die wir im zweiten Teile veröffentlichen.

Den dritten Teil des Jahresberichtes bildet das Referat des Herrn Kötter: „Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck“.

Der von den Herren Brill und Nöther für Nürnberg in Aussicht genommene Bericht über die Theorie der algebraischen Functionen wird erst im folgenden Jahresbericht erscheinen.

Wir haben die traurige Pflicht, auch diesen Vorbericht mit der Mitteilung von dem Ableben eines unserer Mitglieder zu schliessen, des Herrn Gymnasial-Lehrers Josef Gierster (München), der am 2. Januar 1893 einem schweren Leiden im Alter von 38 Jahren erlegen ist. Ein Nekrolog, von Herrn Fricke verfasst, ist diesem Jahresbericht beigegeben.

Leopold Kronecker.

Von

H. Weber in Göttingen.

Seit der letzten Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat unsere Wissenschaft einen unersetzlichen Verlust zu beklagen.

Leopold Kronecker ist nicht mehr unter uns, der während der letzten Jahrzehnte eine so beherrschende Stellung im Kreise der deutschen Mathematiker eingenommen hat; dessen Geist so deutlich und eindringlich den Weg gewiesen hat für den Gang der Forschung.

Dass er es nicht verschmähte, als die deutschen Mathematiker vor zwei Jahren zu einer Gesellschaft zusammentraten, in diese Bestrebungen mit einzutreten, sie durch das Ansehen seines Namens zu stützen, das war von vorn herein für die junge Genossenschaft ein günstiges Omen, und an uns ist es daher vor allem, am heutigen Tage seiner und seiner Verdienste in dankbarer Erinnerung zu gedenken.

Der Vorstand unserer Vereinigung hat mir die Ehre erwiesen, mich zu dieser Gedächtnisrede aufzufordern; ich wollte mich dieser Aufgabe nicht entziehen, wenn ich auch nicht ohne Bedenken daran gegangen bin, und ich muss mit der Bitte um Nachsicht beginnen bei dem Versuch, den ich mache, ein Bild des Mannes und seines Wirkens zu entwerfen.

Ich habe nicht als Student zu Kronecker's Füssen gesessen, und wenn ich auch die Schriften des Meisters viel studirt und ihm viel zu verdanken habe, so bin ich doch nicht in alle Seiten seiner so vielseitigen Forschung gleichmässig eingedrungen, und ich zweifle, ob es mir gelingen wird, sie allseitig richtig zu würdigen.

Spät erst bin ich mit ihm persönlich bekannt geworden; aber wer unter uns ist, der nicht gleich mir in dem schönen Hause in der Bellevue-Strasse gastliche Aufnahme gefunden, der nicht in dem reich belebten Familienkreise herzlich willkommen geheissen und Anregung und Arbeits-

freude von da mitgenommen hätte? So steht wohl den meisten unter uns sein Bild noch lebendig vor der Seele, wie er nach eingehenden wissenschaftlichen Gesprächen, reich an Gedanken und Ausblicken, die Unterhaltung auch auf andere Dinge, auf Fragen der Kunst und Litteratur oder des öffentlichen Lebens zu lenken und geistvoll zu beleben wusste. —

Durch freundliches Entgegenkommen des ältesten Sohnes und des Bruders des Verstorbenen ist es mir möglich gewesen, mir auch über meine persönliche Erinnerung hinaus ein lebendiges Bild von dem Lebensgang und dem geistigen Wesen des ausserordentlichen Mannes zu machen; möge es mir gelingen, Ihnen am Faden der Erzählung seines Lebens dies Bild zu übermitteln und zugleich eine Würdigung der Hauptmomente seines wissenschaftlichen Schaffens hinein zu verweben.

Leopold Kronecker wurde am 7. Dezember 1823 zu Liegnitz geboren. Sein Vater, der dort ein kaufmännisches Geschäft betrieb und, wie der Briefwechsel mit dem Sohne ergiebt, ein Mann von bedeutender, namentlich auch philosophischer Bildung war, der dem Sohne die sorgfältigste Erziehung gab, liess ihn anfangs durch einen Hauslehrer unterrichten. Später trat der junge Leopold in die Vorschule des Conrectors Werner ein, der auch in der Folge auf dem Gymnasium sein Lehrer war, und nächst Kummer den grössten Einfluss auf seine Entwicklung übte. Namentlich von Werner's Unterricht in der philosophischen Propädeutik und in der christlichen Religionslehre, an dem er — obwohl Jude — teilnahm, sprach er stets mit grosser Begeisterung.

Auf dem Gymnasium zeichnete er sich in allen Fächern durch Fleiss und Talent aus: aber schon hier zeigte sich seine besondere Begabung und Neigung für die Mathematik, in der Kummer sein Lehrer war. Hier schon knüpfte sich die Beziehung an, die so entscheidend auf Kronecker's Entwicklung einwirkte und der Anfang einer bis zum Tode ungetrübten innigen Freundschaft war.

Als Kronecker im Frühjahr 1841 die Universität bezog, hatten die mathematischen Studien in Deutschland unter dem Einfluss der grossen Männer, deren Namen die erste Hälfte des Jahrhunderts zieren, einen neuen Aufschwung genommen. Er hörte in Berlin die Vorlesungen Dirichlet's, Jacobi's, Steiner's und später in Breslau seines alten Lehrers Kummer, der inzwischen als Professor dorthin berufen worden war.

Wenn auch von vorn herein die Mathematik Kronecker's Hauptstudium und nie aus dem Auge verlorenes Ziel bildete, so beschränkte er sich doch keineswegs einseitig auf das Fachstudium; ausser Naturwissen-

schaften trieb er philosophische Studien in den Vorlesungen von Werder und Schelling, und auch in die Hegel'sche Philosophie hat er sich durch das Studium der Werke teilweise eingearbeitet.

Auch die Sprachen des klassischen Altertums, die er auf dem Gymnasium mit grosser Liebe betrieben hatte, hat er auf der Universität nicht aus dem Auge verloren.

Manche für das Leben wichtige Verbindung knüpfte sich in der Studienzeit an. Die Freundschaft mit seinem Schulgenossen Hugo Rühle, dem vor einigen Jahren verstorbenen Bonner Kliniker, brachte ihn mit Medicinern in Berührung, unter denen ihm L. Traube fürs Leben ein treuer Freund blieb.

Wichtig für Kronecker war auch der Verkehr im Hause des Banquiers Alexander Mendelssohn in dem er durch Dirichlet Zutritt gefunden hatte, wo er unter anderm mit Felix Mendelssohn Bartholdy und mit Alexander von Humboldt Beziehungen anknüpfte

In schöner, ideal verklärter Erinnerung stand ihm stets die kurze Bonner Studienzeit. Sie fiel noch in die Zeiten, in denen die burschenschaftlichen Bestrebungen an den Universitäten verdächtig und nach oben hin anrüchig und die Farben Schwarz-Rot-Gold streng verpönt waren. Es waren aber nicht die Schlechtesten unter der studirenden Jugend, die den Gedanken der Burschenschaft noch hochhielten und neu zu beleben suchten, und mancher Name vom besten Klang ist darunter zu finden. So war auch Kronecker in Bonn an der Begründung einer burschenschaftlichen Verbindung Friedericiana hervorragend thätig, an der sich Männer wie Geibel, Kinkel, Palleske, der Schillerbiograph und Becker (der sogenannte rote Becker, später Bürgermeister von Köln) beteiligten. Die neue Verbindung, die bald mehr als ein Zehntel der ganzen Bonner Studentenschaft und darunter die fleissigsten und tüchtigsten umfasste, fand einflussreiche Freunde und Beschützer unter den Professoren, darunter der damalige Rector Naumann, F. Chr. Dahlmann, Nitzsch und E. M. Arndt. Deren Einfluss und Vermittlung war es zu danken, dass eine in Berlin beabsichtigte politische Untersuchung unterblieb.

Im Jahre 1845 wurde Kronecker in Berlin unter Böckh's Decanat mit Auszeichnung zum Doctor der Philosophie promovirt. Diesen Ehrentag mit dem sich anschliessenden Doctorschmaus, an dem auch Böckh teilnahm, rechnete Kronecker stets, nach den Berichten seines Sohnes, zu den schönsten Erinnerungen seines Lebens.

Indem ich aber die Dissertation „de unitatibus complexis“ berühre,

muss ich mit einigen Worten an die Geschichte der Wissenschaft jener Tage erinnern

Seit dem Erscheinen von Gauss' zweiter Abhandlung über die biquadratischen Reste (1832) war der Zahlentheorie eine neue weitgreifende Aufgabe gestellt, der Ausbau der Theorie der complexen, allgemeiner der algebraischen Zahlen. Im fünften Jahrzehnt des Jahrhunderts bewegten diese Fragen die Gemüter besonders lebhaft, und neue Bahnen wurden damals eingeschlagen.

Es war die Zeit, da Jacobi nach seiner italienischen Reise sich in Berlin niedergelassen hatte und sich viel mit zahlentheoretischen Fragen beschäftigte, da Dirichlet, der mit Jacobi in Italien zusammengetroffen war, seine unsterblichen Untersuchungen bekannt machte, und da Kummer seine folgenreichen Arbeiten durch die „Disputatio de numeris complexis, qui unitatis radicibus et numeris realibus constant“ eröffnete. Hier trat nun Kronecker in einen Gedankenkreis ein, der seiner Denkweise vorzüglich angemessen war, in dem er später besonders seine Grösse entfalten sollte.

Bereits seine Dissertation befasst sich mit einem Gegenstand, der für die Theorie von fundamentalster Bedeutung ist, und noch im Jahre 1882 hielt sie der gereifte Verfasser mit Recht eines neuen Abdrucks für würdig, der im Journal für Mathematik zugleich mit den Schlussparagraphen, die, obwohl gleichzeitig entstanden, bei der ersten Publication nicht mit abgedruckt waren, erschienen ist.

Es handelt sich um die Theorie der Einheiten in einem algebraischen Zahlkörper; ich bediene mich dieses jetzt allgemein verständlichen und immer mehr gebräuchlichen Ausdrucks, obwohl er von Kronecker abgelehnt wurde. Die Theorie der Einheiten fällt in dem einfachsten Fall der quadratischen Körper im wesentlichen zusammen mit der Theorie der Pell'schen Gleichung, deren Begründung eine der schönsten Leistungen von Lagrange auf dem Gebiete der Zahlentheorie ist. Die Aufgabe ist die, das ganze System der Einheiten, deren es, mit wenigen Ausnahmen besonderer Natur, in jedem Körper unendlich viele giebt, als eine Gruppe, um mich der modernen Terminologie zu bedienen, darzustellen, und zwar als eine unendliche Gruppe vertauschbarer Elemente mit einer endlichen Basis, deren Elemente die fundamentalen Einheiten genannt werden.

Dirichlet hat während seines Aufenthaltes in Italien diese Frage nach Ueberwindung mannigfacher Schwierigkeiten in völliger Allgemeinheit und grossartiger Einfachheit zur Entscheidung gebracht; aber zur

Zeit, da Kronecker seine Untersuchungen anstellte, waren die Resultate von Dirichlet noch nicht bekannt, und so war Kronecker's Arbeit, die für Kreisteilungszahlen die Frage erledigte und die bei diesen besonderen Zahlenarten bestehenden Verhältnisse klarlegte, immerhin von grosser Bedeutung. In den späteren Untersuchungen von Kummer über die allgemeinen Klassenzahlen spielen diese Einheiten dieselbe Rolle, wie die Lösungen der Pell'schen Gleichung bei den Klassenzahlen der quadratischen Formen, und hierdurch gewannen diese Fragen noch ein erhöhtes Interesse. Es zeigte sich, dass die wirkliche Durchführung im einzelnen, d. h. die wirkliche Bestimmung eines Systems fundamentaler Einheiten, selbst in den einfachsten Fällen zu den unzugänglichsten und dornenvollsten Aufgaben der Mathematik gehört, wodurch wesentlich der Ausbau der Theorie gehemmt wurde.

Es traten nun im Leben Kronecker's Verhältnisse ein, durch die er zu Beschäftigungen gezwungen wurde, die von seinen mathematischen Interessen weit ablagen. Aber auch hier bewies er sein Talent und seine Tüchtigkeit. Im Interesse der Familie betrieb er die Landwirtschaft und ordnete mit grosser Gewandtheit das Geschäft eines verstorbenen Oheims, des Vaters seiner späteren Frau, wodurch er der Familie ein nicht unbeträchtliches Vermögen rettete.

Im Jahre 1848 verheiratete er sich mit seiner Cousine Fanny Prausnitzer, einer liebenswürdigen, geistig bedeutenden und tüchtigen Frau, die an den geistigen Interessen des Mannes und an seinen Erfolgen den lebhaftesten Anteil nahm. Dreiundvierzig Jahre, bis zu dem kurz vor seinem eigenen Ende erfolgten Tod der Gattin lebte er mit ihr in glücklichster Ehe, der sechs Kinder entsprossen, von denen noch vier, drei Söhne und eine Tochter, am Leben sind.

Der Erziehung und Beratung seiner Kinder widmete sich Leopold Kronecker im Verein mit seiner Gattin mit grösster Hingebung. Auch seines um siebzehn Jahre jüngeren Bruders Hugo, der jetzt Professor der Physiologie in Bern ist, hat er sich in fast väterlicher Weise angenommen und ihn menschlich und wissenschaftlich gefördert.

Der Lebensabschnitt, in dem Kronecker's Thätigkeit grösstenteils Familienangelegenheiten gewidmet war, in dem er überdies noch durch körperliche Beschwerden gehindert war, ist gekennzeichnet durch eine Lücke in der Reihe der Publicationen.

Zwischen den Jahren 1845 und 1853 finde ich keine Veröffentlichung zu verzeichnen. Dass er aber in dieser Zeit auch wissenschaftlich nicht müssig war, und dass hier vielleicht gerade die Zeit der wissen-

schaftlichen Entwicklung und Reife zu suchen ist, das beweist der Erfolg, auch wenn wir nicht wüssten, dass er während der ganzen Zeit eine eifrige wissenschaftliche Correspondenz, namentlich mit seinem Freunde Kummer, unterhielt.

Die Arbeit, mit der er zuerst wieder an die Oeffentlichkeit trat, übergab er im Mai 1853, als er auf einer Reise nach Paris in Berlin weilte, an Dirichlet, der sie am 20. Juni desselben Jahres der Berliner Akademie vorlegte, in deren Sitzungsberichten sie erschienen ist.

Es ist die berühmte Abhandlung über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, eine Arbeit, die in ihrer Kürze und in ihrem Gedankenreichtum eine Fülle von Vorarbeiten voraussetzt, über die uns vielleicht noch die zu hoffenden Publicationen aus dem Nachlass Aufschluss geben werden.

Kronecker knüpft in dieser Arbeit an die nur fragmentarisch überlieferten algebraischen Untersuchungen Abel's an, dessen Sätze er zunächst zu beweisen sucht. Es ist mir zweifelhaft, ob die Arbeiten von Galois Kronecker damals schon bekannt waren. Diese für die Algebra so wichtigen Arbeiten waren zuerst erschienen in den Jahren 1828—30, aber wenig beachtet und bekannt, bis Liouville im Jahre 1846 einen neuen Abdruck in seinem Journal herausgab. Galois wird von Kronecker zuerst in einem Brief an Dirichlet vom 3. März 1856 und in der Arbeit, die am 14. April 1856 von Kummer der Berliner Akademie vorgelegt wurde, erwähnt, so dass die Vermutung nahe liegt, dass er erst während seines Pariser Aufenthalts im Jahre 1853, wo er mit den bedeutendsten französischen Mathematikern, namentlich mit Hermite und Bertrand, enge Beziehungen anknüpfte, mit Galois' Arbeiten bekannt wurde. Wie dem aber auch sei, Kronecker's Arbeiten haben die Algebra über den Standpunkt hinaus gefördert, auf den sie durch Galois' geniale Schöpfung gehoben war. Galois hatte in der einer Gleichung eigentümlichen Substitutionsgruppe den Kernpunkt aller tiefer eindringenden algebraischen Untersuchungen erkannt, und hatte damit die Grundfrage der Algebra in einfachster und allgemeinster Weise formulirt; damit ist aber zunächst nur die formale Seite getroffen. Das andere Ziel ist die Erforschung der Eigenschaften der durch die Gleichungen definirten Zahlenarten, die Anwendung der allgemeinen Grundsätze auf besondere Gleichungsarten, die tiefer gehende, jedem besonderen Falle angepasste Hülfsmittel erfordert. Hierzu finden sich bei Galois zwar Ansätze, z. B. in seinen Aussprüchen über die Modulargleichungen der Transformation 5ten, 7ten, 11ten Grades, aber keinerlei weitere Ausführungen. Mehr in

dieser Richtung weisen die Sätze von Abel, die sich in einzelnen seiner algebraischen Fragmente finden, und vor allem in den Untersuchungen von Gauss über die Kreisteilung.

Die Frage, die die Algebraiker in erster Linie beschäftigte, die wohl auch den Anstoss zu allen diesen Untersuchungen gegeben hat, war die nach der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen, d. h. der Reduction auf reine Gleichungen. Diese Fragestellung, die von einem höheren Standpunkte betrachtet, etwas Willkürliches hat und später weiter fortgebildet werden musste, war durch die elementare Algebra gegeben, und so bewegen sich auch Kronecker's algebraische Arbeiten zunächst in dieser Richtung. Wie kommt es, dass die höheren Gleichungen in diesem Sinne nicht mehr auflösbar sind, und welche Eigenschaften müssen die besonderen Gleichungen haben, die eine Auflösung gestatten? Galois hat auf diese Fragen, wenigstens für Gleichungen von Primzahlgraden, eine Antwort aus der Natur der Gruppe abgeleitet, und dadurch ein Mittel gefunden, das wenigstens principiell in jedem besonderen Fall die Entscheidung giebt, wenn es auch meist nicht praktisch durchführbar sein wird. Kronecker löst die Aufgaben vollständiger, indem er einen algebraischen Ausdruck aufstellt, in dem alle Wurzeln auflösbarer Gleichungen von gegebenem Grad eines beliebigen Rationalitätsbereichs, und nichts anderes, enthalten sind, einen Ausdruck, der übrigens für Gleichungen fünften Grades schon von Abel ohne Beweis angegeben war.

Durch diesen allgemeineren Ausdruck wird die Aufgabe zunächst zurückgeführt auf die Bestimmung der Wurzeln einer sogenannten Abel'schen Gleichung, und die Sätze, die Kronecker über die letztere Gleichungsart bereits in seiner ersten Abhandlung mit voller Bestimmtheit ausspricht, und die sich dahin einfach zusammenfassen lassen, dass im absoluten Rationalitätsbereich, in dem nur die rationalen Zahlen als bekannt vorausgesetzt sind, alle Abel'schen Gleichungen unter den Kreisteilungsgleichungen enthalten sind, gehören mit den zu ihrem Beweis nötigen und zu schaffenden Hülfsmitteln und mit dem, was weiter sich daran anschloss, zu den bedeutendsten Leistungen Kronecker's. Hierzu findet sich auch bei Abel noch kein Ansatz, und es war auch erst durch die von Kummer begründete Theorie der Zerlegung der algebraischen Zahlen in ihre Primfactoren möglich, an solche Fragen heranzutreten.

Am Schlusse der Abhandlung eröffnet Kronecker noch eine Perspective auf die Erweiterung dieser Sätze über Abel'sche Gleichungen für den Fall, dass nicht der absolute Rationalitätsbereich, sondern der der

Gauss'schen complexen Zahlen zu Grunde gelegt wird, in den an die Stelle der Kreisteilungszahlen, die aus der Lemniskatenteilung stammenden Zahlen treten. So finden sich auch die Untersuchungen über die singulären Moduln der elliptischen Functionen, die in den späteren Arbeiten Kronecker's eine so wichtige Rolle spielen, hier im Keime schon angedeutet.

Nachdem im Jahre 1855 die geschäftliche Thätigkeit ihren Abschluss gefunden hatte, siedelte Kronecker nach Berlin über, und hier schloss sich der enge Freundschaftsbund, dem die Wissenschaft so viel verdankt, zwischen vier Männern, die zu den ersten Vertretern der Mathematik in Deutschland zählen. Zwar hatte Dirichlet Berlin kurz vorher verlassen; aber statt dessen wurde Kronecker's alter Freund Kummer nach Berlin berufen, und kurze Zeit darauf Weierstrass. Zu diesem Kreis gehörte auch Borchardt, der seit Crelle's Tod die Herausgabe des Journals für Mathematik leitete und im Jahre 1856 in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Kronecker, der 1861 in die Akademie eintrat, lebte in Berlin in glücklicher Musse seinen wissenschaftlichen Idealen, und reiche Früchte und innere Befriedigung krönten diese Thätigkeit.

Aus den ersten Jahren des Berliner Aufenthalts besitzen wir den wissenschaftlich und persönlich wertvollen Briefwechsel mit Dirichlet, den Schering in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat, und dessen Originale die Göttinger Bibliothek aufbewahrt, der uns über Kronecker's Arbeiten in jener Zeit Aufschluss giebt.

Am 17. Mai 1857 schreibt er an Dirichlet: „Ich habe so manche sehr interessante Sachen gefunden, und da ich mich zunächst dadurch so unabhängig fühle, dass mich keine Spur irgend welchen Ehrgeizes quält, da ich vielmehr einzig und allein meine Freude in der Erkenntnis des Wahren habe, so kommt es mir wenig darauf an, wozu ich gerade meine Zeit verwende, wenn ich sie nur überhaupt gut benutze."

Und über die divinatorische Art seines Schaffens giebt ein Brief vom 26. Juni 1856 Aufschluss.

„Aber ich bin vielfach in der hoffnungsvollen Fernsicht dem, was ich beweisen kann, vorausgeeilt, und habe dabei Anschauungen von der Natur der Gleichungen gewonnen, die, wenn sie sich bewähren, ein ganz neues und erhebliches Interesse gewähren dürften. Bei der gänzlichen Neuheit des Feldes aber, auf welchem ich jetzt arbeite, und bei der kaum zu bewältigenden Complicirtheit, glaube ich, dass ich jahrelanger Arbeit bedürfen werde, ehe ich zu stricten Resultaten komme."

Kronecker hatte schon früh herausgefühlt, und die Abhandlung aus dem Jahre 1853 enthält darüber bereits eine Andeutung, dass nächst den Gleichungen, die wir jetzt in etwas weiterem Sinne, als Kronecker diesen Ausdruck ursprünglich brauchte, Abel'sche nennen, und die, wie Kronecker zuerst erkannt hat, alle durch die Einheitswurzeln gelöst werden, die aus der sogenannten complexen Multiplication der elliptischen Functionen stammenden Gleichungen von fundamentaler Bedeutung sind, dass gewissermassen die nächst höhere Zahlenart durch sie definirt wird. Diesen Gleichungen wandte sich daher im natürlichen Fortschritt seiner Untersuchungen sein hauptsächlichstes Interesse zu. Die Fortschritte, die wir Kronecker auf diesem Gebiete verdanken, gehören zu den wertvollsten Bereicherungen der Algebra.

Abel hatte in seinen Untersuchungen über elliptische Functionen die Frage gestellt, unter welchen Bedingungen eine algebraische Multiplication der elliptischen Functionen mit einem andern als ganzzahligen Multiplicator möglich sei; es ergiebt sich leicht, dass die Bedingung dafür die ist, dass die Perioden einer homogenen Gleichung zweiten Grades genügen, so dass das Periodenverhältnis durch die Quadratwurzel aus einer negativen ganzen Zahl ausgedrückt ist. Abel hatte auch erkannt, dass für den Modul der elliptischen Functionen hieraus eine algebraische Gleichung resultirt, und hat später ohne Beweis ausgesprochen, dass diese Gleichung zu den algebraisch lösbaren gehöre.

Zu diesen Sätzen hat Kronecker zunächst die Beweise gesucht, und wurde dadurch zu den merkwürdigsten Eigenschaften und Beziehungen dieser Gleichungen und der durch sie definirten algebraischen Zahlen geführt.

Der Kernpunkt dieser Ergebnisse ist die enge Beziehung zur Theorie der quadratischen Formen, eben jener Formen, deren Wurzeln die singulären Periodenverhältnisse sind. Es zeigt sich, dass zu jeder negativen Determinante eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten gehört, deren Wurzeln die von Kronecker so genannten singulären Moduln sind, so dass jeder Wurzel dieser Gleichung eine Klasse äquivalenter quadratischer Formen entspricht, und dass sonach der Grad dieser Gleichung der Klassenzahl für die betreffende Determinante gleich ist. Die Gleichung ist irreducibel im absoluten Rationalitätsbereich, zerfällt aber in Factoren, wenn die Quadratwurzeln aus den in der Determinante aufgehenden Primzahlen adjungirt werden, und zwar entspricht jedem dieser Factoren ein Geschlecht von Formenklassen.

Die Gleichung ist, von einigen besonderen Fällen abgesehen, im ab-

soluten Rationalitätsbereich keine Abel'sche; sie wird es erst durch Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante; dann aber entspricht ihre Gruppe genau der von Gauss entdeckten Gruppe der Composition der Klassen quadratischer Formen; die Gleichung ist als Abel'sche algebraisch lösbar.

Dass diese Zahlen für die Abel'schen Gleichungen im quadratischen Rationalitätsbereich mit negativer Discriminante dieselbe allgemeine Rolle spielen, wie die Einheitswurzeln für den absoluten Rationalitätsbereich, d. h. dass die Wurzeln aller Gleichungen, die nach Adjunction einer imaginären Quadratwurzel Abel'sche Gleichungen sind, durch diese Zahlen rational darstellbar sind, hat Kronecker mehrfach ausgesprochen. Den Beweis dafür und ebenso die Uebertragung auf positive Discriminanten, mit der sich Kronecker gleichfalls beschäftigt hat, suchen wir noch vergeblich.

Indem ich so in den grossen Zügen die Hauptmomente der Theorie der complexen Multiplication aufführe, erkennt man leicht, wie sie vollständig parallel läuft mit der Theorie der quadratischen Formen von negativer Determinante, so dass diese auch aus der complexen Multiplication abgeleitet und bewiesen werden kann, und so zwischen zwei auf ganz verschiedenem Boden gewachsenen Disciplinen ein ebenso unerwarteter als merkwürdiger und fruchtbarer Zusammenhang hergestellt ist.

Noch mannigfache Resultate und Erscheinungen der Algebra und Zahlentheorie haben diese Untersuchungen zu Tage gebracht; ich erwähne die merkwürdige Beziehung zu der Pell'schen Gleichung, zum Beweis des Satzes, dass eine primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellen kann, die merkwürdigen Relationen zwischen den Klassenzahlen quadratischer Formen verschiedener Determinanten und anderes, was sich hier nicht gut ausführen lässt. Die Anfänge dieser Arbeiten fallen, wie der erwähnte Briefwechsel mit Dirichlet zeigt, schon in die fünfziger Jahre, und vielleicht noch früher. Es zieht sich aber das Interesse an dem Gegenstand durch das ganze wissenschaftliche Leben Kronecker's, und noch in den Abhandlungen „Zur Theorie der elliptischen Functionen", die seit dem Jahre 1883 bis kurz vor des Verfassers Tod in längerer Reihe in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erschienen sind, werden diese Fragen berührt.

Daneben geht noch eine andere Art der Anwendung der elliptischen Functionen auf die Zahlentheorie, die sich von der Theorie der singulären Moduln wesentlich dadurch unterscheidet, dass der Modul variabel bleibt; die Entdeckung dieser Beziehung geht auf Dirichlet zurück, der

sie in seiner berühmten Abhandlung „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres“ zuerst berührt und die in dem erwähnten Briefwechsel schon Gegenstand der Besprechung ist; diese Untersuchungen, die auch auf das Gebiet der Theta-Functionen zweier Veränderlicher hinüberspielen, und auch für dieses bemerkenswerte Resultate und Beziehungen zu elliptischen Thetafunctionen ergaben, werden von Kronecker in seinen letzten Publicationen in sehr merkwürdiger Weise verallgemeinert. Es ist mir aber hier nicht möglich, von dem Gedankeninhalt dieser Umformungen, die wohl noch einer weiteren Verarbeitung würdig wären, in kurzen Worten eine Vorstellung zu geben.

Um eine formale Seite der Kronecker'schen Forschungen zu erwähnen, die in seinen späteren Jahren mehr und mehr von ihm betont wird, will ich auf sein Bestreben hinweisen, invariante Eigenschaften möglichst, wie er sich ausdrückt, in Evidenz treten zu lassen, d. h. die Formeln in eine Gestalt zu bringen, in der ihre invarianten Eigenschaften unmittelbar in die Augen springen. Als Beispiel will ich die Formeln erwähnen, die ihn noch in seiner letzten Zeit beschäftigt haben, mittels deren er die elliptischen Functionen durch Fourier'sche Doppelreihen darstellt, die eine grosse Eleganz und Einfachheit der Form haben, und die die doppelte Periodicität unmittelbar erkennen lassen; freilich auf Kosten einer andern Eigenschaft, die darin verdeckt ist, nämlich Functionen complexen Arguments zu sein.

Kronecker hätte seine algebraischen Untersuchungen nicht mit dem glänzenden Erfolge führen können, wenn er nicht über ein Hülfsmittel verfügt hätte, auf das ich jetzt Ihre Aufmerksamkeit lenken möchte.

Durch die Einführung der complexen Zahlen hatte Gauss der Zahlentheorie ein grosses neues Forschungsgebiet eröffnet. Zunächst veranlasst durch die Untersuchung der biquadratischen Reste hatte Gauss einen Zahlkörper betrachtet, der ausser den rationalen Zahlen vierte Einheitswurzeln enthält. Auf diesen Zahlkörpern lässt sich die rationale Zahlentheorie in allen wesentlichen Punkten, namentlich der Satz über Teilbarkeit und Zerlegung in Primfactoren, ohne Schwierigkeit übertragen, und dasselbe gelang auch bei anderen Zahlkörpern, z. B. dem, der aus kubischen Einheitswurzeln abgeleitet ist. Wie aber diese Betrachtungen weiter verfolgt und auf Einheitswurzeln höherer Grade übertragen wurde, trat eine Erscheinung zu Tage, die zunächst ein unüberwindliches Hindernis eines weiteren Fortschritts schien.

Während nämlich im rationalen Zahlkörper die Primzahlen die doppelte

Eigenschaft haben, nicht weiter in Factoren zerlegbar zu sein, und ein Product mehrerer Factoren nur dann zu teilen, wenn sie wenigstens einen der Factoren des Productes teilen, woraus dann folgt, dass eine Zahl nur auf eine Art in Primfactoren zerlegbar ist, treten in den höheren Zahlkörpern Zahlen auf, die zwar nicht weiter zerlegbar sind, aber doch ein Product teilen können, ohne einen seiner Factoren zu teilen, so dass eine Zahl auf mehr als eine Art in unzerlegbare Factoren zerfällt werden kann. Diese unzerlegbaren Factoren haben also noch nicht den Charakter wahrer Primfactoren. Kummer hat für die Kreisteilungszahlen diese Schwierigkeit überwunden durch die Schöpfung der idealen Factoren, indem er definitionsweise sagt, eine Zahl ist durch einen gewissen idealen Factor (der keine selbständige Existenz hat) teilbar, wenn sie einer gewissen Congruenz-Bedingung genügt.

Diese Methode war aber nur den Kreisteilungszahlen angepasst und bedurfte der Verallgemeinerung auf beliebige Zahlkörper. Es ist klar, dass eine allgemeine Zahlentheorie, die zugleich die Algebra umfasst, erst dann sich entwickeln kann, wenn diese Schwierigkeit überwunden ist, und dass sie nur dadurch überwunden werden kann, dass man den Begriff der Teilbarkeit durch einen anderen ersetzt, aus dem die gewöhnliche Teilbarkeit als specieller Fall abgeleitet werden kann.

Auch in der Theorie der algebraischen Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen herrschen analoge Gesetze wie in der Theorie der Zahlen, und eine allgemeine Theorie der Teilbarkeit muss auch diese umfassen.

Eine Verallgemeinerung eines Begriffes ist aber nach verschiedenen Seiten hin denkbar und möglich. So sind auch auf verschiedenen Wegen Kronecker und Dedekind zu einer gleich vollständigen Lösung dieser Aufgabe gelangt, Dedekind indem er nicht einzelne Zahlen, sondern Systeme von Zahlen betrachtet, die als Specialfall das System aller Multipla einer festen Zahl enthalten, die er Ideale nennt, ein Name, der aber nur historischen Ursprung hat, und zu Ehren der Kummer'schen Schöpfung gebildet ist. Nachdem Multiplication und Teilbarkeit dieser Ideale definirt ist, wird bewiesen, dass jedes Ideal auf eine einzige Weise in Primfactoren, d. h. Primideale, zerlegbar ist, in völliger Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Teilbarkeit bei den rationalen Zahlen.

Kronecker hat seine Theorie, von der er längst Gebrauch gemacht hatte, im Zusammenhang veröffentlicht in der Festschrift, die er dem alten Freund Kummer zum fünfzigjährigen Doctorjubiläum am 10. Sept.

1881 mit warmen Worten der Dankbarkeit und Anhänglichkeit überreichte, die zugleich auch im Journal für Mathematik abgedruckt wurde.

Es ist unmöglich, in der Kürze und ohne Anwendung mathematischer Formeln einen Ueberblick über den Inhalt der gedankenreichen und schwer geschriebenen Festschrift zu geben. Vielleicht aber gelingt es mir, von dem Grundgedanken wenigstens eine ungefähre Vorstellung zu geben, wenn ich an ein Beispiel aus der Functionentheorie anknüpfe, wo die Verhältnisse durch die Benutzung der Riemann'schen Mittel anschaulicher werden und auch ohnehin wohl der Mehrzahl unter Ihnen vertrauter sind als die analogen Begriffe der Zahlentheorie.

Man denke sich algebraische Functionen einer Veränderlichen in einer Riemann'schen Fläche dargestellt; das System aller dieser Functionen bildet einen Körper oder nach Kronecker's Terminologie einen Gattungsbereich. Die ganzen Functionen darunter sind die, die im Endlichen endlich bleiben. Das System aller ganzen Functionen, die in einem festen Punkt oder in einer festen Punktgruppe verschwinden, bildet nach Dedekind's Bezeichnung ein Ideal, und die Multiplication besteht in der Zusammenfassung der Nullpunkte der Factoren zu einer neuen Punktgruppe.

Kronecker bildet ganze rationale Formen von beliebigen Hülfsvariablen, die an sich mit der Frage nichts zu thun haben, deren Coefficienten ganze Functionen des betrachteten Körpers sind. Wenn diese Coefficienten alle in einem und demselben Punkt verschwinden, so werden die Coefficienten der Norm ganze rationale Functionen der unabhängigen Variablen sein, die einen gemeinsamen Linearfactor haben. Haben die Coefficienten der Norm keinen gemeinsamen Teiler, so heisst die Form eine primitive. Solche Formen spielen die Rolle von Einheiten und könnten daher wohl auch Einheitsformen genannt werden; und nun gelingt es, jede Form und folglich auch jede Function des Körpers in Primfactoren wirklich zu zerlegen, wenn man in den Factoren auch gebrochene Formen zulässt, die im Nenner Einheitsformen enthalten. Diese Zerlegung ist eine völlig bestimmte, abgesehen von Einheitsformen, die im Zähler und Nenner in verschiedener Weise auftreten können.

Ganz dasselbe gilt auch, wenn die Coefficienten der Formen nicht einem Functionen-Körper, sondern einem Zahlenkörper angehören, und so ist eine ausreichende Grundlage für die Zahlentheorie aller dieser Körper gewonnen.

Hiermit ist nun freilich erst der Ausgangspunkt für die Theorie gekennzeichnet; alle die tiefer greifenden Untersuchungen, die wir in der Schrift noch finden, zumal die auf die Discriminante des Körpers und

die Eigenschaften der in ihr enthaltenen Factoren sich beziehen, können hier nicht berührt werden; es sei nur noch erwähnt, dass die Theorien von Dedekind und Kronecker trotz der Verschiedenheit der Ausgangspunkte in den Resultaten übereinstimmen, genauer gesagt, dass die Dedekind'schen Primideale in wechselseitig eindeutiger Weise auf die Kronecker'schen Primfactoren bezogen werden können. Dies spricht für die innere Wahrheit und Notwendigkeit beider Theorien.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Gedächtnisrede sein, alle die schönen und wertvollen Untersuchungen zu besprechen oder auch nur zu erwähnen, die das reiche wissenschaftliche Leben Kronecker's ausmachen. Das Verzeichnis der Abhandlungen Kronecker's enthält nicht weniger als 144 Nummern; ich habe mich in meiner sehr unvollständigen Schilderung an das gehalten, was mir das allgemeinste, principiell wichtigste erschien, und wovon ich zugleich hoffen konnte, einem grösseren Kreis eine ungefähre Anschauung zu übermitteln. Auch sind mir selbst nicht alle Seiten von Kronecker's vielumfassender Thätigkeit gleichmässig vertraut und bekannt. Lassen Sie mich aber noch einen Gegenstand wenigstens kurz berühren, der einen bemerkenswerten Fortschritt in Kronecker's algebraischen Anschauungen kennzeichnet, und der zugleich geeignet ist, in weiteren Kreisen Interesse zu erwecken, das sind seine Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades und ihren Zusammenhang mit der Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Es war wohl Hermite, der zuerst den Gedanken aussprach, dass, wenn man nach Galois die Modulargleichung sechsten Grades, die bei der Transformation fünften Grades der elliptischen Functionen auftritt, auf den fünften Grad reducirt, man mit Hülfe von Gleichungen, die den vierten Grad nicht übersteigen, eine Uebereinstimmung mit der allgemeinen Gleichung fünften Grades herstellen kann, und dass man daraus eine Art Auflösung der Gleichung fünften Grades gewinnt, ähnlich wie man seit lange gewohnt ist, die Dreiteilung des Winkels zur Auflösung einer Gleichung dritten Grades zu benutzen. In einem von Hermite veröffentlichten berühmt gewordenen Brief hat nun Kronecker diesen Gegenstand von ganz anderer Seite beleuchtet und auf seinen algebraischen Kern zurückgeführt.

Bei Kronecker tritt zunächst die Zurückführung auf die Transformationsgleichung der elliptischen Functionen zurück hinter der allgemeinen Frage, wie man die Gleichung fünften Grades von einer möglichst einfachen Normalgleichung abhängig machen kann. Als nächstliegendes Ziel stellt sich dar die Zurückführung auf eine Gleichung, die nur von

einem Parameter abhängig ist, wie es in der That bei den aus der Transformation der elliptischen Functionen stammenden Gleichungen, die nur von dem Modul der elliptischen Functionen abhängig sind, zutrifft. Zunächst entspricht dieser Forderung bereits die Jerrard'sche Form der Gleichungen fünften Grades, deren sich Hermite bedient hat; aber auch gewisse Resolventen sechsten Grades, die sich, wie Kronecker gezeigt hat, auf mannigfache Weise mit den Modulargleichungen sechsten Grades in Einklang bringen lassen.

Aber Kronecker stellt sich noch eine weitere Aufgabe. Er versucht, das Ziel zu erreichen nur durch Benutzung solcher Irrationalitäten, die sich rational durch die Wurzeln der zu lösenden Gleichung ausdrücken lassen, die er als die einfachsten, der Gleichung natürlichsten betrachtet. Dieser Forderung legte er ein grosses Gewicht bei. Da aber der Versuch, ihr zu genügen, nicht gelang, so sprach er den Satz aus, dass die Forderung überhaupt unerfüllbar sei, dass also durch natürliche Irrationalitäten die Gleichung fünften Grades nicht in eine nur von einem Parameter abhängige Gleichung transformirbar sei. Einen Beweis für diesen Satz hat er nicht publicirt; dass aber der Satz richtig ist, haben spätere Untersuchungen dargethan.

Eine wesentliche Lücke würde aber in dem Bilde des Mathematikers Kronecker bleiben, wenn ich seine Stellung zu den fundamentalen, philosophischen Fragen der Mathematik mit Stillschweigen übergehen wollte. Es ist ein Standpunkt, der besonders in seinen späteren Jahren hervortrat, vielleicht mehr noch im persönlichen Verkehr als in der Oeffentlichkeit; aber auch öffentlich hat er seine Anschauungen nicht verleugnet und z. B. in der Festschrift zu Zeller's Jubiläum scharf hervorgekehrt.

In Bezug auf Strenge der Begriffe stellt er die höchsten Anforderungen und sucht alles, was Bürgerrecht in der Mathematik haben soll, in die krystallklare eckige Form der Zahlentheorie zu zwängen. Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den er in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 that: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

So war ihm alles, was sich nicht seines arithmetischen Ursprungs unmittelbar bewusst war, unsympathisch, und sein Streben ging dahin, nicht nur in der Algebra, sondern auch in der Functionentheorie die arithmetische Abstammung deutlich hervortreten zu lassen.

Aber freilich hat er auch an jenem „Menschenwerk" manches bekämpft und verworfen, was sich seit der Zeit des alten Euklid

als gut und brauchbar und als logisch richtig erwiesen hat, wenn er z. B. eine Definition nur dann für zulässig erklärt, wenn sie in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von Schlüssen erprobt werden kann. Er bricht damit den Stab nicht nur über alle die neueren Versuche, zu einer logisch verständlichen Auffassung der Irrationalzahlen zu gelangen, sondern auch über Euklid's darauf bezügliche Definitionen.

Die Consequenz dieser Auffassungsweise war, dass Kronecker der geometrischen Anschauung in mathematischen Dingen nur eine bedingte Berechtigung einräumte; und in der That findet man in seinen Arbeiten von diesem Hülfsmittel nur sehr beschränkten Gebrauch gemacht. Dass er es aber, wo er es am Platze hielt, mit Meisterschaft handhabte, beweisen seine Arbeiten über die Charakteristiken und die Sturm'schen Reihen, auf die hier näher einzugehen ich mir versagen muss.

Dass Kronecker's wissenschaftliche Arbeit eine ausgezeichnet productive war, der es nur auf das Entdecken und Erkennen ankam, hatte den Erfolg, dass viele seiner wichtigsten Schöpfungen lange Zeit nicht ausführlich und mit Beweisen publicirt waren; erst in den letzten Jahren hat er angefangen, manche seiner Untersuchungen in Zusammenhang darzustellen, und über manches dürfen wir vielleicht noch aus dem Nachlass Aufschluss hoffen.

Um so wichtiger war es, dass Kronecker von dem ihm als Mitglied der Akademie zustehenden Recht, an der Universität Vorlesungen zu halten, regelmässig und umfassend Gebrauch machte. Seine Vorlesungen waren ausschliesslich den Gegenständen gewidmet, denen er sein eigenes wissenschaftliches Interesse zugewandt hatte, und so waren seine Forschungsresultate dem Kreise seiner vertrauteren Schüler schon früh bekannt, und seine Vorlesungen gehörten, wenn auch nur den fortgeschrittenen und wissenschaftlich interessirten Schülern verständlich, zu dem Wertvollsten und Eigenartigsten, was die Berliner Universität dem Mathematiker bot.

Gleichwohl hat Kronecker nicht in dem Masse eine mathematische Schule begründet, wie wir das von anderen hervorragenden Lehrern wissen.

Er selbst spricht sich hierüber in dem schönen und merkwürdigen Briefe aus, den er einige Monate vor seinem Tode an Georg Cantor in Halle gerichtet hat, und der in dem vorigen Jahresbericht unserer Vereinigung abgedruckt ist.

„Ich mag auch bei uns nicht den Ausdruck „Schüler“ gern; wir wollen und brauchen keine Schule, sondern wir gehen nur in den Wegen

fort, die uns ein Lehrer oder Vorgänger geebnet und gewiesen hat, wenn wir meinen, auf diesem Wege weitere Ziele erreichen zu können. Wir wollen und brauchen keine Schule, weil in unserer absolut klaren Wissenschaft jede neue Entdeckung die bisherige Schulweisheit wertlos machen kann. Das hat uns ja die Geschichte unserer Wissenschaft oft genug gezeigt.“

Eine Berufung nach Göttingen, die im Jahre 1868 an ihn ergangen war, lehnte er ab, da er seine Thätigkeit an der Berliner Universität im Kreise der wissenschaftlichen Freunde und Collegen aus der Akademie höher schätzte.

Als aber Kummer im Jahre 1883 wegen hohen Alters von der Lehrthätigkeit zurücktrat, übernahm Kronecker eine ordentliche Professur an der Berliner Universität. Den dadurch vermehrten Lehrpflichten in Vorlesungen und Seminar kam er mit grösstem Eifer nach. Seine den verschiedensten Nationalitäten angehörigen Schüler, denen er allen ein warmes persönliches Interesse entgegenbrachte, hingen mit grösster Verehrung und Dankbarkeit an ihm. Manche sind darunter, die seine Ideen selbständig weiter gebildet haben. Die ihm nach Borchardt's Tod zugefallene Redaction des Crelle'schen Journals leitete er seit dem Jahre 1881 mit Umsicht und Gewissenhaftigkeit.

Lassen Sie mich schweigen von den Ehren und Auszeichnungen, die ihm ungesucht in reichem Masse von Regierungen und gelehrten Gesellschaften zu Teil wurden; aber ich will dem Bilde noch einige Züge hinzufügen, die geeignet sind, den ausserordentlichen Mann im Kreise seiner Freunde und Collegen und im öffentlichen Leben zu kennzeichnen, Züge, die ich den Mitteilungen des Sohnes des Verstorbenen verdanke.

Vermöge seiner grossen Erfahrung und Tüchtigkeit in Dingen des praktischen Lebens, seiner Gewandtheit im klaren und formvollendeten schriftlichen und mündlichen Ausdruck hat er sich auch den geschäftlichen Angelegenheiten, die seine Stellung als Mitglied der Akademie und der Facultät mit sich brachten, mit grossem Eifer und Erfolg gewidmet. Die mustergültige Ordnung der Angelegenheiten der akademischen Druckerei, die Neuredaction der Akademie-Statuten sind vorzugsweise sein Werk. Auch fungirte er erfolgreich als Mitglied des wissenschaftlichen Beirats des geodätischen Instituts bis zu dem Zeitpunkt, wo dieser Beirat durch ministerielle Verfügung aufgelöst wurde.

In vielen wichtigen Fragen, die das Wohl der Universität und der

Akademie betrafen, war sein Rat von entscheidendem Einfluss, und stets war er bereit, durch seine Erfahrung und praktische Tüchtigkeit nicht nur dem Gemeinwohl, sondern auch seinen Freunden in wissenschaftlichen wie in persönlichen Angelegenheiten zu raten und zu helfen.

Sein Haus war eine Stätte heiterer Geselligkeit. Er liebte es, seine Freunde und deren Familien in kleinerem und grösserem Kreise um sich zu versammeln. Er hatte es besonders gern, wenn diese Abende durch Musik verschönt wurden; diese war ihm überhaupt die liebste der Künste; er hat das Klavierspiel und in seiner Jugend auch den Gesang eifrigst gepflegt, sich auch in früheren Zeiten in eigenen Compositionen versucht.

Tieferes Interesse und Verständnis brachte er aber auch den bildenden Künsten entgegen. Seine Ferienreisen, die er alljährlich innerhalb Deutschlands, nach Oesterreich, der Schweiz und Italien, nach Frankreich, Holland und Belgien, nach Grossbritannien und Skandinavien unternahm, galten neben der körperlichen und geistigen Erholung und der Anknüpfung und Erhaltnng der Verbindung mit wissenschaftlichen Freunden, dem Genuss der schönen Natur und dem Studium der Kunstwerke dieser Länder.

Für das klassische Altertum und seine Cultur hatte er stets eine grosse Vorliebe, und war in dem Meinungsstreit der letzten Jahre ein Gegner der Realschulbildung. Sein eigenes Interesse an der griechischen Sprache und Litteratur bethätigte er als eifriges Mitglied der „Graeca“, einer geselligen Vereinigung, die sich mit der Uebersetzung und Erläuterung griechischer Klassiker beschäftigte, zu der ausser den bedeutendsten Fachmännern der Berliner Universität und Akademie auch aus anderen Lebenskreisen gebildete und hochstehende Männer zählten.

Auch in der Politik ist Kronecker einmal hervorgetreten, als im Jahre 1869 der Finanz-Minister Camphausen den Gesetzentwurf über die Consolidation der Preussischen Staatsschuld einbrachte. Kronecker bekämpfte in einer Broschüre, der ausführliche Tabellen und Berechnungen beigegeben sind, diesen Gesetzentwurf, den er für nachteilig hielt, freilich ohne Erfolg.

In seinen politischen Anschauungen war Kronecker 1848 und in den folgenden Jahren liberal, hat sich aber später gewendet. Er gehörte zu den ersten seines Kreises, die Bismarck's deutschen Beruf erkannten und blieb bis zu seinem Lebensende ein enthusiastischer Bewunderer des ersten deutschen Kanzlers. Den glücklichen Ausgang des Krieges 1870/71 sah er voraus. Am 30. Juli 1870, also vor der

Schlacht bei Weissenburg, schreibt er an seine Frau, nachdem er die materiellen und sittlichen Grundlagen der deutschen Rüstung geschildert: „Sonst erhob eine feste Macht Frankreichs oder sein Bewusstsein der grossen Errungenschaften seiner Revolution den Mut seiner Armeen, selbst wenn sie einen Misserfolg hatten, — heut ist alles morsch und mürbe, und nach kurzem Donner der Kriegsgeschütze wird jenes Gebäude des zweiten Kaiserreichs zerfallen, dessen Glanz doch nur der eines Theaterpompes ist und dessen faule Grundlage nur auf der Vernichtung alles Sittlichen beruht."

Seine religiöse Weltanschauung entsprach von der Zeit an, da er in den oberen Klassen des Gymnasiums am christlichen Religionsunterricht teilnahm, den Lehren des evangelischen Christentums, in denen er seine Kinder erziehen liess. Er selbst zögerte aus Gewissensbedenken mit seinem Uebertritt zum Christentum bis in sein letztes Lebensjahr.

Kronecker war, obwohl von sehr kleiner Statur, bis in seine letzte Lebenszeit körperlich rüstig, in früherer Zeit ein guter Turner und Schwimmer, später ein tüchtiger Bergsteiger. Seit dem Tode seiner Frau (23. Aug. 1891) war er körperlich und seelisch gebrochen, wenn auch der Geist noch in der gewohnten Wissenschaft fortarbeitete. Mitte Dezember befiel ihn eine Bronchitis, die die gesunkenen Kräfte rasch aufzehrte und am 29. Dez. 1891 seinem reichen Leben ein Ende machte. Sein Name aber wird in der Wissenschaft fortleben und unter den besten mit Ehren genannt werden.

Schriften von **L. Kronecker***).

1845.

1. Beweis, dass für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}=0$ irreductibel ist. J. für Math. XXIX. 280.
2. De unitatibus complexis. Dissertatio inauguralis. §§ 1—16. Berolini. 35 S.

1853.

3. Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Monatsber. 365—374. Uebersetzt in Serret, Cours d'Algèbre supérieure, I. Aufl. Note XIII. 560—569: Sur les équations résolubles algébriquement (1854), in den späteren Auflagen ebenfalls abgedruckt.

---

*) Nach dem durch K. Hensel vervollständigten Kataloge Kronecker's chronologisch geordnet von E. Lampe.

1854.

4. Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression (x^n-1). Journ. de Math. (1) XIX. 193—208.
5. Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation. Journ. de Math. (1) XIX. 279—280.

1856.

6. Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. Journ. de Math. (2) I. 385—391.
7. Sur une formule de Gauss. Journ. de Math. (2) I. 392—395.
8. Démonstration d'un théorème de M. Kummer. Journ. de Math. (2) I. 396—398.
9. Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ où n dénote un nombre premier. Journ. de Math. (2) I. 399—400.
10. Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Monatsber. 203—215.

1857.

11. Ueber elliptische Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet. Monatsber. 455—460.
    Uebersetzt von Hoüel in Journ. de Math. (2) III. 265—270: Sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres (1858).
12. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. J. für Math. LIII. 173—175.
13. Ueber complexe Einheiten. J. für Math. LIII. 176—181.

1858.

14. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Comptes Rendus XLVI. (1. Sem.) 1150—52.
15. Ueber Gleichungen des siebenten Grades. Monatsber. 287—289.

1859.

16. Ueber kubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten. J. für Math. LVI. 188.
17. Extrait d'une lettre de M. Kronecker à M. Brioschi (sur la théorie des substitutions). Annali di Mat. (2) II. 131.

1860.

18. Ueber die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. J. für Math. LVII. 248—255.
    Uebersetzt von Hoüel in Journ. de Math. (2) V. 289—299: Sur le nombre de classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs (1860).

1861.

19. Mitteilung über algebraische Arbeiten. Monatsber. 609—617.
    Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 279—286: Note de M. Kronecker sur ses travaux algébriques (1866).

20. Ueber die Gleichungen fünften Grades. J. für Math. LIX. 306—310. (Teilweiser Abdruck von Nr. 19.)
21. Ueber die Bedingungen der Integrabilität. J. für Math. LIX. 311—312.
22. Antrittsrede. Monatsber. 637—639. (Erwiederung von Encke. 640—642).

1862.

23. Ueber eine neue Eigenschaft der quadratischen Formen von negativer Determinante. Monatsber. 302—311.
Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 287—294: Sur une nouvelle propriété des formes quadratiques de déterminant négatif (1866).
24. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. Monatsber. 363—372.
Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 295—302: Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques (1866).

1863.

25. Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels elliptischer Functionen. Monatsber. 44—50.
Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 303—308: Sur la résolution de l'équation de Pell au moyen des fonctions elliptiques (1866).
26. Ueber die Klassenanzahl der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. Monatsber. 340—345.

1864.

27. Ueber den Gebrauch der Dirichlet'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen. Monatsber. 285—303.

1865.

28. Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrerer Variabeln. Monatsber. 686—691.

1866.

29. Ueber bilineare Formen. Monatsber. 597—612.
Abgedruckt im J. für Math. LXVIII. 273—285. (1868).

1868.

30. Bemerkungen zu Weierstrass' Abhandlung: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. 339—346.

1869.

31. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsber. 159—193.
31a. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsber. 688—698.
32. Sur le théorème de Sturm. Comptes Rendus LXVIII. 1078—82.

33. Zur Potentialtheorie. J. für Math. LXX. 246—248.
34. Bemerkungen zur Determinantentheorie. J. für Math. LXXII. 152—175.
35. Bedenken gegen die Annahme des Gesetzentwurfs betreffend die Konsolidation preussischer Staatsanleihen. Berlin. Dümmler.
36. Tabelle zum Konsolidationsgesetz. Berlin. Dümmler.

1870.

37. Bemerkungen zu du Bois-Reymond's Arbeit: Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. Zweite Abhandlung. Monatsber. 569—570.
38. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. Monatsber. 881--889.

1872.

39. Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Monatsber. 490 bis 504.

    Uebersetzt in Darboux Bull. IV. 256—271: Sur la théorie algébrique des formes quadratiques (1873).

    Darstellung dieser Untersuchungen nach einer Bearbeitung derselben von Kronecker: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. V. Aufl. S. 271—278.
40. Zeller's Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Monatsber. 846—847.

1873.

41. Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Monatsber. 117—154.

1874.

42. Ueber Scharen von quadratischen Formen. Monatsber. 59—76.
43. Nachtrag zu diesem Aufsatze. 149—156.
44. Ueber Scharen von quadratischen und bilinearen Formen. Monatsber. 206—232.
45. Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires. Comptes Rendus LXXVIII. 1181—1182.
46. Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. Monatsber. 397—447.

1875.

47. Ueber quadratische Formen von negativer Determinante, und Bemerkungen über Reuschle's Tafeln complexer Primzahlen. Monatsber. 223—238.
48. Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes. Monatsber. 267 bis 274.

    Italienische Uebers. von A. Sparagna in Boncompagni Bull. XVIII. 244--249: Intorno alla storia della legge di reciprocità, osservazioni del prof. Leopoldo Kronecker (1885).

49. Ueber die algebraischen Gleichungen, von denen die Teilung der elliptischen Functionen abhängt. Monatsber. 498—507.

1876.

50. Bemerkung zu der Abhandlung No. 49 mit Bezug auf eine Notiz von Herrn Sylow. Monatsber. 242.
51. Ueber das Reciprocitätsgesetz. Monatsber. 331—341. Zur Mitteilung von Schering. Monatsber. 330—331.
    Franz. Uebers. in Darboux Bull. (2) IV. 182—192: Sur la loi de réciprocité (1880).

1877.

52. Ueber Abel'sche Gleichungen. Monatsber. 845—851.

1878.

53. Notiz über Potenzreihen. Monatsber. 53—58.
54. Ueber Sturm'sche Functionen. Monatsber. 95—121.
55. Ueber die Charakteristik von Functionen-Systemen. Monatsber. 145—152.

1879.

56. Entwickelungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Monatsber. 205—229.

1880.

57. Ueber die Irreductibilität von Gleichungen. Monatsber. 155—162.
58. Ueber die Potenzreste gewisser complexer Zahlen. Monatsber. 404—407.
59. Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Monatsber. 686—698, 854—860.
60. Ueber die symmetrischen Functionen. Monatsber. 936—948.

1881.

61. Ueber die in Heun's Aufsatz behandelten Determinanten. Göttinger Nachr. 271—279.
62. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Monatsber. 535—600.
63. Adresse der Akademie zu E. E. Kummer's Doctorjubiläum. Monatsber. 895—898.
64. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Monatsber. 1165—1172.
65. Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen. J. für Math. XCI. 301—334.
66. Ueber Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten. Coll. Math. in mem. Chelini. 224—231.

1882.

67. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. J. für Math. XLII. 1—122.

68. De unitatibus complexis. Dissertatio inaug. arithmetica (vergl. No. 2; §§ 17—20 a. a. O. nicht veröffentlicht). J. für Math. XCIII. 1—52.
69. Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum, 10. September 1881. Berlin. G. Reimer. (Enthaltend Widmung, No. 67 u. No. 68 vereinigt.)
    Darstellung des Inhaltes durch J. Molk in Darboux Bull. (2) VIII. 145—154.
70. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Sitzungsber. Berl. 821 bis 824.
71. Die Composition Abel'scher Gleichungen. Sitzungsber. Berl. 1059 bis 1064.
72. Die kubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs $\sqrt{-31}$. Sitzungsber. Berl. 1151—1154.
73. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. J. für Math. XCIII. 338—364.
74. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen. J. für Math. XCIII. 365—366.

1883.

75. Sur les unités complexes. Comptes Rendus XCVI. 93—98, 148—151, 216—221.
    Mit dieser Arbeit hängt eng zusammen und rührt inhaltlich zum Teil von Kronecker her:
76. Sur les unités complexes, par M. J. Molk. Darboux Bull. (2) VII. 133 bis 136.
77. Ueber die Bernoulli'schen Zahlen. J. für Math. XCIV. 268—269.
78. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductiblen Factoren. J. für Math. XCIV. 344—348.
79. Zur Theorie der elliptischen Functionen. I—V. Sitzungsber. Berl. 497 bis 506, 525—530.
80. Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Sitzungsber. Berl. 717—729.
80a. Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Sitzungsber. Berl. 949—956.
81. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Sitzungsber. Berl. 957—960.

1884.

82. Ueber bilineare Formen mit vier Variablen. Abhandl. Berl. Ak. II. (1883). 1—60.
83. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsber. Berl. 519—537.
84. Desgl. (veränderte Darstellung von No. II der vorigen Arbeit). J. für Math. XCVI. 348.
85. Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. Sitzungsber. Berl. 539—540.
86. Beweis des Puiseux'schen Satzes. Sitzungsber. Berl. 543—548.
87. Ueber den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsber. Berl. 645—647.

88. Der dritte Gauss'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, in vereinfachter Darstellung. J. für Math. XCVII 93—94.
89. Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen, welches in der vorstehenden Arbeit des Herrn von Helmholtz behandelt ist. J. für Math. XCVII. 141—145.
90. Additions au mémoire sur les unités complexes. Comptes Rendus IC. 765—771.
91. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. Sitzungsber. Berl. 1071—1080.
92. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. Sitzungsber. Berl. 1179—1193, 1271—1299.
93. E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über tierische Elektricität. II. Band. II. Abt. S. 489—490. (Anmerkung.)

1885.

94. Sulle superficie algebriche irreduttibili aventi infinite molte sezioni piane che si spezzano in due curve. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 323—324.
95. Bemerkungen zu Herrn Ernst Schering's Mitteilung (über das Reciprocitätsgesetz). Sitzungsber. Berl. 117—118.
96. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. Sitzungsber. Berl. 383 bis 396, 1045—1049.
97. Anmerkung zur Note des Herrn A. H. Anglin: „Zur Theorie der symmetrischen Functionen. J. für Math. XCVIII. 176.
98. Sur le second théorème de la moyenne par M. Mansion, avec un extrait d'une lettre de M. L. Kronecker (Une équivalence algébrique). Mathesis V. 97—102.
99. Ueber das Dirichlet'sche Integral. Sitzungsber. Berl. 641—665.
100. Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. Sitzungsber. Berl. 841—862.
101. Zur Theorie der elliptischen Functionen. VI—X. Sitzungsber. Berl. 761 bis 784.
102. Ueber den Cauchy'schen Satz. Sitzungsber. Berl. 785—787.
103. Briefwechsel zwischen Gustav Lejeune Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker, herausgegeben von Ernst Schering. Göttinger Nachr. 361—382.

1886.

104. Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. J. für Math. IC. 329—371.
105. Ein Satz über Discriminanten-Formen. J. für Math. C. 79—82.
106. Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variablen. Sitzungsber. Berl. 251—253.
107. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XI. Sitzungsber. Berl. 701 bis 780.
108. Ueber den Zahlbegriff. Samml. philos. Aufs. (Zeller). 263—274.

109. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. Comptes Rendus CIII. 980—987.
110. Darlegung arithmetischer Eigenschaften der Kugelfunctionen. Tageblatt der Naturforsch. Vers. LIX. 123.
111. Zwei Noten zu der Abhandlung von E. E. Kummer: Zwei neue Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze. J. für Math. C. 12 u. 16.

1887.

112. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. J. für Math. C. 490 bis 510.
113. Ueber den Zahlbegriff (vgl. No. 108). J. für Math. CI. 337—355.
114. Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln. J. für Math. CII. 260—272.
115. Vorwort zum hundertsten Bande des J. für Math.

1888.

116. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Sitzungsber. Berl. 417—423.
117. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. Sitzungsber. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016.
118. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. Sitzungsber. Berl. 439—442.

1889.

119. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XII—XIX. Sitzungsber. Berl. 53—63, 123—135, 199—220, 255—275, 309—317.
120. Ueber symmetrische Systeme. Sitzungsber. Berl. 349—362.
121. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. Sitzungsber. Berl. 479—505, 603—614.
122. Ueber eine summatorische Function. Sitzungsber. Berl. 867—881.
123. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (Auszug aus No. 96_2). J. für Math. CIV. 348—351.
124. Paul du Bois-Reymond. J. für Math. CIV. 352—354.
125. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. J. für Math. CV. 157—159, 345—354.
126. Summirung der Gauss'schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$. J. für Math. CV. 267—268.
127. Vorwort zu G. Lejeune Dirichlet's Werken, Bd. I, S. V—VI.

1890.

128. Ueber die Dirichlet'sche Methode der Wertbestimmung der Gauss'schen Reihen. Hamburger Festschr. 32—36.
129. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XX—XXII. Sitzungsber. Berl. 99—120, 123—130, 219—241, 307—318, 1025—1029.
130. Ueber orthogonale Systeme. Sitzungsber. Berl. 525—541, 602—607, 692—699, 873—884, 1063—1080.

131. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. Sitzungsber. Berl. 1081—1088.
132. Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen. Sitzungsber. Berl. 1225—1237.
133. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Sitzungsber. Berl. 1375—1383.
134. Bemerkungen über die von Gauss mit [x] bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x. J. für Math. CVI. 346—348.
135. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen. J. für Math. CVII. 135—136.
136. Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. J. für Math. CVII. 254—261.
137. Ueber eine Stelle in Jacobi's Aufsatz: „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes. J. für Math. CVII. 349—352.

1891.

138. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Sitzungsber. Berl. 9—17, 33—44.
139. Die Legendre'sche Relation. Sitzungsber. Berl. 323—332, 343—358, 447—465, 905—908.
140. Die Clausius'schen Coordinaten. Sitzungsber. Berl. 881—890.
141. Sophie von Kowalevsky. J. für Math. CVIII. 88.
142. Eine analytisch-arithmetische Formel. J. für Math. CVIII. 348.
143. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln. Sitzungsber. Berl. 653—659, J. für Math. 325—334 (Abdruck nebst einem Verzeichnis der Jacobi'schen Vorlesungen).

1892.

144. Auszug aus einem Schreiben von L. Kronecker an Herrn Prof. G. Cantor. Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. I. 23—25.

Heinrich Schröter*).

Von

R. Sturm.

Heinrich Eduard Schröter wurde am 8. Januar 1829 in Königsberg i. Pr. geboren. Er war der älteste von drei Söhnen eines angesehenen Kaufmanns, der als technisches Mitglied des früheren Kommerzien- und Admiralitäts-Kollegiums in Königsberg den Titel Kommerzienrat führte und später zum Geheimen Kommerzienrat ernannt wurde. Sein Schulunterricht begann mit dem Besuche einer Privatschule; mit 11 Jahren trat er in die Quarta des Altstädtischen Gymnasiums ein. Dieses Gymnasium hatte damals in dem Professor Müttrich einen hervorragenden Lehrer der Mathematik, welcher es in ausgezeichneter Weise verstand, die Liebe für diesen Unterrichtsgegenstand bei seinen Schülern zu entflammen, und wiederholt die fähigeren Primaner über das Ziel des Gymnasial-Unterrichtes hinausführte. So wurde auch Schröter schon auf dem Gymnasium mit den Elementen der Differentialrechnung bekannt gemacht. Clebsch, der 1872 als Professor in Göttingen gestorben ist, Carl Neumann in Leipzig und Lipschitz in Bonn sind ebenfalls in jener Zeit Schüler dieses Gymnasiums gewesen.

Schon auf der Schule zeichnete sich Schröter durch Fleiss, Ordnungsliebe und Sauberkeit aus; mathematische Hefte aus der Tertianerzeit, die sich in seinem Nachlasse vorfanden, bekunden nicht nur diese Eigenschaften, sondern lassen auch durch die Präcision des Ausdruckes und die Selbständigkeit, mit der der Verfasser beherrschend sich über den von der Schule behandelten Stoff stellt, den künftigen Mathematiker erkennen. Auch ein gewisses manuelles Geschick war ihm eigen; er

*) Aus der Chronik der Universität Breslau für 1891/92 mit einigen Kürzungen.

verfertigte während der letzten Schuljahre, oft aus den primitivsten Mitteln, stereometrische Modelle und physikalische Apparate, trieb Bau- und Planzeichnen.

Wie mancher seiner Fachgenossen gedachte er sich einem technischen Studium, dem Baufache, zu widmen und trat nach der Reifeprüfung bei einem Feldmesser in die Lehre.

Allein er gab dies bald wieder auf und bezog im Alter von 19 Jahren die Universität seiner Vaterstadt.

Diese nahm damals in Bezug auf Mathematik einen hohen Rang unter den deutschen Universitäten ein. Zwar war Jacobi, der dort seit den zwanziger Jahren gewirkt, die Wissenschaft nach allen Seiten hin bereichert und zuerst in Deutschland eine mathematische Schule begründet hatte, schon nach Berlin übergesiedelt, um in der freieren Stellung eines Akademikers die letzten Jahre seines kurzen Lebens zuzubringen; aber er hatte in seinem Schüler Richelot einen würdigen Nachfolger hinterlassen, der in seinem Sinne weiterwirkte. Franz Neumann, der grosse Meister und Lehrer der mathematischen Physik, — heute der Nestor der deutschen Gelehrten —, stand damals in der Vollkraft seiner Jahre und seiner schöpferischen Thätigkeit. Endlich lehrte dort, in seiner ersten akademischen Stellung, auch ein geborener Königsberger wie Richelot und Neumann, Otto Hesse, welcher, Jacobi's algebraische Arbeiten fortsetzend, der Begründer der algebraischen Behandlung der analytischen Geometrie geworden ist.

Am meisten schloss sich Schröter an Richelot an, der ihn in Jacobi's functionentheoretische Arbeiten einführte, ihm grosses Wohlwollen entgegenbrachte und später mit ihm in Freundschaft verbunden war.

In Königsberg diente Schröter sein Freiwilligen-Jahr bei der Artillerie ab und begab sich dann auf 2 Jahre nach Berlin, um hier vorzugsweise unter Dirichlet und Steiner seine Studien fortzusetzen.

Die Vorlesungen über Zahlentheorie, über bestimmte Integrale und über partielle Differentialgleichungen, welche er später wiederholt gehalten, sind die Frucht seines fleissigen Studiums bei Dirichlet; am meisten aber hat doch in Berlin Jacob Steiner auf ihn gewirkt durch die Vorlesungen und wohl vor allem durch den persönlichen Verkehr, durch welchen er diesen seinen Schüler auszeichnete. Für die wissenschaftliche Richtung, welche Schröter den grössten Teil seines Lebens eingehalten hat, ist diese Studienzeit bei Steiner entscheidend gewesen.

Für seine ersten Arbeiten war jedoch die von Richelot empfangene Anregung noch bestimmend. Er kehrte nach Königsberg zurück, versenkte sich von neuem in Jacobi's Arbeiten und promovirte am 13. Juli 1854 mit einer Abhandlung aus der Theorie der elliptischen Functionen: De aequationibus modularibus. Bald darauf unterzog er sich auch der Staatsprüfung für das Gymnasial-Lehrfach und erwarb sich die unbedingte Lehrbefähigung für die Mathematik, entschloss sich jedoch zur Universitäts-Laufbahn und habilitirte sich an der Universität Breslau im Herbste 1855 mit einer ebenfalls aus der Theorie der elliptischen Functionen entnommenen Abhandlung: „Ueber die Entwicklung der Potenzen der elliptischen Transcendenten Θ und die Teilung dieser Functionen."

Im Jahre 1858 wurde er ausserordentlicher Professor, und 1861 erhielt er die ordentliche Professur, die vor ihm Kummer und Joachimsthal inne gehabt haben.

Der Breslauer Universität hat er bis zu seinem Tode angehört, nachdem er 1868, als Clebsch von Giessen nach Göttingen übersiedelte, einen Ruf an jene Universität abgelehnt hatte. —

Seine ersten Arbeiten gehören, wie schon erwähnt, der Theorie der elliptischen Functionen an; sie behandelten Probleme, die damals zu den schwierigsten gehörten, und sind auch heute noch anerkannt und wertvoll.

Litterarisch hat er sich später nur selten mit diesem Gebiete der höheren Analysis beschäftigt; sein Interesse aber hat er ihm immer bewahrt, regelmässig kehrten in den Reihen seiner Vorlesungen und Seminar-Uebungen die elliptischen Functionen wieder, ihnen entnommene Dissertationen sind unter seiner Leitung entstanden.

Aber bald machte sich Steiner's Einfluss geltend; in den ersten Breslauer Jahren erschienen mehrere Abhandlungen, in denen Schröter Steiner's Spuren folgte, vor allem der schöne Aufsatz über die Raumcurven dritter Ordnung, der für die Theorie dieser Curven grundlegend geworden ist. In dieser Zeit war auch der Verfasser Schröter's Schüler und empfing von ihm die Anregung zu seinen synthetischen Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung.

Nach dem Tode Steiner's 1863 übernahm dann Schröter eine grössere Arbeit, durch welche er dauernd der synthetischen Geometrie gewonnen und ein Hauptvertreter dieser Richtung der mathematischen Forschung wurde. Von Steiner's hinterlassenen Manuscripten wurde ihm der Teil der Lehre von den Kegelschnitten übergeben, in welchem

die projectiven Erzeugungen dieser Curven zu Grunde gelegt sind. Es handelte sich darum, diese vielfach auf losen Blättern zerstreuten Notizen Steiner's zu ordnen und mit der eigenen Nachschrift Steiner'scher Vorlesungen zu verweben.

Daraus ist das 1867 in erster, 1876 in zweiter Auflage erschienene Werk hervorgegangen: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften. Den ersten Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Behandlung, hatte Geiser in Zürich, der Neffe Steiner's, selbst übernommen.

Steiner-Schröter'sche Vorlesungen: so wird dieses Buch gewöhnlich genannt, in Anbetracht des nicht unerheblichen Teils eigener Leistung Schröter's in Beweisführung und Darstellung.

Neben Reye's gleichzeitig erschienener Geometrie der Lage hat dasselbe seitdem wohl allen, in Deutschland und ausserhalb, die sich mit der synthetischen Geometrie vertraut machen wollten, zur Einführung gedient und wesentlich dazu beigetragen, dass die Gefahr, in den Hintergrund gedrängt zu werden, welche nach Steiner's Tode derselben drohte, von ihr abgewandt wurde.

Indem Schröter an seiner Universität eine Stätte schuf, wo sie eifrig gepflegt wurde, und ihr so einen Schülerkreis gewann, hob er sie zu grösserer Anerkennung und bewirkte, dass sie auch an anderen Hochschulen unter die Zahl der regelmässigen Vorlesungen aufgenommen wurde.

Steiner selbst hatte einst die Abfassung eines grossen Werkes über synthetische Geometrie geplant, das fünf Teile umfassen sollte: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Aber davon ist nur der erste Teil (1832) erschienen, in dem er über die Kegelschnitte und die geradlinigen Flächen der 2. Ordnung nicht hinausgekommen ist.

Als die Berliner Akademie die Herausgabe der Gesammelten Werke ihres grossen Geometers unternahm, welche dann 1881 und 1882 erschienen, revidirte Schröter in ihrem Auftrage die genannte Schrift.

Er war aber in dieser Zeit schon mit einer selbständigen Fortsetzung des Planes Steiner's beschäftigt. Im Jahre 1880 erschien von den drei Bänden, mit denen es ihm noch vergönnt war, den aufgenommenen Steiner'schen Plan fortzusetzen, das umfangreichste: Die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde, welches wohl

als das Hauptwerk Schröter's bezeichnet werden darf. Bald nach dem Erscheinen desselben, am 6. Januar 1881, wählte ihn die Akademie zu Berlin, nachdem sie ihm am 6. Juli 1876 den von Steiner gestifteten Preis für synthetische Geometrie „als Anerkennung für seine Verdienste um Erhaltung, Verbreitung und weitere Ausbildung der geometrischen Methoden Steiner's“ verliehen hatte, zu ihrem Correspondenten, und am 9. Dezember 1882 that dies die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.

Dem genannten Buche, in welchem umfangreiche Abschnitte der Theorie der in seinem Titel genannten Flächen und Curven ihre erste synthetische Darstellung gefunden haben, folgten dann 1888 die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung und 1890 die Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Species.

Zwischen diesen grösseren Arbeiten veröffentlichte er eine ziemliche Anzahl von Abhandlungen in verschiedenen Zeitschriften, vornehmlich dem Journal für Mathematik, den Mathematischen Annalen und der Zeitschrift für Mathematik und Physik (im ganzen hat er bez. 19, 9, 8 Abhandlungen diesen Journalen übersandt, zu denen noch 4 in anderen veröffentlichte kommen). Zur Redaction des erst genannten, des ältesten von den deutschen mathematischen Journalen, gehörte er in den letzten Jahren, neben Weierstrass, von Helmholtz und Fuchs, als beratendes Mitglied.

Diese Arbeiten stehen zum grösseren Teil mit den von ihm verfassten Büchern in Zusammenhang; sie bringen Nachträge, oder sind Vorläufer. So kennzeichnen denn die Bücher und die sich ihnen anschliessenden Abhandlungen fünf Gebiete der Geometrie, in denen sich Schröter forschend und darstellend bewegt hat: die Curven und Flächen zweiter Ordnung, die ebenen und unebenen Curven dritter Ordnung, die eine Art der Raumcurven vierter Ordnung. In den Abhandlungen hat er sich noch mit den Flächen dritter Ordnung und in seiner letzten Lebenszeit insbesondere mit den sogenannten Configurationen beschäftigt, bei denen es ihm vor allem auf eine möglichst einfache Herstellungsweise ankommt. Diese Untersuchungen stehen daher einer weiteren Gruppe von Arbeiten Schröter's nahe, die für ihn charakteristisch sind und in denen er auf elementarem Wege den Eigenschaften und dem Zusammenhang der Gebilde nachging oder die „fertige“ Construction einer Aufgabe mitteilte.

Hierzu gehört die Abhandlung, welche er im November 1891, kurz vor seinem Tode, beendet hat.

Fern gehalten hat sich Schröter von gewissen neuen Ideen; von

nichteuklidischer oder mehrdimensionaler Geometrie finden wir nichts in seinen Arbeiten; für speculative Betrachtungen war er nicht geschaffen. Wie er unklare Empfindungen im Leben von sich wies, so verhielt er in der Wissenschaft sich ablehnend gegen Theorien, die sich der Anschauung entziehen.

In weiser Selbstbeschränkung hat er sich auf ein engeres Gebiet begrenzt, dessen Pflege und Ausbildung seine Leidenschaft war, und in das er sich immer mehr versenkte.

In der Klarheit der inneren Anschauung, in der Energie des auf fest umschriebene Ziele gerichteten Denkens beruht seine Stärke. Anerkannt ist die Durchsichtigkeit seiner Darstellung; um verständlich zu sein, scheute er nicht die Breite; er mied die moderne Knappheit, die oft nicht weit von Unverständlichkeit entfernt ist, und liess sich behaglich gehen, wie es die älteren Mathematiker gethan haben. Seine Arbeiten lesen sich leicht und bedürfen keines grossen Apparates von Zwischenarbeit und weiterer Lectüre; sie werden deshalb auch dauernd verständlich sein.

Nicht das Erkennen einer wissenschaftlichen Wahrheit war für Schröter Selbstzweck, auch nicht, sie überhaupt irgendwie zu begründen; sein Erkenntnistrieb ging auf Ordnung und Zusammenhang; er ruhte nicht, bis er ein geometrisches Gebilde nach allen Beziehungen erkannt, die gegenseitige Abhängigkeit seiner verschiedenen Eigenschaften erforscht und die natürlichsten Beweismomente aufgefunden hatte. Bei der Ausgestaltung seiner Arbeiten wurde er von der Ueberzeugung geleitet, dass die Mathematik ebensowohl eine Kunst als eine Wissenschaft sei.

Wenn Schröter die Lagenbeziehungen in grosser Anschaulichkeit darzulegen wusste, jedoch im allgemeinen ohne Versinnlichungsmittel, — denn er hielt es mit Steiner's Ausspruch, den er einem seiner Bücher als Motto vorangesetzt hat, dass räumliche Betrachtungen dann allein richtig aufgefasst werden, wenn sie nur durch die innere Vorstellung angeschaut werden —; so hat er doch auch den Masseigenschaften ihr Recht werden lassen und bisweilen mit einer gewissen Vorliebe sich mit ihnen beschäftigt. Reich an metrischen Beziehungen ist vornehmlich der zweite Teil seines Buchs von 1880; ich möchte diese Formeln insbesondere als Schröter's geistiges Eigentum bezeichnen; er hat viel Scharfsinn für ihren Beweis aufgewandt und eine besondere Begabung für solche Beweise besessen; es scheint, dass er die Leistungsfähigkeit der synthetischen Geometrie auch nach dieser ihr etwas ferner liegenden Richtung habe zeigen wollen.

Der Vortrag Schröter's war nicht das gefällige Darbieten eines

fertigen Stoffes; der Zuhörer fühlte das Arbeiten des Geistes, das Lebendigwerden der Gedanken; für seine Schüler gab es kein blosses Aufnehmen: Mitarbeiten war die Losung.

Die Seminar-Uebungen schloss er gern an die eigenen, bisweilen noch im Werden begriffenen Arbeiten an; in ihnen gab er sein Bestes, durch sie hat er am nachhaltigsten gewirkt.

Zwar freundlich und hülfreich gegen jedermann, war er im Kerne seines Wesens eine ostpreussisch-spröde Natur. Er verschenkte sein Vertrauen nicht leicht; wer es aber durch Zuverlässigkeit und wissenschaftlichen Ernst gewonnen, der konnte sich fest auf ihn stützen.

Besonnen, friedliebend, stets gleichmässig gestimmt, war er immer bereit, zu versöhnen und entgegengesetzte Meinungen auszugleichen. Nie versagte er seine herzliche Teilnahme am ernsten wie am heitern Gespräche; nichts Niedriges wagte sich an die Schlichtheit und Lauterkeit seiner Natur heran. Einfach und anspruchslos und doch erhobenen Hauptes ging er durchs Leben; auf ihm ruhte der Adel der Wissenschaft und der vornehmen Gesinnung*).

Erholung von der geistigen Arbeit fand Schröter an einem reich gesegneten Leben in der Familie, in der der Frohsinn zu Hause war, in der Pflege der Musik — er war kunstgeübter Dilettant im Geigenspiel, — in der Turnkunst und in jährlichen Reisen, von denen die im Frühjahr 1877 unternommene Reise nach Italien erwähnt werden mag, auf der er in Rom mit Cremona und dem auch dort weilenden Archer Hirst bekannt wurde und viel mit ihnen verkehrte; Hirst bezeichnete es als einen Hauptgewinnst seines damaligen Aufenthalts in Rom, dass er Schröter kennen gelernt habe**.)

Eine grosse Rolle in Schröter's Leben hat das Turnen gespielt: er war 25 Jahre lang der Vorsitzende des Alten Breslauer Turnvereins. Und doch sollte ihn, der zeitlebens den Körper gestählt, der Tod so frühzeitig dahinraffen.

---

*) Da meine eigene Studienzeit schon etwas weit zurückliegt und ich in den letzten 20 Jahren Schröter nur selten gesehen habe, so habe ich in Bezug auf seine persönlichen Eigenschaften einem jüngeren Schüler und Freunde, der mit ihm dauernd in Berührung geblieben ist, das Wort gegeben; auch einige Aeusserungen über Schröter's Arbeiten stammen von demselben.

**) Hirst, fast gleichaltrig mit Schröter, — er wurde am 22. April 1830 geboren — war auch unmittelbarer Schüler Steiner's und ist bald nach Schröter's Tode, am 16. Februar 1892, gestorben. Auch De Paolis, der vielfach synthetisch gearbeitet, hat uns in diesem Jahr (am 24. Juni) der Tod entrissen.

Im Februar 1891 traf ihn eine Lähmung beider Beine; der Zustand besserte sich wiederum, so dass er, sich stützend, kleine Spaziergänge unternehmen konnte und im Sommer auch seine amtliche Thätigkeit, zu Hause unterrichtend, noch nicht ganz aufgab. Dann wurde es wieder schlimmer: er musste das Gehen ganz aufgeben. Ein längerer Aufenthalt in Warmbrunn half nichts, ebensowenig eine im November vom beratenden Nervenarzte verordnete strenge Kur; Gehör und Gesicht begannen zu schwinden und am 3. Januar 1892, kurz vor vollendetem 63. Lebensjahre, erlöste ihn der Tod, in den ihm leider sein Sohn, der erkrankt zum Begräbnisse gekommen, 6 Wochen später folgte.

Schröter's Schriften.

Selbständige Schriften.

1. De aequationibus modularibus. Inaugural-Dissertation Königsberg 1854.
2. Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten Θ und die Teilung dieser Functionen. Habilitationsschrift Breslau 1855.
3. Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften, bearbeitet von Heinrich Schröter. Leipzig, erste Auflage 1867, zweite Auflage 1876.
4. Die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde. Leipzig, 1880.
5. Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Auf synthetischem Wege abgeleitet. Leipzig. 1888.
6. Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Species. Leipzig, 1890.

[Richelot. Ueber die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen. Aus einer Correspondenz mit Herrn Professor Schröter. Königsberg, 1868.]

Abhandlungen in Zeitschriften.

a) Im Journale für Mathematik.

1. Ueber Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde. Bd. 54 S. 31.
2. Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung. Bd. 56 S. 27.
3. Ueber Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Bd. 58 S. 378.
4. Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova. Bd. 62 S. 215. Vorher erschienen als Habilitationsschrift für die ordentliche Professur. Breslau 1862.
5. Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung. Bd. 62 S. 265.
6. Ueber die Steiner'sche Fläche vierten Grades. Bd. 64 S. 79. Vorher erschienen in den Monatsberichten der Berliner Akademie für 1863 S. 520,

7. Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks Bd. 68 S. 208.
8. Zur v. Staudt'schen Construction des regulären Siebenzehnecks. Bd. 75 S. 13.
9. Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume. Bd. 77 S. 105.
10. Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe. Bd. 77 S. 230.
11. Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Bd. 85 S. 26. Vorher im Auszuge: Ueber eine den Brennpunkts-Eigenschaften der Kegelschnitte analoge Eigenschaft gewisser Oberflächen zweiter Ordnung. Monatsbericht der Berliner Akademie für 1877 S. 594.
12. Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species. Bd. 93 S. 132.
13. Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche. Bd. 96 S. 282.
14. Construction des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, von denen sieben gemeinschaftliche Punkte willkürlich und unabhängig von einander gegeben sind. Bd. 99 S. 131.
15. Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn Franke in Dessau: „Ueber gewisse Linien im Dreiecke", dieses Journal Bd. 99 S. 161. Bd. 99 S. 233.
16. Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration. Bd. 100 S. 231.
17. Zurückführung der Grassmann'schen Definitionen der Curve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen. Bd. 104 S. 62.
18. Die Hesse'sche Configuration $(12_4, 16_3)$. Bd. 108 S. 269.
19. Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder. Bd. 109 S. 341.

b) In den Mathematischen Annalen.

20. Ueber perspectivisch liegende Dreiecke. Bd. 2 S. 553.
21. Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung. Bd. 5 S. 50.
22. Ueber Curven dritter Ordnung. Bd. 6 S. 85.
23. Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks. Bd. 7 S. 517.
24. Zur Construction eines äquianharmonischen Systems. Bd. 10 S. 420.
25. Ueber das Parallelhexagon auf dem geradlinigen Hyperboloide. Bd. 18 S. 428. Vorher im Auszuge: Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids. Sitzungsberichte der bayrischen Akademie für 1881.
26. Ueber cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen. Bd. 20 S. 231.
27. Metrische Eigenschaften der kubischen Parabel (Raumcurve 3. O.) Bd. 25 S. 293.
28. Das Clebsch'sche Sechseck. Bd. 28 S. 457.

c) In der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

29. Ableitung der Partialbruch- und Product-Entwickelungen für die trigonometrischen Functionen. Jahrg. 13 S. 254.

30. Bemerkung zu dem Sturm'schen Beweise des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung. Jahrg. 17 S. 508.

31. Bemerkung zu der „Notiz zu einem Satze von Chasles“ von E. Lange (diese Zeitschr. Jahrg. 26 S. 98). Jahrg. 26 S. 270.

32. Geometrischer Satz. Jahrg. 27 S. 61.

33. Bemerkungen zu Art. XXIV und XXV der „Kleineren Mitteilungen“ dieser Zeitschrift, Jahrg. 27 S. 380. Jahrg. 28 S. 178.

34. Einige Sätze über Kegelschnitte. Jahrg. 29 S. 160.

Uebersetzt ins Italienische: Teoremi relativi alle coniche iscritte, circoscritte e conjugate. Traduzione del Dr. G. Fazzari. Giornale di Mat. XXII. 262—271.

35. Ein Satz über das dem Kegelschnitte umschriebene Siebeneck. Jahrg. 33 S. 374.

36. Eine Construction für das Chasles'sche Problem der Projectivität. Jahrg. 35 S. 59.

d) In den Acta Mathematica.

37. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. Bd. 5 S. 205.

38. Ueber die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung. Bd. 14 S. 207.

e) In den Göttinger Nachrichten.

39. Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen n_3. Jahrg. 1888 S. 237.

40. Ueber die Bildungsweise und geometrische Construction der Configurationen 10_3. Jahrg. 1889 S. 193.

Heinrich Gretschel.

Von

E. Papperitz.

Am 2. Februar 1892 verschied in Dresden nach einer Operation, die ihm leider die erhoffte Heilung von einem schweren Leiden nicht mehr bringen konnte, der Professor der höheren Mathematik und darstellenden Geometrie an der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg, Bergrath Dr. phil. Heinrich Friedrich Gretschel.

Gretschel, der Sohn eines Gärtners, wurde in Prietitz bei Kamenz am 21. October 1830 geboren. Er genoss in Neustadt-Dresden den Unterricht der Realschule. Eine früh zu Tage tretende Begabung für exacte Wissenschaften veranlasste einflussreiche Gönner, ihm die Mittel zum Studium zu verschaffen. Er besuchte von 1847 an die Technische Bildungsanstalt in Dresden (die jetzige Technische Hochschule) und von 1851 bis 1854 die Universität zu Leipzig. Während dieser Jahre widmete er sich eifrig der Mathematik, Astronomie, Geographie, Geologie und Mineralogie. Zugleich verwandte er seinen Fleiss auf die Vervollständigung seiner Kenntnisse in den alten Sprachen und bestand 1853 an der Nicolaischule zu Leipzig die Maturitätsprüfung. 1854 absolvirte er ebenda die Staatsprüfung für Candidaten des höheren Schulamtes mit ausgezeichnetem Erfolge. Er übernahm hierauf eine Lehrerstellung an dem von Dr. Hauschild begründeten „Modernen Gesamtgymnasium" und erteilte überdies von 1856 ab an der Oeffentlichen Handelslehranstalt mathematischen Unterricht.

Gretschel ist vielfach litterarisch thätig gewesen. In Verbindung mit Professor Dr. H. Hirzel, später mit Dr. G. Bornemann gab er während 27 Jahren das „Jahrbuch der Erfindungen" (Leipzig, Quandt und Händel) heraus und war 30 Jahre lang an dem „Litterarischen Centralblatt" Mitarbeiter. Für „Meyer's Konversationslexikon" bearbeitete er die Artikel,

welche Mathematik, Astronomie und Chronologie betreffen, und verfasste die im Weber'schen Verlage erschienenen Katechismen der Meteorologie (1865) und der Physik (1867). Ferner erschien aus seiner Feder eine Reihe von Aufsätzen in „Grunert's Archiv" Bd. 42—45 und Bd. 51. Ihre Titel sind: „Ueber einige Quadraturen auf der Kugelfläche", „Ueber kubische Gleichungen", „Ueber den Kegelschnitt der neun Punkte und sein stereometrisches Seitenstück", „Elementare Behandlung des ballistischen Problems unter Voraussetzung eines der ersten Potenz der Geschwindigkeit direct proportionalen Luftwiderstandes", „Ueber ein System parallelaxiger Rotationsflächen zweiter Ordnung", „Geometrische Sätze über Dreiecksflächen und Tetraedervolumina", „Elementare Ableitung der Formel für die Schwingungsdauer des einfachen Pendels". Hatte der Verewigte durch diese Schriften sich seinen wissenschaftlichen Ruf begründet, so befestigte er ihn noch durch sein „Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie" (Leipzig 1868), durch das „Lehrbuch der Kartenprojection" (Weimar 1873) und sein „Lexikon der Astronomie" (Leipzig 1882). Von den genannten Schriften vorwiegend mathematischer Richtung abgesehen, schrieb Gretschel auch über Geigen- und Bogenmacherkunst, über Pianofortebau und übersetzte einzelne Werke von Crookes, Spottiswoode und Bell.

Im October 1872 erhielt Gretschel einen Ruf an die Kgl. Sächs. Bergakademie in Freiberg und trat hier im Januar 1873 die Professur für Mathematik und darstellende Geometrie an. In diesem Amte hat der Verewigte mit rastlosem Eifer und in echt wissenschaftlichem Geiste nahezu 20 Jahre lang erfolgreich gewirkt. Einen Ruf an die Technische Hochschule zu Hannover, der im Jahre 1879 an ihn gelangte, lehnte er ab.

Ein edler Charakter, ein reiches, in seltenem Masse sich über verschiedene Gebiete verbreitendes Wissen, das er nicht nur in Forschung und Lehrthätigkeit glücklich verwertete, sondern auch oft darüber hinaus in den Dienst gemeinnütziger Zwecke stellte, zeichneten den Dahingeschiedenen aus.

Josef Gierster.

Von

R. Fricke.

Josef Gierster wurde am 10. August 1854 zu Haibach in Bayern geboren. Nach erworbener Gymnasialbildung studirte derselbe in den Jahren 1873 bis 77 an der Universität und dem Polytechnikum zu München Mathematik und Philosophie. Während der beiden folgenden Jahre war Gierster Assistent am Polytechnikum in München, und in dieser Zeit dankte er der Führung Klein's jene wissenschaftliche Anregung, deren Frucht nun in einer Reihe bedeutender Gierster'scher Arbeiten vor uns liegt. Es war die Zeit der ersten Begründung der Theorie der Modulfunctionen; und hier erschloss sich für Gierster ein Forschungsgebiet, in dem er nicht nur seiner bedeutenden, von reinstem wissenschaftlichen Interesse getriebenen Arbeitskraft Genüge leisten konnte, sondern wo zumal auch seine eigene charakteristische Beanlagung zur vollen Geltung gelangte, ich meine seine Fähigkeit, vielgestaltete gruppentheoretische und arithmetische Gebilde mit eindringender Schärfe zu durchforschen. In dieser Hinsicht danken wir ihm erstlich über die Galois'sche Gruppe der Modulargleichung eine Reihe von Abhandlungen, deren eine zugleich Gierster's Doctordissertation war (Leipzig, 1881). Diese Arbeiten bringen die vorbezeichnete Eigenart Gierster's zum vollen Ausdruck, und die erste unter ihnen nimmt ein noch erhöhtes Interesse dadurch in Anspruch, dass in ihrem Verlaufe ein berühmter Satz über die Resolvente der Modulargleichung, den Galois fast ein halbes Jahrhundert früher aufstellte, endlich seine allseitige und naturgemässe Aufklärung fand. Mit fast ebenso grossem Erfolge nahm Gierster auch bereits Ende der siebziger Jahre, wieder durch Klein's Ideen geleitet, die Theorie der Klassenzahlrelationen in Angriff. Er ist hier schöpferisch vorgegangen und hat der genannten Theorie weit über die engen von Kronecker eingehaltenen

Grenzen hinaus Spielraum geschaffen. Eben hier konnte dann weiterhin Hr. Hurwitz einsetzen, der zugleich über die functionentheoretischen Gesichtspunkte gebot, welche der Theorie der Klassenzahlrelationen die volle Reife verliehen. Gierster's äussere Schicksale gestalteten sich weiter so, dass er nach erledigten Staatsprüfungen 1879 Lehramtsverweser, von 1880 bis 88 Reallehrer in Bamberg war. Bei einer angestrengten Amtsthätigkeit schwand ihm leider mehr und mehr die Sammlung und Frische, die zum Gedeihen mathematischer Forschungen notwendig sind. Auch die Hoffnungen seiner Freunde bei seiner Versetzung nach München auf ein neues wissenschaftliches Aufleben Gierster's sollten nicht in Erfüllung gehen, zumal da schon gegen Ende seines Aufenthaltes in Bamberg sein Gesundheitszustand so erschüttert war, dass er sich an eine Habilitation an der Münchener Universität, die man ihm nahelegte, nicht wagte. Er war seit 1888 Gymnasiallehrer, anfangs am Luitpold-, später am Wilhelms-Gymnasium zu München thätig. Im Herbste des Jahres 91 zeigten sich bei Gierster die ersten Anzeichen eines schweren Kehlkopfleidens, dem er am 2. Januar dieses Jahres erliegen sollte.

Gierster's Schriften.

1) Neue Relationen zwischen den Klassenanzahlen der quadratischen Formen von negativer Determinante. Götting. Nachr. von 1879.
2) Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrade. Mathem. Ann. Bd. 14 (1879).
3) Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Erlanger Ber. und Math. Ann. Bd. 17 (1880).
4) Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades. Math. Ann. Bd. 18 (1881).
5) und 6) Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Math. Ann. Bd. 21 und 22 (1883).
7) Ueber Congruenzgruppen von Primzahlstufe. Math. Ann. Bd. 22 (1883).
8) Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichung, wenn der Transformationsgrad die Potenz einer Primzahl > 2 ist. Math. Ann. Bd. 26 (1885).
9) Bemerkung zu dem unter 2) genannten Aufsatze. Math. Ann. Bd. 26 (1886).

Geschäftlicher Bericht des Vorstandes.

Der Ausfall der diesjährigen Versammlung hat die statutenmässige Neuwahl zweier Vorstandsmitglieder unmöglich gemacht; wie schon in dem vorläufigen Bericht mitgeteilt, hat deshalb der gegenwärtige Vorstand in der Voraussetzung des Einverständnisses der Mitglieder der Vereinigung die Geschäfte auch für das Jahr 1893 weiter zu führen beschlossen und auch innerhalb des Vorstandes die Herren G. Cantor als Vorsitzenden, W. Dyck als Schriftführer, G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe als Redactionsausschuss für den Jahresbericht in ihren Functionen belassen. Weiter hat derselbe nach Aufhebung der Nürnberger Versammlung zwei in München wohnende Mitglieder der Vereinigung zu Revisoren der Kasse gewählt.

Wir geben beifolgend den am 10. Dezember 1892 abgeschlossenen Kassenbericht

I) über die Hauptkasse,

II) über die Kasse der mathematischen Ausstellung.

I. Kassenbericht.

Hauptkasse.

Einnahmen	M.	Pf.	Ausgaben	M.	Pf.
Kasse-Rest vom Vorjahre 1891	164	16	Drucksachen	69	50
Jahresbeiträge der Mitglieder:			Lithographische Arbeiten	10	30
3 Nachträge für 1891	6	—	Schreibarbeiten	62	—
193 Beiträge für 1892	386	62	Papier und Utensilien	21	26
11 Vorauszahlungen für 1893	23	—	Postporti	40	17
2 dto. für 1894 . .	4	—	Trinkgelder	5	—
Ablösung der Jahresbeiträge von 14 Mitgl.	420	30	Honorar für das Referat im Jahresbericht . .	401	25
Ungenannt, für die Zwecke der Vereinig.	12	—	Zuschuss der Vereinigung zu den Kosten der Mathematischen Ausstellung	500	—
Von der Verlagshandlung von G. Reimer Honorar für den 1. Jahresbericht; $18^1/_4$ Bogen zu 30 Mark .	547	50			
Summa M.	1563	58	Summa M.	1109	48

verbleiben M. 454. 10.

Hiervon angekauft für Nom. 400 M.
3% Reichsanleihe . . . . M. 352. 90.
Kassa-Rest . . . . M. 101. 20.

W. Dyck, als Kassenführer.
S. Finsterwalder, A. Pringsheim, } als Revisoren.

II. Kassenbericht.

Ueber die Vorbereitungen zur Mathematischen Ausstellung.

Einnahmen	M.	Pf.	Ausgaben	M.	Pf.
Zuschuss von Seiten des k. b. Staatsministeriums des Innern für Kirchen- u. Schulangelegenheiten . . .	2000	—	Drucksachen excl. Katalog	158	10
			Ausstellungskatalog Druck (Aufl. 750)	1860	—
			Clichés	502	50
Zuschuss von Seiten des Reichsamtes des Innern	1000	—	Separatabzüge .	121	—
			Beihülfe an den Vorarbeiten zum Katalog	180	—
Zuschuss von Seiten der Deutschen Mathematiker Vereinigung	500	—	Papier u. Utensilien .	21	32
			Buchbinder	22	—
			Postporti.	296	70
			Spediteur Danler . . .	242	68
Einnahmen aus dem Verkauf des Kataloges	257	70	Trinkgelder	3	—
Summa M.	3757	70	Summa M.	3407	30

Verbleibt für die Vorbereitungen des nächsten Jahres ein Rest von M. 350.40.

W. Dyck, als Kassenführer.
S. Finsterwalder, A. Pringsheim, } als Revisoren.

Vorbereitung der nächstjährigen Versammlung.

Für die im nächsten Jahre geplante Versammlung wird vor allen Dingen der Bericht der Herren Brill und Nöther über die Theorie der algebraischen Functionen auf die Tagesordnung zu setzen sein; weiter soll dem Berichte des Herrn F. Kötter ein weiteres Referat über technische Mechanik von seiten des Herrn Henneberg folgen. Herr Bruns hat es übernommen, über moderne Fragen der Astronomie zu referiren. Endlich ist die wirkliche Durchführung der mathematischen Ausstellung beschlossen.

Der Umfang, den schon die diesjährige Ausstellung genommen hatte, und die sicher grössere Ausdehnung, welche dieselbe nunmehr gewinnen wird, lassen es wünschenswert erscheinen, die Dauer der Ausstellung nicht auf die kurze Frist von sechs so reich besetzten Tagen zu beschränken, welche ihr bei der Verbindung mit der Naturforscherversammlung gegönnt sind. Schon der gegen-

wärtige Katalog zeigt die Notwendigkeit, die Ausstellung einem eingehenden Studium, auch etwa anzustellenden Experimenten, zugänglich zu machen. So ist der Plan entstanden, die mathematische Ausstellung auf die Dauer eines Monats — vom 1. bis 30. September 1893 — auszudehnen und in München abzuhalten, wo die weiten Räume der technischen Hochschule gastlich zur Verfügung stehen und allen Wünschen im besten Masse dienen werden. Mit diesem Plane steht die Abhaltung der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in München in Verbindung. Es erscheint angemessen, dabei die Zeit der Zusammenkunft auf die Woche vor Eröffnung der Naturforscherversammlung in Nürnberg zu legen, um so den anschliessenden Besuch der letzteren zu ermöglichen.

So laden wir denn unsere Fachgenossen ein, sich im Monat September recht zahlreich zur Versammlung und Ausstellung in München zusammenzufinden; möge dann ein günstigeres Geschick unsere Pläne verwirklichen helfen und wissenschaftliche wie persönliche Anregung der Lohn unserer gemeinsamen Arbeit sein!

Mitglieder-Verzeichnis

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

nach dem Stande vom 1. Februar 1893.

Archenhold, F. S., Villenkolonie Grunewald bei Berlin.
Bacharach, J., Reallehrer an der Realschule, Erlangen.
Bauer, G., Professor an der Universität, München.
Bauschinger, J., Privatdocent an der Universität, München.
Beck, A., Professor am Polytechnikum, Riga.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
Böger, R., Oberlehrer an der Realschule, Hamburg.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, München.
Bolza, O., Assistant Professor, University of Chicago.
10. Braunmühl, A. v., Professor an der technischen Hochschule, München.
Brill, A., Professor an der Universität, Tübingen.
Brunn, H., Privatdocent an der Universität, München.
Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig.
Buka, F., Professor am Realgymnasium, Charlottenburg, und an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Burkhardt, H., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
Burmester, L., Professor an der technischen Hochschule, München.
Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg.
Cantor, G., Professor an der Universität, Halle.
Cantor, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
20. Carajianides, A., Göttingen.
Czuber, E., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Dantscher v. Kollesberg, V., Professor an der Universität, Graz.
Dedekind, R., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig.
Dingeldey, F., Privatdocent an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München.
Doergens, R., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.

Dyck, W., Professor an der technischen Hochschule, München.
Dziobek, O., Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Eberhard, V., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
30. Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.
Engel, F., Professor an der Universität, Leipzig.
Färber, C., Oberlehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin.
Finger, J., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Fink, K., Professor an der Realschule, Tübingen.
Finsterwalder, S., Professor an der technischen Hochschule, München.
Franklin, F., Professor an der Johns Hopkins Universität, Baltimore.
Franz, J., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Fricke, R., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
Frobenius, G., Professor an der Universität, Berlin.
40. Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin.
Fuhrmann, A., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Gerhardt, K. J., Gymnasial-Director a. D., Halle a. S.
Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen.
Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen.
Graefe, F., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Grassmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Halle a. S.
Grübler, M., Professor an der technischen Hochschule, Riga.
Günther, S., Professor an der technischen Hochschule, München.
Gundelfinger, S., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
50. Gutzmer, A., auf Glowe, bei Friedland, N.-L.
Haentzschel, E., Oberlehrer an der dritten Realschule, Berlin.
Hamburger, M., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
Hauck, G., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hecht, Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg.
Heffter, L., Professor an der Universität, Giessen.
Helm, G., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin.
Henneberg, L., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
60. Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin.
Hermes, J., Professor am Progymnasium, Königsberg i. Pr.
Hertzer, H., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Herz, N., Wien.
Hess, E., Professor an der Universität, Marburg.
Hettner, G., Professor an der Universität, Berlin.
Hilbert, D., Professor an der Universität, Königsberg i Pr.
Hölder, O., Professor an der Universität, Tübingen.
Holländer, E., Oberlehrer an der Realschule, Mülheim a. d. Ruhr.

Hoppe, R., Professor an der Universität, Berlin.
70. Horn, J., Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hurwitz, A., Professor am Polytechnikum, Zürich.
Jahnke, E., Oberlehrer an der achten Realschule, Berlin.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg.
Jürgens, E., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Junker, F., Professorats-Candidat, Urach (Württemberg).
Kasten, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Keck, L., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Kepinski, S., Universität, Krakau.
Kerschensteiner, G., Gymnasiallehrer, Schweinfurt.
80. Kiepert, L., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Killing, W., Professor an der Akademie, Münster i. W.
Kleiber, J., Hauptlehrer an der Handelsschule, München.
Klein, F., Professor an der Universität, Göttingen.
Klein, G., Professor am Realgymnasium, München.
Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat.
Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin.
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg.
König, J., Professor an der technischen Hochschule, Budapest.
Königsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg.
90. Köpke, A., o. Lehrer an der Realschule, Ottensen.
Kötter, E., Privatdocent an der Universität, Berlin.
Kötter, F., Docent an der Berg-Akademie, Berlin.
Kohn, G., Privatdocent an der Universität, Wien.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
Kraft, F., Privatdocent am eidgen. Polytechnikum, Zürich.
Krause, M., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Krazer, A., Professor an der Universität, Strassburg i. E.
Kürschak, J., Privatdocent an der technischen Hochschule, Budapest.
Kullrich, Adjunct am Joachimsthaler Gymnasium, Charlottenburg.
100. Lampe, E., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Lerch, M., Privatdocent an der Universität, Prag.
Lie, S., Professor an der Universität, Leipzig.
Ligowski, W., Professor an der Marine-Akademie, Kiel.
Lipschitz, R., Professor an der Universität, Bonn.
Lommel, E. v., Professor an der Universität, München.
London, F., Privatdocent an der Universität, Breslau.
Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B.
Mangoldt, H. v., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Maurer, L., Privatdocent an der Universität, Strassburg.
110. Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig.
Mehmke, R., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Meyer, A., Professor an der Universität, Zürich.

Meyer, F., Professor an der Berg-Akademie, Clausthal.
Meyer, G., Lehrer an der Realschule, Bremen.
Meyer, G. F., Professor am Realgymnasium, München.
Minkowski, H., Professor an der Universität, Bonn.
Müller, F., Professor am Luisen-Gymnasium, Berlin.
Müller, Reinh., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig.
Müller, Rich., Lehrer an der Königl. Realschule, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
120. Neumann, C., Professor an der Universität, Leipzig.
Netto, E., Professor an der Universität, Giessen.
Nöther, M., Professor an der Universität, Erlangen.
Papperitz, E., Professor an der Berg-Akademie, Freiberg i. S.
Pasch, M., Professor an der Universität, Giessen.
Pelz, C., Professor an der technischen Hochschule, Graz.
Peschka, A. V., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Pick, G., Professor an der Universität, Prag.
Piltz, A., Privatdocent an der Universität, Jena.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel.
130. Pockels, F., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
Pringsheim, A., Professor an der Universität, München.
Prym, F., Professor an der Universität, Würzburg.
Rados, G., Professor an der technischen Hochschule, Budapest.
Reinhardt, C., Oberlehrer an der Fürstenschule, Meissen.
Réthy, M., Professor an der technischen Hochschule, Budapest.
Reuschle, C., Professor an der technischen Hochschule, Stuttgart.
Reye, Th., Professor an der Universität, Strassburg i. E.
Richarz, Privatdocent an der Universität, Bonn.
Richter, Lehrer am Gymnasium, Quedlinburg.
140. Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Ritter, A., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Ritter, E., Frankfurt a. M.
Rodenberg, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Rogel, F., Lehrer an der Staats-Gewerbeschule, Brünn.
Rohn, K., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau.
Rosenow, H., Director an der neunten Realschule, Berlin.
Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg.
Rudio, F., Professor am Polytechnikum, Zürich.
150. Runge, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Schapira, H., Professor an der Universität, Heidelberg.
Scheffers, G., Privatdocent an der Universität, Leipzig.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig.
Schell, W., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Schering, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Schilling, C., Professor an der Navigationsschule, Bremen.

Schlegel, V., Professor an der Gewerbeschule, Hagen i. W.
Schleiermacher, L., Professor an der Forstschule, Aschaffenburg.
160. Schlesinger, L., Privatdocent an der Universität, Berlin.
Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden.
Schmidt, M., Professor an der technischen Hochschule, München.
Schönflies, A., Professor an der Universität, Göttingen.
Schottky, F., Professor an der Universität, Marburg.
Schröder, E., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg.
Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg.
Schultz, E., Lehrer am Realgymnasium, Stettin.
Schumacher, H., Reallehrer an der Realschule, Neustadt a. H.
170. Schumacher, R., Reallehrer an der Realschule, Augsburg.
Schur, F., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Schur, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Schwering, K., Director am Gymnasium, Düren.
Seelhoff, P., Professor an der Navigationsschule, Bremen.
Seeliger, H., Professor an der Universität, München.
Seidel, Ph. L. von, Professor an der Universität, München.
Servus, H., Oberlehrer an dem Friedrichs-Realgymnasium, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Sidler, G., Professor an der Universität, Bern.
Siebert, A., Oberlehrer an der Hauptcadetten-Anstalt, Gross-Lichterfelde.
180. Sievert, H., Studienlehrer am neuen Gymnasium, Nürnberg.
Simon, H., Assistent an der Universitätsbibliothek, Berlin.
Simon, M., Professor am Lyceum, Strassburg i. E.
Sinram, H. Th., Hamburg.
Sprung, A., Professor am Meteor. Inst., Berlin.
Stäckel, P., Privatdocent an der Universität, Halle.
Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen.
Stahl, W., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Staude, O., Professor an der Universität, Rostock.
Stern, M. A., Professor a. D. der Universität Göttingen, Zürich.
190. Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck.
Study, E., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena.
Tötössy, Bela, Professor an der technischen Hochschule, Budapest.
Valentin, G., Custos an der Königl. Bibliothek, Berlin.
Van Vleck, E. B., Göttingen.
Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel.
200. Voss, A., Professor an der Universität, Würzburg.
Wälsch, E., Privatdocent an der deutschen technischen Hochschule, Prag.

Walder, E., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle.
Weber, H., Professor an der Universität, Göttingen.
Weierstrass, C., Professor an der Universität, Berlin.
Weiler, A., Privatdocent am Polytechnikum, Zürich.
Weingarten, J., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forst-Akademie, Tharand.
Wellmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
210. Weltzien, C., Oberlehrer an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin.
Westermann, H., Oberlehrer an der Vorschule der technischen Hochschule, Riga.
Weyer, G. D., Professor an der Universität, Kiel.
Weyr, Em., Professor an der Universität, Wien.
Wiener, Chr., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Wiener, H., Privatdocent an der Universität, Halle.
Wiltheiss, E., Professor an der Universität, Halle.
Wirtinger, W., Privatdocent an der Universität, Wien.
Wölffing, E., Professorats-Candidat, Stuttgart.
Wolf, M., Privatdocent an der Universität, Heidelberg.
220. Worpitzky, J., Professor am Friedrichs-Werderschen Gymnasium und an der Kriegsakademie, Berlin.
Zindler, K., Assistent an der technischen Hochschule, Graz.
Ziwet, A., Assistant Professor, University of Michigan, Ann Arbor, Mch. U. S. A.
Zorawski, C. v., Polytechnische Schule, Lemberg.
Züge, Oberlehrer am Gymnasium, Lingen a. d. Ems.

Aus der Vereinigung ausgetreten ist Herr

Klemm, F., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.

Verstorbene Mitglieder.

H. Gretschel, Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S.
J. Gierster, Gymnasiallehrer, München.
P. Günther, Privatdocent an der Universität, Berlin.
B. Klein, Professor an der Universität, Marburg.
L. Kronecker, Professor an der Universität, Berlin.
H. Schröter, Professor an der Universität, Breslau.
Zillmer, Grosslichterfelde.

Kurze Berichte

über

einzelne der für Nürnberg bestimmten Vorträge.

Analogien zwischen physikalischen, besonders elektro-magnetischen Erscheinungen und rein mechanischen.

Von

C. A. Bjerknes (Christiania).

In der Ausdehnung, welche die Umstände erlaubt hätten, würde ich eine kurze von Vorzeigungen und Experimenten begleitete Uebersicht gegeben haben über meine Untersuchungen betreffend die Analogien zwischen physikalischen und rein mechanischen Erscheinungen.

Unter den verschiedenen Arten von Schwingungen würde ich zuerst die pulsatorischen, demnächst die linear und die rotatorisch oscillatorischen als besonders wichtig hervorgehoben haben. Und in Verbindung hiermit sollten die hydrodynamischen Spectren — in vollkommenen oder in zähen Flüssigkeiten — als mit den elektrisch-magnetischen bis in den kleinsten Einzelheiten übereinstimmend gezeigt werden.

Ich würde ferner die scheinbaren hydrodynamischen Fernwirkungen mit ihrer inversen Analogie zu den statisch-elektrischen (den temporären wie den permanenten) in den Hauptzügen durchgegangen haben. Die bei gewissen Erscheinungen von älterer Zeit benutzte Analogie mit den magnetischen wird jetzt allein als Halbanalogie betrachtet, weil sie natürlicher den elektrischen Polarisationen entsprechen.

Auch die elektrodynamischen Krafterscheinungen (zwischen Stromleitern) wären hydrodynamisch nachgeahmt worden, und wieder auf dieselbe inverse Weise, wonach Anziehungen in Abstossungen übergehen, Drehungen nach links in Drehungen nach rechts. Die Zähigkeit der Flüssigkeit tritt hier als ein Hauptmoment ein. Und in Systemen von entgegengesetzt pulsirenden Kügelchen, die entweder entgegengesetzt rotiren oder entgegengesetzt sich linear fortbewegen, hat man ein hydrodynamisches Bild eines elektrischen Stromes oder einer Strompartie. — Experimentelle und theoretische Schwierigkeiten mit störenden Kräften

und Flüssigkeitsströmungen wie mit Wellenbildungen müssten doch hierunter erwähnt werden, weil in den Versuchen die Bedingungen der Theorie nicht völlig befriedigt werden können, und weil zugleich die Kenntnis von der Natur der zähen Flüssigkeiten noch eine mangelhafte ist.

Die Erscheinungen nehmen einen andern Charakter an, wenn die isochron pulsirenden Körper einander bis zur Berührung nähern. Während nämlich in der Ferne eins pulsirende Kugeln einander anziehen, entgegengesetzt pulsirende einander abstossen, so werden in den kurzen Berührungszeiten die ersteren einander heftig abstossen, die letzteren sich gegen einander neutral verhalten.

Hat man somit in der Flüssigkeit ein System von sehr vielen isochron pulsirenden Körpern, so dass häufige Berührungsstösse eintreten müssen, so wird eine elektrisch-ähnliche (elektroidische) Flüssigkeit entstehen. Denn die Berührungsstösse werden den Anhäufungen von eins pulsirenden Körpern entgegentreten, sodann die Wiederbildung eines neutralen Gemisches befördern.

In das gebildete Medium werden wir nun eine Anzahl von verhältnismässig grossen Körpern versenken. Wegen der elektrisch-ähnlichen anziehenden Temporäractionen fünften oder höheren Grades zwischen den constituirenden Körpern des Mediums, den Elektroiden, — Anziehungen, welche auch die Experimente klarlegen, — werden nun die grossen Körper, die Ponderoiden, wie wir sagen, einander scheinbar abstossen, und dies auch mit einer Kraft vom fünften und höheren Grade. Es wird somit eine Elasticitätserscheinung zustande kommen. — Ein Analogiebild zu diesen Erscheinungen würde ich gemacht haben mit Hülfe eines Magnetnadelmediums, in welchem eine Anzahl von Platten die Rolle der Ponderoiden spielen würden.

Die Ponderoiden — bis jetzt neutrale Körper — sollen nun auch selbst pulsiren, und mit verhältnismässig tiefen Grundpulsationen. Sie werden einander alsdann im Falle der concordirenden Pulsationen zugleich anziehen müssen. Und bei der Zusammenwirkung dieser Anziehung zweiten Grades mit der vorigen Abstossung von höherem, wenigstens fünftem Grade wird das Ponderoidsystem, wenn es verhältnismässig ruhig ist, den Charakter eines elastischen festen Systems annehmen, wenn es in stärkerer Bewegung ist, den Charakter eines flüssigen.

Die Grundpulsationen waren noch allein berücksichtigt worden. Weil aber die Ponderoiden im Innern des elektroidischen Mediums sich befinden, wird eine pulsatorische Induction zustande kommen können. Und die Ponderoiden werden dadurch auch hohe Nebenpulsationen annehmen, iso-

chron mit den elektroidischen. Dies würde ferner, unter Mitwirkung des gleich gestimmten Mediums, Kraftumkehrungen veranlassen, als ob es sich um den Auftrieb leichter Körper handelte, die in einer schweren Flüssigkeit eingeschlossen wären. — Wieder mit Hülfe eines Magnetnadelmediums lässt sich hier ein Analogiebild bewerkstelligen von den Einzelheiten in diesem Umkehrungsprocesse. Man sieht die Verdichtungen und die neuen Anordnungen der constitutiven Körper des Mediums.

Während man sodann auf mehreren Stellen, ohne die rein mechanische Vorstellung zu verlassen, Analogien zu den Naturerscheinungen wird aufstellen können, geht man besonders mit Hülfe eines Mediums von pulsirenden Körperchen und des Berührungsstosses von den elektrisch-ähnlichen inversen Analogien zu neuen Analogien über, welche sich noch genauer, wie es scheint, den elektrischen Erscheinungen anschliessen werden.

Weitere und tiefere Forschungen werden noch bei einer so weitgehenden, viele Einzelheiten enthaltenden Frage wie diese nötig sein. Hier ist ja auch alles nur in ganz grossen, schwebenden Umrissen gegeben worden. Der knappe Raum lässt eben keine Schärfe zu.

Arithmetische Entwicklungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

R. Fricke (Göttingen).

Vorliegende Notiz soll auf eine Untersuchungsrichtung hinweisen, welche die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit der Idealtheorie in Beziehung setzt. — Wie Poincaré in Bd. IV der Acta Math. erörtert, hat man einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung eine Gruppe n-gliedriger linearer Substitutionen zuzuordnen, welche sich auf die n Integrale eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung beziehen. Es lässt sich hieran die Problemstellung schliessen, das Zustandekommen einer Gruppe fraglicher Art independent, d. i. aus dem Bildungsgesetz der dabei auftretenden Substitutionscoefficienten verständlich zu machen. Doch ist dieses Problem nur erst für $n = 2$ in Angriff genommen, und zwar im wesentlichen nur in denjenigen Fällen, wo der Integralquotient eine „eindeutig“ inversible Function der unabhängigen Veränderlichen der Differentialgleichung ist. Die hier in Betracht kommenden Substitutionsgruppen zweier homogenen, bez. einer

nicht-homogenen Veränderlichen bezeichnet Poincaré als eigentlich-discontinuirlich, und auf sie bezieht sich die moderne Theorie der eindeutigen automorphen Functionen einer Veränderlichen. — Ueber die Behandlung der oben gestellten Frage nach dem „Bildungsgesetz" der gedachten Gruppen sei ohne Gewähr der Vollständigkeit Folgendes angegeben: Eine ausgedehnte Klasse arithmetisch definirter Gruppen liegt implicite in einer bedeutenden Arbeit von Selling über ganzzahlige quadratische Formen (Journ. für Math. LXXVII) vor; diese Gruppen entspringen der Aufgabe, eine indefinite ganzzahlige ternäre quadratische Form auf alle Weisen durch ganzzahlige Substitutionen in sich zu transformiren. Selling hat sogar eine äusserst gründliche Theorie der Fundamentalpolygone der gemeinten Gruppen l. c. entwickelt, nur freilich nicht genau in der heute üblichen Gestalt, und auch ohne den Begriff der Gruppe in den Mittelpunkt zu stellen. Die Umkleidung eines Teiles der Selling'schen Gedanken in modernes Gewand hat Poincaré geleistet (Journ. de Math. (4) III, 1887). — Die Selling'schen Gruppen bilden nur den niedersten Specialfall einer weit allgemeineren Klasse arithmetisch zu definirender Gruppen, die zu Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit eindeutig inversiblen Integralquotienten gehören. Im allgemeinen werden die Substitutionscoefficienten aus ganzen algebraischen Zahlen eines endlichen Körpers $n$ten Grades K_n gebildet, wobei indessen noch die Quadratwurzeln aus zwei dem Körper angehörenden ganzen Zahlen adjungirt zu denken sind. Die genaue Bauart der Substitutionen und die für die eigentliche Discontinuität massgeblichen Bedingungen sollen demnächst in den „Math. Annalen" besprochen werden; hier sei nur bemerkt, dass man im niedersten Falle des Körpers K_1 der rationalen Zahlen die Selling'schen Gruppen wieder erhält. — Indem man solcherweise die Hülfsmittel der von anderer Seite her ausgebildeten Arithmetik für die Gewinnung von Gruppen nutzbar macht und die zugehörigen automorphen Functionen studirt, könnte man nun umgekehrt nach den zugehörigen Differentialgleichungen fragen. Indessen ist wohl die Hauptanwendung der arithmetischen Bildungsgesetze der Gruppen in der Theorie der algebraischen Transformation der automorphen Functionen zu suchen. Diese Theorie ist systematisch auf die Untersuchung der Untergruppen zu basiren, die in der einzelnen Gruppe enthalten sind, und dabei überträgt sich das Congruenzgruppenprincip der Modulfunctionen unmittelbar auf die vermöge der Zahlkörper K_n aufgebauten Gruppen, wenn man sich nur an Stelle der einzelnen Zahlmoduln des rationalen Körpers der Ideale bedienen will, welche in dem gerade

zu Grunde liegenden Körper K_n enthalten sind. Man hat es hier sonach mit einer beziehungsreichen Verwendung der Idealtheorie zu thun, welche die (abgesehen von den Modulfunctionen) bislang nur erst im Gebiete der hypergeometrischen Functionen (durch Goursat und Papperitz) in Angriff genommene Transformationstheorie der automorphen Functionen auf eine neue Basis zu bringen gestattet. — Hierüber hinaus dürften die arithmetisch definirten Gruppen in einer künftigen Theorie der „automorphen Modulfunctionen", welche sich auf die in der Differentialgleichung enthaltenen accessorischen Parameter bezieht, eine analoge Rolle spielen, wie die durch Kronecker als „singulär" bezeichneten elliptischen Gebilde in der Theorie der „elliptischen Modulfunctionen".

Zur Theorie der algebraischen Functionen.

Von

F. Klein (Göttingen).

In meiner Schrift über Riemann's Theorie etc. (Leipzig 1881) sowie in einem kleinen Aufsatze in Bd. XIX der Mathematischen Annalen habe ich hervorgehoben, was beinahe selbstverständlich ist, dass reellen algebraischen Gebilden symmetrische Riemann'sche Flächen entsprechen und umgekehrt, und habe dann alle Arten symmetrischer Riemann'scher Flächen, die es für ein gegebenes p giebt, aufgezählt. Das Resultat war, dass jedesmal $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten existiren, von denen $(p+1)$ zu den von mir so genannten „diasymmetrischen" Fällen gehören, $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ zu den „orthosymmetrischen" Fällen. Hiermit war im Princip ein Ansatz gegeben, um ganz allgemein die Gestalten der reellen algebraischen Curven eines beliebigen Geschlechtes zu untersuchen. Nach Analogie mit meinen früheren Arbeiten über die ebenen Curven vierter Ordnung (Annalen X, XI; 1876) musste dabei das Verhalten der zur Fläche gehörigen Abel'schen Functionen von wesentlicher Bedeutung sein. Ich habe dasselbe also bald darauf durch Herrn Weichold untersuchen lassen (Diss. 1883; Schlömilch's Zeitschrift XXVIII). Seitdem ist dieser Gegenstand trotz des wachsenden Interesses für gestaltliche Fragen, welches allerwärts hervortritt, nicht weiter untersucht worden. Ich habe daher im vergangenen Sommersemester (1892) Gelegenheit genommen, meine Auffassung der Sache in einer Vorlesung im

Zusammenhange zu entwickeln und darzulegen. Alle die schönen Realitätstheoreme, welche man bei den ebenen Curven vierter Ordnung durch Zeuthen u. a. kennt, liessen sich dabei auf Curven beliebigen Geschlechtes übertragen. Meine Absicht für Nürnberg war, die bezüglichen Resultate den Fachgenossen vorzulegen und die Unterhaltung insbesondere auf die Frage zu lenken, wie man die gleichen Resultate auf rein algebraischem Wege möchte ableiten können. Ich habe inzwischen eine längere Abhandlung über den Gegenstand ausgearbeitet, die in Heft 1 von Band XLII der Mathematischen Annalen erscheinen wird, und auf die ich hier der Kürze halber verweisen darf.

Ueber Realitätsrelationen zwischen Singularitäten von Raumcurven.

Von

Franz Meyer (Clausthal).

Eine bekannte, von Herrn Klein (cf. Math. Ann. Bd. X) herrührende Formel sagt im wesentlichen aus, dass ein gewisses Aggregat von Realitätsanzahlen, welche sich auf Singularitäten ebener Curven beziehen, irgend welchen Deformationen der Curve gegenüber invariant bleibt, wenn nur Ordnung und Klasse die alten geblieben sind.

Ich habe untersucht, in welcher Richtung eine analoge Thatsache für Raumcurven existiren könnte.

Zunächst habe ich Raumcurven mit allgemeinen Ordnungs-Singularitäten in Betracht gezogen; solcher Singularitäten treten fünf Arten auf: einmal Ebenen, welche hyperosculiren, oder osculiren und noch einmal berühren, oder endlich dreimal berühren, andererseits Gerade, welche viermal treffen, oder berühren und noch einmal treffen.

Coincidiren irgend zwei der zugehörigen „singulären Stellen“ auf der Curve, so entsteht eine „Singularität zweiter Art“: In den Gött. Nachr. 1891 No. 2 habe ich sämtliche Vorgänge, die hierher gehören, insbesondere auf die damit verbundenen Realitätszustände hin erörtert: es ergab sich, dass eine „Realitätsrelation“ nach Analogie der Klein'schen, nicht existirte, sondern nur eine „Realitätscongruenz“ (mod. 4).

Es wäre nun immerhin noch möglich, dass durch Hereinziehen weiterer Momente, wie der Realität der Restpunkte von singulären Ebenen, oder auch der specifischen Singularitäten der zur Curve gehö-

renden abwickelbaren Fläche, eine allgemeingültige Realitätsrelation construirbar würde.

Es hat sich gezeigt, dass der erstere Ansatz überhaupt versagt; bezüglich des zweiten habe ich mich vorderhand mit der Einsicht begnügt, dass für eine Curve niedrigster, nämlich der vierten Ordnung, auch dann eine Realitätsrelation unmöglich ist. Damit ist auch im allgemeinen die Unwahrscheinlichkeit einer allgemeingültigen Relation gezeigt: zum mindesten würden die in einer solchen verbundenen Singularitäten sehr specieller Natur sein.

Dagegen existirt im Raume „M_4“ von vier Dimensionen jedenfalls eine der Klein'schen analoge Realitätsformel. Für die Ordnung fünf und das Geschlecht Null hat man z. B. den Satz: Die Gesamtanzahl der reellen „stationären linearen M_3“, der reellen Ebenen M_2, welche osculiren und noch einmal treffen, endlich der reellen Treff-Stellen einer dreimal treffenden Geraden M_1 — ist constant, nämlich gleich Acht.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass für ebene Curven neben der Klein'schen Formel noch eine unbegrenzte Reihe weiterer, von wesentlich anderem Charakter existirt, deren geometrische Bedeutung allerdings sehr versteckt liegt.

Bemerkung zur Invariantentheorie binärer Formen.

Von

H. Schapira (Heidelberg).

In meinen Vorlesungen über binäre Formen gebrauche ich seit mehreren Jahren eine Methode, deren Grundlage hier in aller Kürze mitgeteilt werden möchte.

Die binäre Form nter Ordnung, geschrieben in der Gestalt:

$$\mathfrak{f}(u, v) = (\mathfrak{a}_1 u - \mathfrak{b}_1 v)(\mathfrak{a}_2 u - \mathfrak{b}_2 v)(\mathfrak{a}_3 u - \mathfrak{b}_3 v)(\mathfrak{a}_4 u - \mathfrak{b}_4 v)\dots(\mathfrak{a}_n u - \mathfrak{b}_n v),$$

gehe in die in analoger Gestalt geschriebene Form

$$\mathfrak{F}(U, V) = (\mathfrak{A}_1 U - \mathfrak{B}_1 V)(\mathfrak{A}_2 U - \mathfrak{B}_2 V)(\mathfrak{A}_3 U - \mathfrak{B}_3 V)(\mathfrak{A}_4 U - \mathfrak{B}_4 V)\dots(\mathfrak{A}_n U - \mathfrak{B}_n V)$$

über durch die Substitution

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \lambda_{11} U + \lambda_{12} V \\ v = \lambda_{21} U + \lambda_{22} V \end{array}\right| \begin{array}{l} U = \frac{1}{\delta}\{\lambda_{22} u - \lambda_{12} v\} \\ V = \frac{1}{\delta}\{-\lambda_{21} u + \lambda_{11} v\} \end{array} \left| \quad \delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix}, \right.$$

welcher die Substitution entspricht:

$$(T)\quad\left\{\begin{array}{l|l} \mathfrak{A}_i = \lambda_{11}\mathfrak{a}_i - \lambda_{21}\mathfrak{b}_i & \mathfrak{a}_i = \frac{1}{\delta}\{\lambda_{22}\mathfrak{A}_i + \lambda_{21}\mathfrak{B}_i\} \\ \mathfrak{B}_i = -\lambda_{12}\mathfrak{a}_i + \lambda_{22}\mathfrak{b}_i & \mathfrak{b}_i = \frac{1}{\delta}\{\lambda_{12}\mathfrak{A}_i + \lambda_{11}\mathfrak{B}_i\} \\ \multicolumn{2}{c}{A_i = \frac{-\lambda_{12}+\lambda_{22}a_i}{\lambda_{11}-\lambda_{21}a_i},} \\ \multicolumn{2}{c}{a_i = \frac{\lambda_{12}+\lambda_{11}A_i}{\lambda_{22}+\lambda_{21}A_i},} \end{array}\right.$$

so dass die Wurzeln von $\mathfrak{f}(u, v) = 0$, resp. von $\mathfrak{F}(U, V) = 0$ nach Ausscheidung des Factors $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_n$, resp. $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_n$ in Gestalt von Quotienten $a_i = \frac{\mathfrak{b}_i}{\mathfrak{a}_i}$, resp. $A_i = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{A}_i}$ erscheinen.

Es bedeuten ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung nten Grades, in welcher der Coefficient von x^{n-1} identisch Null ist, d. h. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = 0$ (sonst beliebige algebraische Grössen), und man bilde die $n-1$ (cofunctionalen) homogenen Functionen ersten, zweiten, ..., $(n-1)$ten Grades:

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = [\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n]\binom{n-1}{0} \\ h_2 = [\varepsilon_1 a_1\, 'a_{(1)1} + \varepsilon_2 a_2\, 'a_{(2)1} + \cdots + \varepsilon_n a_n\, 'a_{(n)1}]\binom{n-1}{1} \\ \cdot\;\cdot \\ h_{n-1} = [\varepsilon_1 a_1\, 'a^{n-1}_{(1)n-1} + \varepsilon_2 a_2 .\, 'a^{n-1}_{(2)n-1} + \cdots + \varepsilon_n a_n\, 'a^{n-1}_{(n)n-1}]\binom{n-1}{n-1} \end{array}\right\}$$

$$a_i = \frac{\mathfrak{b}_i}{\mathfrak{a}_i}$$

$'a^{\tau}_{(\sigma)\tau}$ in dem Sinne meiner Arbeiten über Iterationen und entsprechend $H_1, H_2, \ldots, H_n$, wenn $\frac{\mathfrak{b}_i}{\mathfrak{a}_i}$ respective durch $\frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{A}_i}$ ersetzt wird, alsdann kann man leicht folgenden fundamentalen Lehrsatz beweisen.

Lehrsatz. Jedes der H_i, multiplicirt mit dem Producte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_n$, ist eine lineare homogene Function sämtlicher h_k, multiplicirt mit dem Producte $\delta.\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_n$:

$$\mathfrak{A}_1\ldots\mathfrak{A}_n . H_i = \delta.\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_n \sum_1^{n-1}{}^k l_{ik}\, h_k .$$

Die Coefficienten $l_{i,k}$ sind homogene Functionen $(n-2)$ter Ordnung der Substitutionsconstanten $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$, behaftet mit Compositionen von Binomialcoefficienten **(unabhängig von den** h

und von den ε):

$$l_{ik} = \lambda_{11}^{n-i-k}\lambda_{21}^{k-i} \sum_{l=0;\,l=n-1}^{l} \binom{k-1}{i-l-1}\binom{n-k-1}{l} (\lambda_{11}\lambda_{22})^{i-l-1}(\lambda_{12}\lambda_{22})^{l}$$

und die Determinante $|l_{ik}|$ ist eine gewisse Potenz der Substitutionsdeterminante δ:

$$|l_{ik}| = \delta^{\mu-1}.$$

Anmerkung. Man kann die Gleichungen für die h auch so schreiben:

$$h_k = \Sigma(\varepsilon_{\alpha_1}+\varepsilon_{\alpha_2}+\cdots+\varepsilon_{\alpha_k})a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_k}$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 1, 2, 3, \ldots, n)\ \alpha_i \lesseqgtr \alpha_k.$$

Benutzt man die Willkürlichkeit der Grössen ε, um mehrere, insbesondere $n-1$ verschiedene Systeme solcher Grössen zu bilden, und bezeichnet dasjenige System der h resp. H, welches einem bestimmt herausgewählten Systeme entspricht, für welches natürlich immer die Bedingung

$$\varepsilon_{1p}+\varepsilon_{2p}+\cdots+\varepsilon_{np} = 0 \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

aber nur diese Bedingung zu bestehen braucht, in entsprechender Weise mit

$$h_{1p},\quad h_{2p},\quad \ldots,\quad h_{np};$$
$$H_{1p},\quad H_{2p},\quad \ldots,\quad H_{np},$$

so erhält man, auf Grund eines bekannten Determinantensatzes, den

Lehrsatz. Die mit dem Factor $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_n)^{n-1}$ multiplicirte Determinante $|h_{ik}|$ verwandelt sich mittels der Substitution (S) oder der entsprechenden (T) in die entsprechende mit $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_n)^{n-1}$ multiplicirte Determinante $|H_{ik}|$, aber ausserdem noch multiplicirt mit der μten Potenz der Substitutionsdeterminante δ, also:

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_n)^{n-1}|h_{ik}| = \delta^{\mu}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_n)^{n-1}|H_{ik}|.$$

Der Ausdruck $|h_{ik}|(\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_n)^{n-1}$, oder $|h_{ik}|$ selbst, wenn $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_n = 1$ ist, bleibt somit gegen die Substitution (S) bis auf eine Potenz von δ invariabel; da aber $|h_{ik}|$ eine rationale Function der Wurzeln von $\mathfrak{f}(u, v) = 0$ und zunächst keine symmetrische Function der Wurzeln zu sein braucht, so nennen wir $|h_{ik}|$ eine **algebraische** relative Invariante der Form $\mathfrak{f}(u, v)$.

Bezeichnet man nunmehr (wenn $|h_{ik}|$ nicht symmetrisch ist) mit $|h_{ik}|_1$, $|h_{ik}|_2$, ..., $|h_{ik}|_j$ diejenigen Resultate, welche aus $|h_{ik}|$ durch die zugehörigen j Permutationen, gegen welche $|h_{ik}|$ empfindlich ist, sich ergeben, so ist **jede symmetrische Function der** $|h_{ik}|_j$ $(j = 1, 2, \ldots, j)$ **eine rationale relative Invariante von** $\mathfrak{f}(u, v)$.

Sehr wichtig ist noch die Bemerkung, dass, wenn die Form nten Grades $\mathfrak{f}(u, v)$ mit einer andern Form $n_1$ten Grades $\mathfrak{f}_1(u, v)$ multiplicirt

wird, in der die einzelnen Factoren die Gestalt $(\mathfrak{a}_i u + \mathfrak{b}_i v;\ i = n+1, n+2, \ldots, n+n_1)$ haben, und die infolge von (S) in $\mathfrak{F}_1(U, V)$ mit den Factoren $(\mathfrak{A}_i U + \mathfrak{B}_i V)$ $(i = n+1, n+2, \ldots, n+n_1)$ übergehen mögen, so lässt sich leicht alles in Bezug auf $\mathfrak{f}(u, v)$ Gewonnene auch auf die Form $(n+n_1)$ten Grades $f(u, v) = \mathfrak{f}(u, v) . \mathfrak{f}_1(u, v)$ übertragen.

Es ist nämlich $|h_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ auch ohne weiteres eine algebraische relative Invariante der Form $f(u, v)$; und um eine rationale Invariante zu erhalten, braucht man nur in $|h_{ik}|$ noch sämtliche j_1 zugehörige Permutationen zu berücksichtigen, wenn die Wurzeln von $\mathfrak{f}_1(u, v) = 0$ gleichzeitig mit denen von $\mathfrak{f}(u, v) = 0$ in Betracht gezogen werden, und dann eine symmetrische Function der entsprechenden $j + j_1$ Determinanten $|h_{ik}|$ zu construiren.

Da n und n_1 willkürliche, von einander unabhängige ganze Zahlen sind, so ist in dem Obigen der allgemeinere Satz enthalten:

Ist eine Form $m$ten Grades gegeben, und bildet man aus einer beliebigen Anzahl $(n = 2, 3, \ldots, m)$ ihrer Wurzeln die oben beschriebenen homogenen Functionen $h_1, \ldots, h_{n-1}$, so wird die aus den entsprechenden $h_{1,p}, h_{2,p}, \ldots, h_{n-1,p}$ gebildete Determinante $|h_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots, n-1)$ eine **algebraische (relative) Invariante**, und jede symmetrische Function sämtlicher $|h_{ik}|_j$, welche mit Berücksichtigung **aller** Wurzeln der Form durch Permutationen gebildet werden können, ist eine **rationale** (relative) Invariante der Form.

N. B. 1) Genau dasselbe Verfahren wende ich für Covarianten an.

2) Andere Invarianten, oder Covarianten, als die nach obiger Methode gebildeten, giebt es überhaupt nicht.

3) Die ganze Theorie der Invarianten binärer Form lässt sich aus der obigen Darstellung herleiten. Besonders einfach ergiebt sich die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten.

Ueber Projectionen der mehrdimensionalen regelmässigen Körper.

Von

V. Schlegel (Hagen i. W.).

1. Die ebenen Projectionen dreidimensionaler Körper veranschaulichen uns die Eigenschaften dieser Körper teils ohne, teils mit

Zuhülfenahme unseres räumlichen Vorstellungsvermögens, welches die der ebenen Zeichnung fehlende dritte Dimension ergänzt. Dieses Vermögen hilft uns auch über die Schwierigkeit hinweg, welche für das Verständnis der Zeichnung daraus entsteht, dass in derselben Kanten sich kreuzen und Flächen sich decken. Andererseits kann diese Schwierigkeit, z. B. bei der Darstellung eines regelmässigen Polyeders, dadurch beseitigt werden, dass man eine Fläche des als hohl vorgestellten Polyeders sich entfernt denkt, und als Projectionscentrum einen nahe vor der Mitte dieser Fläche gelegenen Punkt wählt. Dieser Augenpunkt giebt im Rahmen des Umfanges der entfernten Fläche ein Bild des Polyeders, bei welchem keine Kante die andere kreuzt, und nur die Figur der weggenommenen Fläche alle anderen überdeckt.

2. Die nach diesem Princip hergestellten Projectionszeichnungen der fünf regelmässigen Körper lösen, unabhängig von ihrem räumlichen Ursprunge, ein Problem der ebenen Geometrie, nämlich: ein gegebenes Polygon in eine endliche Anzahl von Polygonen mit derselben Seitenzahl so zu zerlegen, dass in jeder Ecke gleich viele Kanten und Figuren zusammenstossen, die gegebene Figur mit eingerechnet. Dieses Problem ist nur am Dreieck, Viereck und Fünfeck lösbar, und liefert keine anderen Zerlegungen als diejenigen, welche durch die obigen Projectionszeichnungen dargestellt sind. — Uebrigens kann auf die Regelmässigkeit der Begrenzungsfiguren der gegebenen Polyeder verzichtet werden, ohne dass dadurch die Projectionszeichnungen ihre wesentlichen Eigenschaften verlieren.

3. Dasselbe Zerlegungsproblem, an einem regelmässigen Polyeder gelöst, liefert sechs Zerlegungen, nämlich: des Tetraeders in 4, 15, oder 599 Tetraeder, des Hexaeders in 7 Hexaeder, des Oktaeders in 23 Oktaeder, des Dodekaeders in 119 Dodekaeder. Hierbei stossen in jeder Ecke gleich viele Kanten, Flächen und Körper zusammen, in jeder Kante gleich viele Flächen und Körper, den zerlegten Körper mitgerechnet. Diese Zerlegungen sind durch die von Hrn. L. Brill (Serie XV, No. I u. Ia) publicirten Modelle vollständig, und durch Ansichten, Netze und Modelle aus Cartonpapier (Weiterer Nachtrag zur Serie XV) in ihren Teilen zur Darstellung gebracht worden.

4. Aus den oben erwähnten fünf ebenen Figuren, welche die „homogenen“ Zerlegungen des Dreiecks, Vierecks und Fünfecks darstellen, könnte man rückwärts auf die Existenz von fünf regelmässigen Körpern des dreidimensionalen Raumes schliessen. In streng analoger Weise können die sechs räumlichen Modelle, welche die „homogenen“

Zerlegungen des Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders und Dodekaeders darstellen, als Projectionen von ebenso vielen regelmässigen vierdimensionalen Körpern betrachtet werden, welche die Namen 5-Zell, 16-Zell, 600-Zell, 8-Zell, 24-Zell, 120-Zell erhalten haben. Die Unmöglichkeit, bei Betrachtung dieser Modelle die fehlende vierte Dimension aus einer räumlichen Vorstellung zu ergänzen, bildet den einzigen, aber für die wissenschaftliche Erkenntnis der Eigenschaften jener vierdimensionalen Körper auch nur nebensächlichen, Unterschied, der principiell zwischen den Modellen und den analogen ebenen Projectionsfiguren besteht*).

5. Die drei mit den Gliedern 1) Dreieck, Tetraeder, Fünfzell, 2) Quadrat, Hexaeder, Achtzell, 3) Quadrat, Oktaeder, Sechzehnzell beginnenden Reihen von Gebilden setzen sich, wie Stringham gezeigt hat, in Räume mit beliebiger Dimensionenzahl fort. Ebene Projectionen aller dieser Gebilde werden systematisch geliefert durch regelmässige Polygone mit gewissen Systemen von Diagonalen. (S. des Verf.'s Aufsatz: Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions. Rendic. del Circ. mat. di Palermo V, 1.) — Für die zweite der obigen Reihen entsteht eine weitere Projectionsdarstellung durch successive Parallelverschiebungen einer Strecke und der aus ihr hierbei entstehenden Gebilde in derselben Ebene oder in demselben Raume.

6. Dem Parallelogramm, als zweidimensionalem zweiseitigem Prisma, entspricht das gewöhnliche dreidimensionale dreiseitige und das vierdimensionale vierseitige Prisma. Letzteres lässt sich durch drei Räume in vier inhaltsgleiche Fünfzelle zerlegen. Diesen Körper mit seiner Zerlegung stellt das von Hrn. L. Brill publicirte Modell Serie XV, Nr. Ib dar.

7. Entsprechend der in Nr. 5 erwähnten Reihe: Quadrat, Würfel, Achtzell etc. lässt sich der Begriff des magischen Quadrates auf alle Glieder dieser Reihe übertragen. Für diese n-dimensionalen magischen Würfel hat der Verfasser eine von den obigen abweichende, speciell für Zahlkörper zweckmässige Darstellung in der Ebene im „Bull. Soc. math. de France“, T. XX, p. 97 gegeben, nebst dem Beispiel des vierdimensionalen magischen Würfels mit der Seitenzahl drei. Ein Atlas, welcher n-dimensionale magische Würfel mit der Seitenzahl r, für die Fälle $n = 3$ und $r = 3$ bis 9; $n = 4$, $r = 3$ bis 6; $n = 5$, $r = 3$

*) S. des Verf.'s Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. Nova Acta d. Leop. Carol. Akad. Bd. 44, Nr. 4.

enthält, sollte diesem Teile des beabsichtigten Vortrags zur Veranschaulichung dienen. Die Herstellung dieser Würfel beruht auf der vom Verfasser noch nicht publicirten Lösung der Aufgabe: Aus einem gegebenen n-dimensionalen magischen Würfel mit der Seitenzahl r einen (n+1)-dimensionalen mit derselben Seitenzahl zu finden.

8. Von Autoren auf dem Gebiete der mehrdimensionalen regelmässigen Körper sind, soweit des Verfassers Kenntnis reicht, zu erwähnen: Stringham, Rudel, Hoppe, Puchta, Biermann, Hess, Goursat, Scheffler, Durège, Schoute.

Zur Theorie der Gleichungen fünften Grades.

Von
Joh. Schumacher (Neustadt a/H.).

Wir legen unsern Untersuchungen die Gleichung

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

zugrunde. Ihre Wurzeln seien x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) und von einander verschieden. Um alle Functionengattungen zu finden, welche aus diesen fünf Grössen durch additive, subtractive und multiplicative Operationen entstehen, bedürfen wir der Kenntnis der Untergruppen, welche in der vollständigen Gruppe von fünf Elementen enthalten sind. Unter diesen verdient die zweifach transitive Untergruppe, welche aus 20 linearen und ganzen Substitutionen von der Form $\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}$ mod. 5 besteht und nach Herrn Kronecker metacyklisch heisst, besondere Beachtung. Sie ist mit der Diedergruppe*) des Herrn F. Klein identisch.

Es sei $x_0^\lambda x_1^\mu x_2^\nu x_3^\varrho$ das Leitglied einer ganzen symmetrischen Function. Die Exponenten λ, μ, ν, ρ genügen gleichzeitig den Bedingungsgleichungen**)

$$1) \quad \lambda \geqq \mu \geqq \nu \geqq \rho,$$

$$2) \quad \lambda \leqq 4; \quad \mu \leqq 3; \quad \nu \leqq 2; \quad \rho \leqq 1,$$

welche gestatten, die Anzahl aller symmetrischen Functionen von

*) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder. (Leipzig, B. G. Teubner 1884.)

**) L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. (Berlin, G. Reimer 1882.)

x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) auf 40 zu reduciren*), ohne der Allgemeinheit der Betrachtung Eintrag zu thun. Zerlegen wir nun jede derselben in ihre metacyklischen Bestandteile, was auf verschiedene Weise geschehen kann, so zeigt sich, dass alle symmetrischen Functionen von 20 oder weniger Gliedern sich überhaupt nicht spalten lassen, dass dagegen jene von 30 Gliedern in zwei metacyklische Bestandteile von je 20 und je 10, jene von 60 Gliedern in drei Functionen von je 20 Gliedern zerfallen, und die symmetrische Function von 120 Gliedern sechs metacyklische Functionen von je 20 Gliedern liefert. Es kann nun leicht der Satz bewiesen werden, dass alle ganzen und rationalen, metacyklischen Functionen einer Gleichung fünften Grades ganze und rationale Functionen der elementaren symmetrischen Functionen und der metacyklischen Functionen

$$w_1 = \sum_{20} x_0^2 x_1 x_2,$$
$$w_2 = \sum_{20} x_0^2 x_1^2 x_2,$$
$$w_3 = \sum_{20} x_0^2 x_1^2 x_2 x_3,$$
$$w_4 = \sum_{20} x_0^3 x_1^2 x_2^2,$$
$$w_5 = \sum_{20} x_0^3 x_1^3 x_2 x_3$$

(w_5 ist durch Adjunction des Factors $^1/_5$ durch w_1, w_2, w_3, w_4 ganz und rational ausdrückbar)

sind. Der Beweis wird erbracht, indem man alle metacyklischen Functionen, in welche die symmetrischen Functionen zerfallen, durch die Coefficienten der Gleichung und die Functionen w_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) wirklich ausdrückt, oder auch, indem man jede metacyklische Function nach Potenzen einer Wurzel ordnet und die Coefficienten dieser Potenzen, welche Functionen der Wurzeln einer Gleichung vierten Grades und inbezug auf vier Wurzeln im allgemeinen cyklischer Natur sind, in derselben Weise wie vorher die metacyklischen Functionen behandelt. Man gewinnt hierbei ein Bild, wie sich aus der vollständigen Gruppe von fünf Elementen ihre Untergruppen abzweigen.

Durch die Grössen w_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) können aber alle ganzen metacyklischen Functionen nicht bloss ganz und rational, sondern auch linear mit Hülfe der elementaren symmetrischen Functionen dargestellt werden, weil alle Combinationen mit Wiederholung zur zweiten Klasse

*) J. Schumacher, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. (Leipzig, G. Böhme 1890.)

lineare Functionen von w_i sind. Um dies einzusehen, genügt die Berechnung der Producte $w_1 . w_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, aus denen die Relationen für alle übrigen auf rein analytischem Wege hervorgehen.

Wegen ihres invarianten Charakters lassen wir die fünf Producte, ausgedrückt durch eine lineare Beziehung der w_i, folgen:

$$w_1^2 = 4a_1^3 a_5 - 2a_1 a_3 a_4 - 12a_4^2 + 30a_3 a_5 - 2a_1^2 a_2 a_4 + 4a_2^2 a_4 - 6a_1 a_2 a_5 + 2(a_1 a_3 - 4a_4)w_1 + a_3 w_2 + 2a_2 w_3 + a_1 w_4 - 5w_5;$$

w_5 kann hieraus durch w_1, w_2, w_3, w_4 berechnet werden.

$$w_1 w_2 = -a_3^3 - a_1 a_2^2 a_4 + a_1 a_2 a_3^2 + 4a_2 a_3 a_4 + 4a_1^2 a_2 a_5 - 4a_1^2 a_3 a_4 + 8a_1 a_3 a_5 - 3a_2^2 a_5 + (a_1 a_4 - 5a_5)w_1 + (a_1 a_3 - 2a_4)w_2 + (a_1 a_2 - a_3)w_3 + a_2 w_4 - 2a_1 w_5;$$

$$2w_1 . w_3 = -a_2 a_3 a_5 + a_3^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 a_4 - 6a_1 a_4 a_5 - 3a_1^2 a_4^2 + 25a_5^2 + a_1 a_2^2 a_5 + 4a_2 a_4^2 + 4a_1^2 a_3 a_5 + (a_3^2 - 4a_1 a_5)w_1 + (a_1 a_4 - 5a_5)w_2 + (a_2^2 - 4a_4)w_3 + a_3 w_4 - a_2 w_5;$$

$$w_1 . w_4 = 15a_1 a_5^2 - 16a_2 a_4 a_5 - 11a_3^2 a_5 + 2a_1^2 a_4 a_5 + a_1^2 a_2 a_3 a_4 - 3a_1 a_2 a_3 a_5 + 2a_1 a_3^2 a_4 + 3a_2^3 a_5 + 4a_3 a_4^2 - a_1^2 a_2^2 a_5 + 4a_1 a_2 a_4^2 - 3a_2^2 a_3 a_4 - a_1^3 a_4^2 + (a_1 a_2 a_4 + 3a_3 a_4 - 4a_2 a_5 - a_1 a_3^2)w_1 + (a_2 a_4 - 2a_1 a_5 - a_3^2)w_2 - (a_1 a_4 + a_2 a_3 - 5a_5)w_3 - 2a_4 w_4 + 3a_5 w_5;$$

$$2w_1 . w_5 = 6a_1 a_3^2 a_5 - 8a_1 a_3 a_4^2 - 4a_1^2 a_2 a_3 a_5 + 2a_1^2 a_3^2 a_4 - a_1 a_2^2 a_3 a_4 - 8a_3 a_4 a_5 + 16a_4^3 - 34a_1 a_2 a_4 a_5 + 4a_2^2 a_4^2 + 8a_1^3 a_4 a_5 + a_1 a_2^3 a_5 + 8a_1^2 a_5^2 - a_1^2 a_2 a_4^2 - a_2 a_3^2 a_4 + 35a_2 a_5^2 + 9a_2^2 a_3 a_5 + (-2a_3 a_5 + 8a_4^2 + 2a_1 a_2 a_5 - 4a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2)w_1 + (7a_2 a_5 + a_1 a_2 a_4 - 2a_3 a_4 - 4a_1^2 a_5) . w_2 + (2a_1^2 a_4 - 2a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + a_2^3 - 2a_1 a_2 a_3 + 2a_3^2)w_3 + (a_2 a_3 - 2a_1 a_4 + 10a_5)w_4 + (2a_1 a_3 - 4a_4 - a_2^2)w_5 .$$

Es bleibt dahingestellt, ob es überhaupt möglich ist, die Functionen w_i so zu wählen, dass der vor den Producten $w_1 . w_3$, $w_1 . w_5$ und allen übrigen hier nicht aufgeführten Producten stehende Factor 2 wegfällt. Bei analogen Betrachtungen für Gleichungen niedrigeren Grades ist eine derartige Wahl von Functionen mir bis jetzt noch nicht gelungen.

Erweitert man die Relationen auf alle 15 Producte von $w_i . w_k$, so entspringen diesem Operationscyklus neue, durch ihren prononcirten Invariantencharakter ausgezeichnete Gleichungen, deren wichtigste Verwertung in der Bildung der Resolvente sechsten Grades einer Gleichung fünften Grades, sowie in der Ableitung der Transformation der Functionen w_i in einander gelegen ist. Der Uebergang von der metacyklischen Resolvente zur wirklichen Auflösung der Gleichung vom fünften Grade kann dann nach irgend einer der bekannten Methoden erfolgen.

Indem man auf alle Functionsgattungen den vorstehenden ähnliche Betrachtungen ausdehnt, kann der Schluss gezogen werden, dass Gleichungen fünften Grades ohne Affect algebraisch nicht auflösbar sind.

Ueber die sphärische Trigonometrie.

Von

E. Study (Marburg).

Der Verfasser hatte die Absicht, in seinem Vortrag darauf hinzuweisen, wie die Formeln der sphärischen Trigonometrie, die in den elementaren Lehrbüchern wohl überall in denselben längst erstarrten Formen hingestellt werden, auf mannigfache Art in Beziehung zu anderen Gebieten der modernen Wissenschaft gesetzt und so gewissermassen mit neuem Leben erfüllt werden können.

Als besonders fruchtbar erweist sich in dieser Hinsicht ein bis jetzt, wie es scheint, nicht bekannter Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen. Sieht man ein sphärisches Dreieck als bestimmt an, wenn die Cosinus seiner Seiten a_1, a_2, a_3 und seiner „Winkel" α_1, α_2, α_3, d. h. der Seiten des Polardreiecks, gegeben sind, so besteht der Satz, dass einer ternären orthogonalen Substitution im allgemeinen ein einziges sphärisches Dreieck zugeordnet werden kann, und umgekehrt. Sind $a_{00}:a_{11}:a_{12}:\ldots:a_{33}$ in der bekannten Anordnung die zehn Coefficienten der orthogonalen Substitution, so wird die in Rede stehende Beziehung vermittelt durch die Formeln

$$\cos a_1 = \frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad \cos a_2 = \frac{a_{31}}{a_{22}}, \quad \cos a_3 = \frac{a_{12}}{a_{33}},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_{32}}{a_{11}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{a_{21}}{a_{33}}.$$

Dieses sehr einfache, aber ziemlich verborgen liegende Theorem gestattet zahlreiche merkwürdige Anwendungen. Wir erwähnen die folgenden Sätze.

Deutet man die Euler'schen Parameter der orthogonalen Substitution als homogene Coordinaten eines Punktes im dreifach ausgedehnten Raume, so wird jedem reellen Dreieck ein reeller Raumpunkt zugeordnet. Diese Punkte erfüllen aber nicht den ganzen Raum, sondern nur das Innere von vier getrennten Gebieten, die in zwölf Punkten an einander

stossen. Jedes der genannten Gebiete ist, im Sinne der projectiven Geometrie, ein reguläres Oktaeder; die zwölf Ecken, in denen die vier Oktaeder zusammenhängen, bilden die bekannte, schon vielfach untersuchte Figur der desmischen Tetraeder, und eine ebensolche Figur bilden die Begrenzungsflächen. Zu einem gegebenen Dreikant gehören $3.2.16 = 96$ im obigen Sinne bestimmte sphärische Dreiecke; die zugehörigen Raumpunkte bilden sechs Kummer'sche Configurationen, die in bestimmter Weise mit einander verkettet sind. — Man gelangt durch diese Abbildung u. a. zu einer vollständigen Einsicht in den Zusammenhang der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, die von der Gesamtheit aller reellen sphärischen Dreiecke gebildet wird. —

Unser Satz wirft ein neues Licht auf den seit Lagrange bekannten Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit der Theorie der elliptischen Functionen, und er zeigt, dass ein ähnlicher Zusammenhang auch noch für die Theorie der hyperelliptischen Functionen besteht.

Es findet sich unter anderem, dass man mit Hülfe der doppelt periodischen Functionen Sinus und Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks eindeutig ausdrücken kann durch sechs Verhältnisgrössen $\omega_\lambda : \omega_\mu : \omega_\nu : u_1 : u_2 : u_3$, zwischen denen zwei lineare Gleichungen bestehen:

$$\omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = 0, \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Bezeichnet man nämlich mit σ, σ_λ, σ_μ, σ_ν die zu dem ersten Grössensystem gehörigen σ-Functionen, so kann man setzen

$$\operatorname{tg}\frac{a_i}{2} = \frac{\sigma_\lambda \omega_\mu . \sigma u_i . \sigma_\nu u_i}{\sigma \omega_\mu . \sigma_\lambda u_i . \sigma_\mu u_i}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2} = \frac{\sigma_\lambda \omega_\nu . \sigma u_i . \sigma_\mu u_i}{\sigma \omega_\nu . \sigma_\lambda u_i . \sigma_\nu u_i}.$$

Die Coefficienten $a_{11}, \ldots, a_{33}$ der orthogonalen Substitution, die dem sphärischen Dreieck zugeordnet ist, haben die Werte

$$\frac{\sigma_\lambda(2u_1)}{\sigma(2u_1)}, \quad \frac{\sigma_\mu(2u_3)}{\sigma(2u_3)}, \quad \frac{\sigma_\nu(2u_2)}{\sigma(2u_2)},$$
$$\frac{\sigma_\nu(2u_3)}{\sigma(2u_3)}, \quad \frac{\sigma_\lambda(2u_2)}{\sigma(2u_2)}, \quad \frac{\sigma_\mu(2u_1)}{\sigma(2u_1)},$$
$$\frac{\sigma_\mu(2u_2)}{\sigma(2u_2)}, \quad \frac{\sigma_\nu(2u_1)}{\sigma(2u_1)}, \quad \frac{\sigma_\lambda(2u_3)}{\sigma(2u_3)};$$

der zehnte Coefficient a_{00} ist der im Additionstheorem der $\wp$-Function

auftretende Ausdruck

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(2u_2)-\wp'(2u_3)}{\wp(2u_2)-\wp(2u_3)}=\frac{1}{2}\frac{\wp'(2u_3)-\wp'(2u_1)}{\wp(2u_3)-\wp(2u_1)}=\frac{1}{2}\frac{\wp'(2u_1)-\wp'(2u_2)}{\wp(2u_1)-\wp(2u_2)}$$

$$=\sqrt{\wp(2u_1)+\wp(2u_2)+\wp(2u_3)}=-\frac{\sigma'(2u_1)}{\sigma(2u_1)}-\frac{\sigma'(2u_2)}{\sigma(2u_2)}-\frac{\sigma'(2u_3)}{\sigma(2u_3)}.$$

Die Ausdehnung dieser Sätze auf elliptische Functionen mit vier unabhängigen Argumenten führt zu einer neuen Auffassung der fundamentalen Additionstheoreme von Jacobi und Weierstrass.

Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck.

Von

Dr. **Fritz Kötter**
in Berlin.

Wie so mancher Zweig der Mechanik hat sich die Erddrucktheorie, d. i. die Statik sandförmiger Massen, im unmittelbaren Anschluss an eine ganz bestimmte Aufgabe der technischen Praxis entwickelt. Der Wunsch, Regeln für die Dimensionen der Erdbekleidungen oder Futtermauern — so nennt man Mauern, welche zur Stützung von Erdreich bestimmt sind — auf rationelle Weise abzuleiten, gab die erste Veranlassung zur Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse sandförmiger Massen. Da die genannte Aufgabe für den Festungsbau von besonderer Wichtigkeit ist, so kann es nicht befremden, dass wir die ersten primitiven Betrachtungen über den Erddruck bei Festungsbauern finden, und dass sich um dieses Gebiet besonders Mitglieder eines Standes verdient gemacht haben, dem die Mechanik in Folge einer glücklichen Vereinigung weitgehender theoretischer Kenntnis mit den Anregungen, welche eine ständige Berührung mit den Fragen der Technik giebt, auch sonst manche wichtige Förderung verdankt, nämlich französische Ingenieurofficiere.

Der Physiker Coulomb und der Geometer Poncelet gehörten diesem Stande an, und beide haben in der hervorragendsten Weise zur Entwickelung der Erddrucktheorie beigetragen, der eine, indem er zuerst auf rationelle Weise ein Princip für die Bestimmung des Erddrucks ermittelte, der andere, indem er hieraus eine auch auf complicirtere Fälle anwendbare graphische Construction ableitete. Coulomb hat, wie wir im Gegensatz zu anderen Schriftstellern schon jetzt hervorheben wollen, sein Princip in logisch und mathematisch einwandsfreier Weise begründet auf gewissen physikalischen Voraussetzungen über die Natur des Sandes und auf einer gewissen vereinfachenden Annahme mehr geometrischer Natur. So vorteilhaft diese Annahme für die Einfachheit der Bestimmung des Seitendrucks der Erde ist, hat sie doch einen ganz beträchtlichen Mangel im Gefolge. Sie hindert nämlich die Anwendbarkeit der ent-

wickelten Theorie auf andere als das eben angegebene Problem. Diesen Mangel beseitigt eine Betrachtungsweise, die ähnlich, wie es in der Hydrostatik und in der Elasticitätstheorie geschieht, ausgeht von den Beziehungen zwischen den Druckkräften, welche an einer beliebigen Stelle im Innern der Sandmasse herrschen.

Rankine und später unabhängig von ihm Winckler und M. Lévy haben diesen Weg eingeschlagen und sind dabei zu bemerkenswerten Resultaten gelangt. Aber auch diese Entwickelungen unterliegen einer gewissen Beschränkung, die allerdings mehr für den Theoretiker als für den Praktiker von Bedeutung ist. Sie beziehen sich nämlich ausschliesslich auf ein Gebiet von zwei Dimensionen, und erfordern also bei ihrer Anwendung, dass sich alles völlig gleichmässig in Bezug auf eine horizontale Längsrichtung verhält. Auch lassen sich diese Entwickelungen nicht, wie man wohl meinen möchte, ohne weiteres auf ein Gebiet von drei Dimensionen übertragen. Sie erfordern zu dem Ende eine gewisse Umformung, der zufolge dann jede Aufgabe der Erddrucktheorie zu einer ziemlich schwierigen Aufgabe der Variationsrechnung wird.

Das Coulomb'sche Princip und die Rankine'schen Entwickelungen beruhen im Grunde auf denselben Vorstellungen über die physikalische Natur des Sandes. Ganz anders ist in neuerer Zeit Boussinesq verfahren, um Grundlagen für die Statik des Sandes zu gewinnen. Von allgemeineren Ausdrücken für die Druckkräfte ausgehend, gewinnt der genannte Forscher durch Specialisirung die besonderen Formeln für die verschiedenen Klassen von Körpern und bringt so die Statik des Sandes in eine nahe und innige Beziehung zur Hydrostatik und zur Lehre vom Gleichgewicht elastischer Körper.

Es ist fast selbstverständlich, dass von Alters her Versuche über den Druck von Sand gemacht worden sind. In welchen Beziehungen die Ergebnisse dieser Versuche zu den theoretischen Resultaten stehen, nach welcher Richtung hin sie vielleicht noch als lückenhaft zu betrachten sind und anderes in Bezug auf die experimentelle Seite der Frage, soll im Schlusscapitel unserer Abhandlung erörtert werden.

I.

Die Vorläufer der Coulomb'schen Theorie, das Coulomb'sche Princip und die graphisch-geometrische Druckbestimmung Poncelet's.

§ 1. Fast ohne Ausnahme nehmen die Bearbeiter der Erddrucktheorie die Thatsache zum Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen, dass man

erdige oder sandige Substanzen bis zu einer gewissen Böschung aufschütten kann, dass aber bei dem Versuche, den Sand steiler aufzuschütten, ein Abrollen desselben eintritt. Das am nächsten liegende und einfachste war es offenbar, den Widerstand, welchen standfeste Mauern diesem Abrollen entgegensetzen, ähnlich zu behandeln, wie die Kraft, welche das Gleiten eines starren Körpers auf einer schiefen Ebene hindert. In der That beruhen auch die ältesten Erddrucktheorien auf diesem Gedanken. Sei es nun, dass man das Prisma, welches von der zunächst als senkrecht angesehenen hinteren Fläche der Mauer und der natürlichen Böschung begrenzt ist, als Ganzes behandelt, sei es dass man dasselbe durch Ebenen, die der natürlichen Böschungsebene parallel sind, in Schichten zerlegt, immer kommt es darauf hinaus, das Gewicht des Prismas in zwei Componenten zu zerlegen, von denen die eine der Böschungsebene parallel ist und die andere senkrecht zu ihr steht. Die erstere giebt dann den Druck der Erde gegen die Mauer.

Offenbar trägt das Verfahren, bei welchem das Prisma in Schichten zerlegt wird, weiter, indem dasselbe nicht nur den Gesamtdruck, sondern auch seine Verteilung über die Mauer liefert. Namentlich erlaubt diese Methode einen sicheren Schluss in Bezug auf diejenige Grösse, um welche es sich bei der Stabilitätsuntersuchung vor allem handelt, nämlich in Bezug auf das Moment für die vordere Kante der Mauer.

Zwar gelangen auch diejenigen zu dieser Grösse, welche das ganze Prisma betrachten, aber doch nur vermittelst einer willkürlichen Annahme, welche bloss zufällig zu demselben Resultat führt, wie das eben geschilderte Verfahren. Hier wird das Gewicht des ganzen Prismas im Schwerpunkt vereinigt und dann in zwei Componenten zerlegt, d. h. man nimmt an, dass sich die drei Kräfte, welche auf das Prisma wirken, im Schwerpunkte treffen müssen, während in Wirklichkeit doch nur erforderlich ist, dass sie sich in irgend einem Punkte schneiden; man kann also mit Grund nicht mehr angeben, als dass sich die Reactionen der Mauer und des stehen bleibenden Erdreichs auf einer Verticalen durch den Schwerpunkt des Prismas schneiden müssen.

Wir finden diese Auffassung bei den Architekten Bullet*) und Rondelet**). Nach Mayniel***) findet sich dieselbe Lehre in ver-

---

*) Traité d'architecture pratique, 1691.

**) Traité théorique et pratique de l'art de bâtir.

***) Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement. Paris 1808. 4°.

schiedenen Denkschriften des „dépôt des fortifications"; es werden angeführt Sallonnyer und Blaveau (vom Jahre 1767) sowie Tersac de Montlong (1774). In Deutschland hat sich diese Lehre lange erhalten, auch nachdem man schon bei weitem rationellere Theorien besass. Wir erwähnen zum Beweise dieser Behauptung Kästner*), Graf v. Kinsky**), Vossmann***), Maschek†) u. a. Sonstige Anhänger dieser Lehre sind A. M. Lorgna††), Ypey†††), von Clasen*†).

§ 2. Eine schwache Seite der im vorhergehenden Paragraphen dargelegten Theorie ist offenbar die, dass der Druck des Erdreichs gegen die Mauer parallel der Böschungsebene, also völlig unabhängig von der Beschaffenheit der Mauer sein soll. Je glatter die Mauer ist, um so geringer wird aber die Neigung des Druckes zur Normale sein müssen, oder anders gesprochen auf die Druckneigung ist die gegenseitige Reibung des Erdreichs und Mauerwerks von Einfluss. Will man diese vernachlässigen, so muss die Druckrichtung senkrecht zur Mauer genommen werden. So gelangt man zu einer Druckbestimmung, bei welcher das Gewicht des Prismas in zwei Componenten senkrecht zur Mauer und zur Böschungsebene zerlegt wird.

---

*) Vergl. Woltmann, Beyträge zur hydraulischen Architektur Bd. III pg. 146 ff. Göttingen 1794.

**) Graf von Kinsky, Vom Druck der Erde auf Futtermauern. Abh. einer privaten Gesellschaft in Böhmen, Bd. III, und auch Böhm's Magazin für Ingenieurs und Artilleristen Bd. XII p. 127 ff. Frankfurt und Leipzig 1795.

***) J. H. Vossmann, Handbuch für Ingenieurs und Bauleute über die reine Theorie des Drucks der Erde bei allerlei Mauern an Festungswerken, Weinbergen, Heerstrassen. 8°. Mannheim 1804.

†) F. J. Maschek, Theorie der menschlichen und thierischen Kräfte. Mit einem Anhange über den Erdendruck und die Strebepfeiler. Prag 1842. 8°.

††) Anton Maria Lorgna, Tentativo fiscio-meccanico sulla resistenza muri contro la spinta de terreni. Atti di Siena T. II p. 155 ff., Böhm's Mag. f. Ing. u. Artill. Bd. IV p. 119—162. Giessen 1778.

†††) N. Ypey, Verhandeling over de Profilen der Muuren. Verhandeling der Haarlemsche Maatshappy. 6 D. 2 St. p. 516—542, deutsch in Böhm's Mag. f. Ing. u. Artill. Giessen 1778, p. 93—118.

*†) von Clasen, Allgemeine Berechnung der Stärke der Futtermauern gegen den Druck der Erde, Böhm's Mag. f. Ing. u. Artill. Bd. V, Giessen 1779. — — Beweis, dass der Druck der Erde gegen eine lothrechte Mauer gleich seye dem Druck des Wassers gegen eben dieselbe Fläche, Böhm's Mag. f. Ing. u. Artill. Bd. VII p. 199—204. Giessen 1781.
— — Fortsetzung des Gedankens des Herrn Gerlach im Anhange der mechanischen Weisheit p. 29 V. Stück. Böhm's Mag. f. Ing. u. Artill. Bd. VII p. 205—227. Giessen 1781.

Man überzeugt sich leicht, dass bei dieser Theorie der Druck des Erdreiches gegen die Futtermauer unabhängig von dem Böschungswinkel der Substanz und gleich dem Druck wird, welchen eine Flüssigkeit von gleichem specifischen Gewicht wie das Erdreich ausüben würde. Bei der Bestimmung des Momentes macht sich hier ein Unterschied geltend, je nachdem man die Sandmasse in Schichten zerlegt, oder ob man die ganze Masse des Prismas sich im Schwerpunkt vereinigt denkt und dann das Gewicht in die beiden Componenten zerlegt. Nach der letzteren Betrachtungsweise greift der Druck im unteren Endpunkt des oberen Drittels an, während nach der anderen mehr rationellen Betrachtungsweise, genau wie bei Flüssigkeiten, der obere Endpunkt des unteren Drittels sich ergiebt*).

§ 3. Dass die Ergebnisse der vorstehend gekennzeichneten Theorie so vollkommen mit den Gesetzen der Hydrostatik übereinstimmen, hat seinen Grund in der willkürlichen Annahme, dass der Druck längs der Trennungsfläche des Erdreichs auf derselben senkrecht stehe. Den ersten Versuch, sich einen Einblick in die hier obwaltenden Verhältnisse zu verschaffen, hat Couplet**) gemacht. Der Theorie wird die Auffassung zu Grunde gelegt, dass der Sand aus gleich grossen Kugeln bestehe, die in gewisser, nach unserer Auffassung willkürlich angenommener Weise regelmässig aufgeschichtet sind. Jedes einzelne Korn ruht dabei auf drei anderen, mit welchen es ein regelmässiges Tetraeder bestimmt. Hieraus wird zunächst theoretisch die Böschung abgeleitet. Wenn nun eine glatte Wand vor dem Sande aufgestellt ist, so werden die unmittelbar hinter derselben befindlichen Sandkörner anders gestützt als die im Innern befindlichen. Daraus leitet Couplet dann ab, dass das von der Wand und der Böschungsebene eingeschlossene Sandgewicht in

---

*) Mayniel führt in seinem schon genannten Werke diese Entwickelung unter dem Titel „Théorie de divers ingénieurs“ auf.

Zu nennen sind hier auch die schon citirten Abhandlungen des dänischen Obersten von Clasen, welcher, wie die Titel (vergl. oben S. 80) zeigen, zu dem Resultat gelangt, dass der Erddruck gleich dem Wasserdruck ist. Jedoch geht aus der einen Ableitungsweise, bei welcher der Erddruck im unteren Endpunkt des oberen Drittels angreifend gedacht wird, nur hervor, dass die Momente einander gleich sind, während das andere Verfahren eine grosse Anzahl von inneren Widersprüchen enthält. Besonders fehlerhaft ist die Ausdehnung auf überhöhtes Erdreich in der Fortsetzung des Gedankens des Herrn von Gerlach im Anhange zur mechanischen Weisheit, Böhm's Mag. Bd. VII.

**) Couplet, De la poussée des terres contre leurs revestements et la force qu'on leur doit opposer. Histoire de l'académie royale des sciences. Années MDCCXXVI, MDCCXXVII, MDCCXXVIII Paris.

zwei Componenten zu zerlegen ist, von denen die eine, der Erddruck, zur Mauer senkrecht steht, während die andere, die Reaction der beiden Bestandteile des Erdreichs, eine von der Böschung abhängige Richtung hat, welche aber nicht auf der Böschungsebene senkrecht steht. Da Couplet sich das Prisma im Schwerpunkt vereinigt denkt, so greift nach ihm der Erddruck in $\frac{2}{3}$ der Mauerhöhe an. Man überzeugt sich übrigens leicht, dass Couplet bei consequenter Durchführung auf $\frac{1}{3}$ der Höhe geführt worden wäre.

So interessant und im Grunde auch der Natur der Sache angemessen der Versuch Couplet's ist, blieb er für die Entwicklung der Erddrucktheorie ohne Folgen, wohl hauptsächlich deswegen, weil bei Berücksichtigung der natürlichen Verhältnisse, als da sind: unregelmässige Gestalt der einzelnen Sandkörner, Verschiedenheit ihrer Grösse und Unregelmässigkeit der Schichtung, eine mathematische Verfolgung des Problems ziemlich aussichtslos erscheint. Ein Resultat der Couplet'schen Theorie ist aber für die Folge von wesentlicher Bedeutung geblieben; es ist das die Erkenntnis, dass der Druck an der Trennungsfläche nicht auf letzterer senkrecht steht, dass sich an der Trennungsfläche auch tangentiale widerstehende Kräfte geltend machen.

§ 4. Mit Berücksichtigung dieser widerstehenden Kräfte, welche man bald als Folge der Cohäsion und Reibung anzusehen lernt, ist dann zunächst in recht willkürlicher Weise eine Bestimmung des Erddrucks versucht. Bélidor*) und nach ihm Papacino d'Antonj**), Trincano***) und andere†) bestimmen den Erddruck nach der im § 2 geschilderten Weise und nehmen dann in Rücksicht auf die Reibung nur einen gewissen Bruchteil desselben. In derselben Weise berücksichtigt die Reibung N. Fuss††), welcher aber das Gewicht des Prismas in zwei

---

*) Bélidor, La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile, Paris 1729. 4⁰.

**) Papacino d'Antonj, Dell' architettura militare per le regie scuole teoriche d'artiglieria et fortificazione, Torino 1778. 8⁰.

***) Trincano, Elémens de fortification et de l'attaque et de la défense des places, Paris 1786. 8⁰. Bd. I p. 305 u. ff.

†) Ueber die Futtermauern der Festungswerke. Archiv für die Off. der Königl. Preuss. Artill.- u. Ing.-Corps, Jahrgang VII Bd. 13 p. 225 u. ff. Berlin, Posen, Bromberg 1841.

††) N. Fuss, Examen théorétique des revêtements à dos incliné et des revêtements à assises inclinées, proposés par quelques auteurs de fortification. Nov. act. Ac. scient. imp. Pertropolitanae T. XIII (1795 u. 1796) p. 80 bis 100, Petrop. MDCCCXXVII. 4⁰.

Componenten senkrecht und parallel der Gleitfläche zerlegt. Jedoch lässt sich hier das Verfahren auf etwas rationellere Weise rechtfertigen, wenn man auf die an der Gleitfläche stattfindende Reibung die Gesetze anwenden will, welche für die Reibung fester Körper gelten. Bei einem bestimmten Böschungswinkel α (45^0, wie von den älteren Autoren meist für alle Erdarten angenommen wird) stehen die beiden Componenten parallel und normal zur Böschungsebene in einem bestimmten Verhältnis; wird nun die durch den Druck auf die Böschungsebene hervorgerufene Reibung gleich einem bestimmten Bruchteil desselben gesetzt, so wird sie auch ein Bruchteil der Parallelcomponente sein. Man wird also von letzterer einen bestimmten Bruchteil zu subtrahiren haben, um zum Erddruck zu gelangen. Der Angriffspunkt kommt bei dieser Auffassung in dem oberen Endpunkt des unteren Drittels zu liegen. Dass diese Theorie auch sonst Vertreter hat, geht aus Mayniel's*) Bericht hervor, welcher auf Seite 61 seines Werkes über eine derartige von einem Anonymus herrührende Theorie im „dépôt des fortifications“ berichtet. Auch Gauthey**) ist ein Vertreter dieser Anschauung.

Bei der im Grunde rationelleren Auffassung, dass der Druck der Erde nicht gerade die Richtung der Böschungsebene habe, sondern eine durch die Reibung des Erdreichs an dem Mauerwerk bedingte Richtung besitzt, lässt sich natürlich die Reibung an der Trennungsebene auch in rationellerer Weise berücksichtigen, als bei den oben geschilderten Theorien. Das Prisma des Erdreichs wird durch zwei Kräfte gegen die Böschungsebene gedrückt, nämlich durch das Eigengewicht und durch den wenigstens der Richtung nach bekannt vorausgesetzten Widerstand der Mauer gegen den Erddruck. Beide liefern eine zur Böschungsebene normal gerichtete und eine parallel gerichtete Componente. Eine Gleichung zur Bestimmung des Erddrucks erhielte man dann aus der Bedingung, dass die durch die Summe der Normalcomponenten hervorgerufene Reibung hinreichen muss, dem Ueberschuss der abwärts gerichteten Parallelcomponente des Eigengewichtes über die aufwärts gerichtete Componente des Widerstandes das Gleichgewicht zu halten.

§ 5. Die am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen wiedergegebene Ueberlegung ist zuerst von Coulomb***) auf die Theorie des Erd-

---

*) Mayniel l. c. p. 61.

**) Gauthey, Mémoire sur l'épaisseur que l'on doit donner aux murs de soutènement. Nouv. Mém. de Dijon 1784, II p. 28 et 1785, I p. 1. Dijon. 8⁰.

***) Coulomb, Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mém. de mathé-

drucks angewendet worden. Sie stellt nur einen verhältnismässig kleinen Teil der Verdienste dar, welche sich der genannte Forscher um die Erddruckstheorie erworben hat.

Zunächst hat Coulomb als der erste die wahre Natur des Problems der Erddruckbestimmung als eine Bestimmung von zwei Grenzwerten erkannt, zwischen denen der wirkliche von der besonderen Beschaffenheit, namentlich der Bewegungsfähigkeit der Mauer und den sonstigen auf die Wand wirkenden Kräften abhängige Druck der Erde selbst liegt. Ist die Resultante der Kräfte, welche die Mauer gegen den Erddruck im Gleichgewicht halten sollen, zu schwach, so wird an einer gewissen Fläche im Innern des Erdreichs die Reibung und Cohäsion erschöpft, es tritt ein Bruch ein, die Mauer giebt nach. Ist hingegen die erwähnte Resultante zu stark, so wird die Mauer in das Innere getrieben. Auch hier wird längs einer gewissen Fläche die Reibung überwunden, und es tritt ebenfalls ein Bruch ein.

So lange man nur den einen Fall ins Auge fasste, dass die Mauer in Gefahr sei, durch die Sandmasse verdrängt zu werden, lag es nahe, die durch den Fuss der Mauer gehende Böschungsebene als Trennungs- oder Gleitfläche zu betrachten. Zog man aber auch den entgegengesetzten Grenzfall in Betracht, so musste schon die Ueberlegung, dass in beiden Fällen nicht an denselben Stellen die Trennung eintreten werde, zu einer Kritik dieser Annahme führen. So steht es denn im unmittelbaren Zusammenhang mit der Fragestellung Coulomb's, dass er die Trennungsfläche nicht von vorn herein willkürlich annahm, sondern ihre Bestimmung zum Hauptziel seiner Deduction machte. Nur eine Annahme behält Coulomb im Interesse der Einfachheit bei, nämlich die, dass die Gleitfläche eine durch die hintere Kante des Mauerfusses gelegte Ebene sei.

Coulomb bestimmt zunächst die horizontalen Kräfte A und A′, von denen die eine gerade noch hinreicht, einen Körper am Abgleiten auf einer rauhen schiefen Ebene zu hindern, während die andere gerade so gross ist, als sie noch sein darf, ohne den Körper die schiefe Ebene hinauf zu schieben. Der Körper (Fig. 1) sei ein dreiseitiges Prisma von der Länge eins, mit der einen Seite ruhe dasselbe auf der schiefen Ebene, die eine der beiden anderen Seiten sei horizontal (Breite x), die dritte Seite

matique et de physique présentés à l'Acad. Royale des sciences par divers savants. T. VII Année 1773. Paris 1776. 4°. Auch abgedruckt in Coulomb's „Théorie des machines simples“. Paris 1821. 4°. p. 318 u. ff. Deutsch in Böhm's Mag. Bd. V. 1779.

vertical (Höhe gleich a). Das Gewicht $\varphi = \frac{g}{2} ax$ hat dann parallel und normal zu der Seite, auf welcher das Prisma ruht, die Componenten

$$\frac{\varphi a}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Die Kraft A hat die beiden Componenten

$$-\frac{Ax}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{Aa}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Demnach übt das Prisma auf seine Unterlage eine Kraft aus, deren Normalcomponente gleich

$$\frac{\varphi x + Aa}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ist, während die abwärts gerichtete Tangentialcomponente gleich

$$\frac{\varphi a - Ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ist. Im Falle des Gleichgewichts, wie wir ihn zu betrachten haben, wird dieser nun gerade durch die Reibung und durch die Adhäsion, welche an der schiefen Ebene stattfindet, das Gleichgewicht gehalten. Die Adhäsion ist proportional der Länge der schiefen Ebene und gleich $\delta\sqrt{a^2+x^2}$, die Reibung ist ein Bruchteil $\frac{1}{n}$ des Normaldrucks. Demnach haben wir für A die Gleichung

$$\frac{\varphi a - Ax}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{n}\,\frac{\varphi x + Aa}{\sqrt{a^2+x^2}} + \delta\sqrt{a^2+x^2}$$

und hieraus

$$A = \varphi\,\frac{a - \frac{x}{n}}{x + \frac{a}{n}} - \delta\,\frac{a^2+x^2}{x + \frac{a}{n}} = \frac{g}{2}\,a\,\frac{x\left(a - \frac{x}{n}\right)}{x + \frac{a}{n}} - \delta\,\frac{a^2+x^2}{x + \frac{a}{n}}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für die obere Grenze A':

$$A' = \varphi\,\frac{a + \frac{x}{n}}{x - \frac{a}{n}} + \delta\,\frac{a^2+x^2}{x - \frac{a}{n}} = \frac{g}{2}\,a\,\frac{x\left(a + \frac{x}{n}\right)}{x - \frac{a}{n}} + \delta\,\frac{a^2+x^2}{x - \frac{a}{n}}.$$

Durch diese beiden Ausdrücke sind nun aber auch zwei Grenzen für die Kraft E gefunden, welche eine Mauer von der Höhe a und Erdreich vom specifischen Gewicht g auf einander ausüben können. Ist E

so beschaffen, dass es innerhalb der beiden Grenzen für jeden beliebigen Wert x liegt, so herrscht offenbar Gleichgewicht, weil ja dann an keiner der geneigten Ebenen die Reibung und Cohäsion völlig erschöpft wird. Wenn es aber solche Werte x giebt, für welche E nicht mehr in den zugehörigen Grenzen liegt, so ist Gleichgewicht nicht mehr möglich. Demnach erhalten wir die untere Grenze für E, indem wir A zu einem Maximum machen, und die obere Grenze, indem wir x so wählen, dass A' ein Minimum wird.

Für die untere Grenze, welche Coulomb als die wichtigere allein in Frage zieht, ergiebt sich

$$x = a\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}\right).$$

Mit diesem Ausdruck, welcher von δ unabhängig ist, erhält Coulomb den zugehörigen Wert

$$A = ma^2 - \delta la,$$

in welchem m und l lediglich Functionen von $\frac{1}{n}$ sind, die Coulomb selbst nicht genauer bestimmt.

§ 6. Das soeben im Anschluss an Coulomb entwickelte Princip für die Bestimmung des Erddrucks hat in der Folge den Namen des Princips vom Prisma des grössten Druckes erhalten. Dieser Name erscheint namentlich darum nicht glücklich gewählt, weil er leicht zu der unrichtigen Vorstellung Anlass geben kann und in der Folge auch wirklich Anlass gegeben hat, als ob die einzelnen Prismen, welche man durch verschiedene Ebenen von dem Erdkörper trennen kann, besondere von einander verschiedene Drucke auf die Mauer ausübten, von denen dann einer der grösste ist. Das ist natürlich unrichtig; denn für jedes Prisma ist offenbar der Druck gleich dem Widerstand der Mauer, und dieser muss ja naturgemäss von der Wahl des Prismas unabhängig sein. Wohl aber ändert sich der Widerstand, den die einzelnen Prismen erfordern, wenn sie nicht abgleiten sollen, und dieser erforderliche Widerstand ist es eben, dessen Maximum die untere Grenze für die zwischen Mauer und Erdreich wirkende Kraft oder kürzer den unteren Grenzwert des Erddrucks liefert.

Zwar spricht auch Coulomb schon von einem Prisma des grössten Druckes. Aus dem ganzen Zusammenhang geht aber unzweifelhaft hervor, dass er sich dieses Ausdrucks nur im Interesse der Kürze und um weitschweifige Wiederholungen zu vermeiden bedient. Nicht einmal, sondern an verschiedenen Stellen spricht er deutlich aus, was gemeint ist: ein

Prisma, welches den grössten Widerstand erfordert, wenn es am Abgleiten gehindert werden soll.

Wenn Winkler*) und Rebhann**) trotzdem einem Coulomb die oben gerügte ungereimte Ansicht vorwerfen, so ist das ein weiterer Beleg für die durch andere Umstände leicht zu beweisende Thatsache, dass sie beide die fundamentale Abhandlung Coulomb's nicht gekannt haben. Wie hätte wohl sonst Rebhann seine Deduction, die im Grunde mit derjenigen Coulomb's übereinstimmt, als neu bezeichnen können? Wenn aber noch ein Zweifel über die Richtigkeit unserer Behauptung bestehen könnte, so wird derselbe hinfällig durch den Hinweis auf folgende Worte in Rebhann's Buch [§ 14 p. 45 Z. 11 v. u.]: „Im Jahre 1773 hatte er (nämlich Coulomb) seine Untersuchungen hierüber unter dem Titel „Mémoires des savans étrangers“ der Académie des sciences vorgelegt“. Dass auch Winkler nicht das Original benutzt haben kann, folgt zunächst daraus, dass er die Schlüsse Rebhann's als richtig anerkennt, während er diejenigen Coulomb's als nicht vollständig klar bezeichnet. Bei Winkler lässt sich nun aber noch aus einigen Aeusserungen auf die Quelle schliessen, aus welcher er geschöpft hat. Er sagt auf S. 64 Z. 10 v. o.: „Setzt man den Reibungscoefficienten $= f$ $\left(\text{Coulomb setzt ihn } = \frac{1}{f}\right)$“, und auf S. 65 Z. 1 v. o.: „Der entsprechende Druck ergiebt sich zu $P = A \cdot h^2 - Bch$, wenn man zur Abkürzung

$$A = \tfrac{1}{2}\gamma(-f + \sqrt{1+f^2})^2, \quad B = 2(-f + \sqrt{1+f^2})$$

setzt (Coulomb's Ausdrücke sind indes complicirter).“ In Wahrheit nennt Coulomb den Reibungscoefficienten $\frac{1}{n}$, und die Grössen A und B berechnet er überhaupt nicht näher.

Beides trifft auf das Original also nicht zu, wohl aber auf einen Bericht, welchen Martony von Köszegh***) unter dem Namen eines „Auszuges“ über Coulomb's Theorie giebt. Bezüglich dieses Berichtes sind dann auch die Einwände von Winkler und Rebhann berechtigt.

*) E. Winkler, Neue Theorie des Erddrucks nebst einer Geschichte der Theorie des Erddrucks und der hierüber angestellten Versuche. Wien 1872. R. v. Waldheim. 8⁰.

**) G. Rebhann, Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. Wien 1871. C. Gerold's Sohn. 8⁰.

***) C. Martony de Köszegh, Versuche über den Seitendruck der Erde, verbunden mit einer theoretischen Abhandlung über diesen Gegenstand nach Coulomb und Français, nebst einer Nachweisung älterer Versuche dieser Art. Wien 1828. 4⁰.

§ 7. Ueber zwanzig Jahre hat es gedauert, bis die Principien Coulomb's diejenige Anerkennung fanden, welche sie ihrer Bedeutung nach verdienten. Trotz der hervorragenden Stelle, an welcher sie veröffentlicht wurden, scheinen sie zunächst nur wenig bekannt geworden zu sein. So erwähnt z. B. der Referent der Jury zur Beurteilung der Lösungen einer von der Petersburger Akademie für Ende 1793 gestellten Preisaufgabe über den in Frage stehenden Gegenstand, N. Fuss, weder in seinem Bericht noch in der schon citirten Abhandlung von 1796 die Abhandlung Coulomb's.

In Deutschland scheinen Ideen, welche mit denjenigen Coulomb's verwandt sind, noch am ehesten Anklang gefunden zu haben. Z. B. giebt ein Hauptmann von Zach in einem Anhange zur zweiten Auflage*) der Abhandlung des Grafen von Kinsky Entwickelungen, welche starke Anklänge an die Untersuchung Coulomb's enthalten. Er berichtet, dass Graf von Kinsky schon vor 1776, dem Jahre, in welchem die erste Auflage der genannten Abhandlung erschien, im Besitze desselben gewesen sei, und wohl nur aus praktischen Gründen den von ihm betretenen Weg dem eben bezeichneten, mathematisch eleganteren vorgezogen habe. Freilich sind die grundlegenden Gedanken nicht frei von Unklarheiten, und die mathematische Entwickelung mit einigen Irrtümern behaftet, so dass das Resultat für die Bestimmung des Erddrucks nicht von wesentlicher Bedeutung ist.

Glücklicher ist der in Fachkreisen bekannte Architekt und Hydrauliker R. Woltmann**), dessen Methode der Erddruckbestimmung, abgesehen davon, dass die Cohäsion nicht berücksichtigt wird, mit derjenigen Coulomb's übereinstimmt und die letztere sogar an äusserer Eleganz übertrifft, indem Woltmann an Stelle des Reibungscoefficienten den Reibungswinkel von Sand auf Sand einführt. Die Begründung allerdings bleibt an Klarheit und überzeugender Kraft weit hinter der des französischen Gelehrten zurück. Was das Schlimmste ist, Woltmann ist von der Richtigkeit seiner ersten Theorie so wenig überzeugt, dass er ihr eine zweite folgen lässt. So hat er zwei verschiedene Methoden der Erddruckbestimmung, zwischen denen er sich auf theoretischem Wege nicht zu entscheiden vermag.

---

*) F. J. Graf Kinsky, Abhandlung vom Druck der Erde auf Futtermauern nebst einem Anhange vom Abrollen der Erde von v. Zach. Wien 1788. 8°.

**) Woltmann, Beyträge zur hydraulischen Architektur. Bd. III, Göttingen 1794 nnd Bd. IV, 1799. 8°.

Wie oben geschildert wurde, sind es im wesentlichen zwei Grundanschauungen, von denen die Bearbeiter der Erddrucktheorie bei ihren Entwickelungen ausgehen. Die einen betrachten das Prisma, welches im Grenzfall in Gefahr steht abzustürzen, als einen Körper, der auf einer schiefen Ebene ruht und durch eine der letzteren parallele Kraft gestützt wird, die anderen betrachten dieses Prisma als einen zwischen der Mauer und der Gleitfläche ruhenden Keil. Coulomb brachte die auf der letzteren Anschauung beruhende Theorie, welche er nach unserer Meinung mit gutem Grund als die allein berechtigte ansah, zu einem gewissen Abschluss. Woltmann, wohl hauptsächlich unter dem Einfluss Kästner's, der sich ja seiner Zeit eines bedeutenden Ansehens erfreute, hielt die erste Anschauung für gleichberechtigt mit der zweiten. So machte er denn den Versuch, auch auf die erste Anschauung das Verfahren anzuwenden, welches ihn bei der zweiten zum Ziel geführt hatte.

Das Gewicht des Prismas wird in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine zu der vorläufig unbekannten Gleitfläche parallel, die andere senkrecht zu ihr ist. Die durch die letztere hervorgerufene Reibung wird von der ersteren subtrahirt, und dann die übrig bleibende Kraft in eine verticale und eine horizontale Componente zerlegt. Die unbekannte Neigung der Gleitfläche wird dann mit einfacher Uebertragung des bei der anderen Theorie befolgten Verfahrens durch die Forderung bestimmt, dass die horizontale Componente ein Maximum wird. Das Maximum selbst soll dann der gesuchte Seitendruck der Erde sein.

Wenn sich nun auch Woltmann, um die Forderung des Maximums zu rechtfertigen, auf die bei der ersten Theorie vorgebrachten Gründe beruft, so erscheint dennoch die Uebertragung der genannten Forderung rein willkürlich und äusserlich. Bei der Grundanschauung, von welcher die Coulomb'sche und die erste Woltmann'sche Theorie ausgehen, wird die Richtung des Widerstandes von vorn herein festgelegt, man hat nicht nötig, dieselbe zu ändern, indem man für alle Ebenen die Möglichkeit erörtert, dass an ihnen die widerstehenden Kräfte zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes völlig aufgebraucht werden. In Folge dessen führt diese Erörterung hier zu Bedingungen, welche mit einander vereinbar sind. Dagegen gehört bei der anderen Grundanschauung zu jeder Gleitfläche eine besondere ihr parallele Richtung des Druckes. Das Einzige, was man also bei dieser Auffassung durch die Coulomb'sche Schlussweise erreichen könnte, wäre der Schluss, dass, wenn die Gleitfläche und mit ihr der Widerstand der Mauer eine gewisse Richtung habe, die Grösse des Widerstandes eine gewisse von der Richtung ab-

hängige untere Grenze überschreiten müsse. Warum nun gerade diejenige Fläche die richtige Gleitfläche sein soll, bei welcher die Horizontalcomponente ein Maximum ist, das ist schwer einzusehen. Selbst wenn man seine Zuflucht zu dem teleologischen Argument nähme, vermittelst dessen ein holländischer Ingenieur C. L. Brünings*) die Begründung der Coulomb'schen Theorie zu verbessern geglaubt hat, würde man vielleicht zu der Ueberzeugung gelangen, dass irgend etwas ein Maximum wird, schwerlich aber dazu, dass dieses etwas gerade die Horizontalcomponente sein müsse.

Das Einzige, was sich vielleicht zu Gunsten dieser später von Hagen**) und ganz neuerdings von Skibinski***) wieder aufgenommenen Theorie vorbringen liesse, ist praktischer Natur. Stellt man sich auf den Boden der in Frage kommenden Grundanschauung, so kann man, um die soeben beschriebene Bestimmung des Erddrucks wenigstens für praktische Zwecke zu rechtfertigen, etwa folgendermassen schliessen. Wenn eine Mauer gegen eine Verschiebung gesichert sein soll, so muss sie mindestens einen horizontalen Druck aushalten können, der sich berechnen lässt, sobald die Gleitfläche bekannt ist. Ist das nicht der Fall, so muss man natürlich die ungünstigste Annahme machen, d. h. man muss sie so wählen, dass die Horizontalcomponente ein Maximum wird. Dass aber durch eine solche Ueberlegung nichts über die wirkliche Lage der Gleitfläche ausgemacht wird, liegt auf der Hand. Dazu kommt noch eins: es ist nicht allein eine Verschiebung der Mauer nach vorn, sondern vielmehr eine Drehung um die vordere Kante ihres Fusses zu befürchten. Stellt man nun in Bezug auf diesen Fall eine ähnliche Ueberlegung an wie vorher, so gelangt man dazu, die Gleitfläche so zu wählen, dass das Moment des Erddrucks in Bezug auf die in Frage stehende Kante ein

---

*) Vergl. den im vierten Bande der Woltmann'schen Beyträge abgedruckten Brief von C. L. Brünings. Die Schrift „Verhandeling over de zydelingsche drukking der Aarde, en de hiernaar te regelen afmetingen der muuren“ aus dem Jahre 1803 war mir leider nicht zugänglich.

**) Untersuchung über den Druck und die Reibung des Sandes. Annalen der Physik und Chemie von Poggendorff, Bd. XXVIII, 1833 p. 17—48, 297—323.

Handbuch der Wasserbaukunst, Teil II Bd. I, 1853.

Ueber den Seitendruck der Erde. Abh. der Berl. Akademie, 1871.

***) Skibinski, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Versuche. Zeitschrift des oesterreichischen Ing.- und Architekten-Vereins XXXVII, p. 65, 1885; vergl. die Kritik von Brik in der Wochenschrift desselben Vereins, Bd. XI.

Maximum wird. Welches die Mängel einer auf dieser Forderung aufgebauten Erddrucktheorie, wie sie von J. Curie*) ausgebildet ist, sein würden, liegt nach dem Vorhergehenden auf der Hand und braucht daher hier nicht besonders ausgeführt zu werden.

§ 8. Wie nicht anders zu erwarten, wurde die Coulomb'sche Theorie, nachdem sie erst allgemeiner bekannt geworden war, auch die herrschende. Von Beginn unseres Jahrhunderts ab besteht demgemäss die Entwickelung der Erddrucktheorie zunächst in einer Anwendung der von Coulomb für den einfachsten Fall ebenen, horizontalen Geländes und glatter, verticaler Hinterseite der Mauer abgeleiteten Principien auf die verwickelteren Fälle der technischen Praxis.

Schon Coulomb hatte seine Theorie auf den Fall eines durch eine Einzellast beschwerten Erdreichs ausgedehnt. Ausserdem hat er den Einfluss einer zwischen dem Mauerwerk und dem Erdreich stattfindenden Reibung in Rechnung gebracht. Die Methode bleibt im wesentlichen dieselbe. Der einzige Einwand, welcher sich unserer Meinung nach gegen die vorgenommene Berücksichtigung der auf dem Erdreich ruhenden Einzellast geltend machen liesse, wäre wohl der, dass die Voraussetzung ebener Gleitflächen hier weniger gerechtfertigt erscheint als beim unbelasteten Erdreich.

Dem Einfluss der an der Wand stattfindenden Reibung trägt Coulomb durch die Annahme Rechnung, dass der Erddruck nicht mehr senkrecht zur Wand steht, sondern eine nach unten gerichtete tangentiale Componente besitzt, welche ein bestimmter Bruchteil der Normalcomponente ist. Das Verfahren ist dasselbe wie früher. Es wird zunächst unter Voraussetzung des angegebenen Verhältnisses der beiden Componenten der Widerstand berechnet, welcher erforderlich ist, um ein Gleiten auf einer beliebig angenommenen Fläche zu verhindern. Dann wird die Gleitfläche so bestimmt, dass die horizontal gerichtete Normalcomponente ein Maximum wird. Da die tangentiale Componente in einem von vorn herein angenommenen Verhältnis zur letzteren steht, so wird damit auch der ganze Widerstand zu einem Maximum.

---

*) J. Curie, Nouvelle théorie de la poussée des terres et de la stabilité des revêtements. Paris, Gauthier-Villars. 1870. 8⁰.
— —, Sur la théorie de la poussée des terres. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, LXXII, 1871, p. 366—369.

de Saint-Venant, Examen d'un essai de théorie de la poussée des terres contre les murs destinés à les soutenir. C. R. LXXVII, 233—241.

J. Curie, Sur la poussée des terres. C. R. LXXVII 1873, 778—781.

Der nächste Schritt in der Entwickelung der Erddrucktheorie besteht darin, dass die Hinterfläche der Mauer geneigt angenommen wird. Prony*) und Eytelwein**) unternahmen zuerst eine Behandlung dieses Falles. Ihre Untersuchungen leiden jedoch an mehreren Mängeln, von denen der schwerwiegendste wohl der ist, dass, wie bei glatten, verticalen Mauern, der Erddruck horizontal angenommen wird. Wollten die genannten Autoren von der Reibung absehen, so musste offenbar die Richtung des Druckes senkrecht zur Ebene der Hinterfläche angenommen werden, während die Berücksichtigung der Reibung zu einer Neigung des Druckes gegen die Normale führt, die unabhängig von der Neigung der Hinterfläche zur Verticalen ist. Mayniel***) hat später den Fall, dass die Reibung nicht zu berücksichtigen ist, in einwandfreier Weise behandelt. Bei Berücksichtigung der Reibung begeht er jedoch einen Fehler, indem er das von Coulomb bei verticaler Wand eingeschlagene Verfahren ohne die erforderliche Modification auf den neuen Fall überträgt.

Die Formeln Mayniel's sind auch für den von ihm richtig behandelten Fall äusserst verwickelt und schwerfällig. Français†) hat ihnen eine bei weitem geschmeidigere Gestalt gegeben, indem er, wie es schon vor ihm Woltmann und de Prony gethan haben, an Stelle des Reibungscoefficienten von Sand auf Sand den Reibungswinkel oder vielmehr dessen Complement einführte, und als Bestimmungsstück der Gleitfläche ihren Winkel zur Hinterfläche benutzte. So gelangt er dann zu dem bemerkenswerten von Prony schon für verticale Wände abgeleiteten Resultate, dass die Gleitfläche den Winkel zwischen der Hinterfläche der Mauer und derjenigen Ebene halbirt, welche mit dem Horizont den Reibungswinkel und also mit der Verticalen dessen Complement einschliesst. Nennt man diesen für die Erdart charakteristischen Winkel a, das Gewicht der Raumeinheit p, und c die Cohäsionsconstante, so ergiebt sich für die Grösse des Drucks gegen eine geneigte Wand von der Höhe h der Werth

---

*) de Prony, Recherches sur la poussée des terres 1802.

**) Gilly und Eytelwein, Praktische Anweisung zur Wasserbaukunst III, Berlin 1805. 4⁰. p. 101—130.

***) Mayniel, l. c. § 29—37, p. 112—120.

†) Français, Recherches sur la poussée des terres sur la forme et les dimensions des revêtements et sur le talus d'excavation. Mémorial de l'officier du génie, Bd. IV, p. 157—206. Paris 1820. 8⁰. Eine deutsche Uebersetzung findet sich in dem schon citirten Werke von Martony de Köszegh, p. 12—41.

$$P = \tfrac{1}{2} p h^2 \frac{\sin^2 \frac{a+\varepsilon}{2}}{\cos\varepsilon \cos^2 \frac{a-\varepsilon}{2}} - ch \frac{\sin a}{\cos^2 \frac{a-\varepsilon}{2}},$$

wo ε den Winkel bezeichnet, welchen die Wand mit der Verticalebene einschliesst, und zwar soll dieser Winkel positiv sein, wenn die Verticale durch den Fuss der Mauer im Innern des Erdreichs liegt. Dieser Ausdruck vereinfacht sich noch mehr, wenn man an Stelle von c die Grösse

$$h'' = \frac{2c}{p} \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin^2 \frac{a+\varepsilon}{2}}$$

einführt. Dann wird

$$P = \tfrac{1}{2} p h (h - h'') \left[\frac{\sin \frac{a+\varepsilon}{2}}{\cos\varepsilon \cos \frac{a-\varepsilon}{2}} \right]^2 \cos\varepsilon.$$

So lange $h < h''$ ist, wird P negativ; d. h. die Mauer braucht dem Erdreich keinen Widerstand entgegenzusetzen, um dasselbe am Abgleiten zu hindern; man könnte sogar noch eine gewisse Zugkraft ausüben, ehe das Erdreich in Bewegung gerät. Deshalb wird das Erdreich auch ohne Stützmauer in Ruhe bleiben, so lange nur $h < h''$ ist. Die Grösse h'' ist also diejenige Höhe, bis zu welcher Erde unter dem Winkel ε abgestochen werden kann, ohne dass sie abstürzt. Für verticalen Abstich, d. h. für $\varepsilon = 0$, wird sie gleich

$$h' = \frac{4c}{p} \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

Diese Gleichung kann dazu dienen, die Cohäsion einer gewissen Erdart zu bestimmen, und ist auch wirklich dazu verwendet worden. Ein anderer ausgezeichneter Wert von ε ist $-a$; für diesen wird h'' unendlich gross, und demnach ist der Winkel a nichts anderes als der Winkel zwischen der Verticalebene und der natürlichen Böschung.

Français betrachtet schon den Fall, wo die Mauerkrone nicht in der Höhe des Geländes liegt, welches bei Brustwehren u. s. w. von Wichtigkeit ist; jedoch ist dieser Versuch nicht frei von Willkürlichkeiten, so wird z. B. die Gleitfläche so angenommen, wie sie sich unter der Voraussetzung ebenen Geländes bei der betreffenden Richtung der Hinterfläche der Wand ergeben hatte. Rationeller hat später Audoy*) einen

*) Audoy, Note additionnel au mémoire de M. Michaux sur la con-

derartigen Fall untersucht; das Erdreich steigt bei ihm zunächst hinter der als glatt und vertical vorausgesetzten Mauer unter einem Winkel Θ zur Verticalen an und ist dann oben durch eine horizontale Ebene begrenzt. Ganz richtig wird hier zunächst für eine beliebige Ebene der erforderliche Widerstand berechnet und dann diejenige Fläche bestimmt, welche diesen Widerstand zu einem Maximum macht.

Nach anderer Richtung hat Navier*) die Erddrucktheorie erweitert, indem er eine gleichmässige Ueberlastung des Erdreichs in Betracht zog, welche allerdings die Aufgabe in dem allein erörterten Falle einer horizontalen Geländefläche nicht sonderlich erschwert. Man hat jedoch nur nötig, einen Blick auf die Formeln zu werfen, vermittelst deren Audoy seine doch noch verhältnismässig einfache Aufgabe löst, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass man auf dem bisher betretenen Pfade entweder gar nicht oder doch nur mit grossen Schwierigkeiten zu einer für die complicirteren Fälle brauchbaren Lösung gelangen würde.

§ 9. Dem geometrischen Sinne Poncelet's**) war es vorbehalten, einen Weg zu entdecken, der auch dann zum Ziele führte, wenn die bisher allein verwendeten Mittel der Rechnung versagten. Indem Poncelet neben der Analysis die für die Mechanik bis dahin viel zu wenig verwertete Geometrie zur Begründung eines Verfahrens heranzog, welches nicht allein die Mittel der Rechnung, sondern auch das dem Ingenieur so geläufige Hülfsmittel der Zeichnung in Anwendung brachte, förderte er nicht allein die Aufgabe der Erddruckbestimmung, sondern wurde zugleich der geistige Urheber einer Disciplin, welche für die Entwickelung der Statik, namentlich nach ihrer praktischen Seite hin, von der weittragendsten Bedeutung gewesen ist. Sagt doch Culmann***) in der Vorrede zu seiner „Graphischen Statik", dass er an den hier in Frage stehenden Untersuchungen Poncelet's den Wert und Vorzug graphischer Methoden schätzen gelernt habe. Diese doppelte Bedeutung der Poncelet'schen

---

struction des revêtements. Mémorial de l'officier du génie XI, 1832, p. 349 bis 374.

*) Navier, Leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. IIième édit. Bruxelles 1839. 8⁰.

**) Poncelet, Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations. Note additionnelle sur les relations analytiques qui lient entre elles la poussée et la butée de la terre. Mémorial de l'officier du génie XIII, 1840, p. 7—261, 262—270. Deutsch von Lohmeyer: Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, Braunschweig 1844. 8⁰.

***) Culmann, Die graphische Statik. Zürich 1866.

Erddruckbestimmung wird es rechtfertigen, wenn wir hier in Kürze auf dieselbe eingehen.

Bezüglich der Begrenzung des Erdreichs macht Poncelet die Voraussetzung, dass die hintere Fläche der Mauer eine Ebene sei, und dass das Gelände von mehreren Ebenen gebildet werde, welche sich in parallelen Geraden schneiden. Ein zu diesen Geraden senkrecht geführter Schnitt, welcher in der Figur 2a dargestellt ist, wird also ein Polygon BHIEF.... sein. In Bezug auf die physikalische Natur des Sandes behält Poncelet die Voraussetzungen im allgemeinen bei, nur lässt er die Cohäsion unberücksichtigt, was vom praktischen Standpunkt deswegen gerechtfertigt erscheint, weil durch ein Absehen von einer widerstehenden Kraft die Sicherheit einer Construction erhöht wird, und sich von theoretischer Seite empfiehlt, weil die Reibung allemal erst dann zur Action gelangt, wenn die Cohäsion überwunden ist. Die Reibung an der hinteren Ebene der Mauer wird berücksichtigt, und zwar wird angenommen, dass sie in jedem Grenzfalle des Gleichgewichts voll ausgenutzt werde, sodass die Neigung des Erddrucks zur Normale gleich dem Reibungswinkel wird. Die Construction Poncelet's bleibt jedoch auch dann noch anwendbar, wenn der Erddruck mit der Wandnormale irgend einen von einem Rechten verschiedenen Winkel φ_1 bilden sollte.

Um nun den Widerstand zu finden, welcher ein Abgleiten längs irgend einer Ebene BX zu hindern vermag, zerlegt Poncelet das Gewicht des Prismas BHIEX, welches durch die verticale Linie $\alpha\beta$ (Fig. 2b) dargestellt werden möge, in zwei Componenten, von denen die eine $(\alpha\delta)$ die Richtung des Erddrucks hat, während die andere $(\alpha\gamma)$ mit der Normale zu BX den Böschungswinkel φ einschliesst. Der Winkel $(\alpha\beta\gamma)$ ist also gleich dem Winkel zwischen der Ebene XB und der natürlichen Böschung, welche die Polygonseite von X im Punkte M schneiden möge. Denkt man sich nun das Dreieck $\alpha\gamma\beta$ um einen Winkel von $90^0 - \varphi$ gedreht, sodass $\beta\alpha \mathrel{\#} BM$ wird, so wird $\gamma\alpha \mathrel{\#} BX$ und $(\gamma\beta)$ bildet mit der Wand einen Winkel von der Grösse $\varphi + \varphi_1$. Ziehen wir also durch B unter dem Winkel $\varphi + \varphi_1$ zur Wand eine Linie, welche EX in O schneidet, und durch X eine Parallele zur natürlichen Böschung BM, bis sie OB in x trifft, so ist das Dreieck xBX ähnlich dem Dreieck $\beta\gamma\alpha$.

Demnach verhält sich der erforderliche Widerstand zum Gewicht des Druckprismas wie Bx zu Xx. Das Gewicht ist proportional der Fläche BHIEX; verwandeln wir dieselbe nach bekannten Regeln in ein Dreieck mit der Basis BX und einer auf ME liegenden Spitze K, so kann das Gewicht gleich

$$\frac{p}{2} KX . h.$$

gesetzt werden, wo h das Lot vom Punkte B auf KX bezeichnet. Demnach wird der Erddruck

$$E = \frac{p}{2} \frac{Bx}{Xx} KX . h.$$

Ziehen wir von K aus die Parallelen zu BM und BX, welche OB in K_1 und y schneiden mögen, so ist:

$$KX = By \frac{OX}{OB}$$

und

$$xX = \frac{OX . BM}{OM}.$$

Wir erhalten also

$$E = \frac{p}{2} Bx . By \frac{OM . h}{OB . BM} = \frac{p}{2} Bx . By \sin OBM.$$

Die Lage der Punkte x und y ist aber offenbar abhängig von einander; es ist

$$\frac{Ox}{oB} \cdot \frac{Oy}{oB} = \frac{OX}{OM} \cdot \frac{OK}{OX} = \frac{OK}{OM},$$

d. h. weil K ein fester Punkt auf EM ist, das Product Ox Oy ist constant. Den Wert desselben erhalten wir, indem wir X mit K zusammenfallen lassen; dann fällt x in K_1 und y in B, es wird also offenbar:

$$Ox . Oy = OK_1 . OB.$$

Bei der Gleitfläche wird E und damit Bx By ein Maximum; das tritt bei gegebenem Ox Oy ein, wenn Ox + Oy ein Minimum wird. Bei der Gleitfläche müssen also die beiden Punkte x und y in einen Punkt z von BO zusammenfallen.

Daraus ergiebt sich folgende Construction der Gleitfläche. Zunächst wird der Punkt K auf OM bestimmt, für welchen die Fläche

$$BHIE = \Delta BKE$$

ist; dann wird durch K eine Parallele zur natürlichen Böschung BM gezogen, welche OB in K_1 treffen möge. Auf OB wird dann nach irgend einer der bekannten Methoden derjenige Punkt z bestimmt, für welchen

$$Oz^2 = OK_1 . OB$$

ist. Der Punkt Z, in welchem eine durch z gehende Parallele zur Böschung BM die Linie OM trifft, ist dann der obere Punkt derjenigen Linie, in welcher die Gleitfläche die Ebene der Zeichnung schneidet. Die Linien Kz und BZ werden nach dieser Construction von selbst parallel.

Will man das Ziehen überflüssiger Linien vermeiden, so kann man den Punkt Z direct construiren, indem man ihn auf OM so bestimmt, dass $OZ^2 = OK.OM$ wird.

Für den passiven Erddruck gilt selbstverständlich eine ganz ähnliche Construction, welche aufzufinden an der Hand des für den activen Erddruck gegebenen nicht schwer ist, da die Unterschiede äusserst gering sind. Wir unterlassen es daher, hier auf dieselbe näher einzugehen.

§ 10. Das einzige Bedenken, welches sich gegen die Poncelet'sche Construction vielleicht erheben liesse, wäre wohl die Frage, ob BZ auch dann noch wirklich die Gleitfläche repräsentirt, wenn Z in eine Ecke des begrenzenden Polygons fällt. Dies kleine Bedenken, welches Poncelet mit Stillschweigen übergeht, ist von Saint-Guilhem*) beseitigt worden, indem er nachwies, dass, falls bei Benutzung einer Polygonseite das Ende der Gleitlinie in eine Ecke fällt, die Benutzung der anderen Polygonseite, welche in der fraglichen Ecke endet, dieselbe Gleitlinie liefert.

Es mögen (Fig. 3) EZ und ZF zwei Seiten des begrenzenden Polygons sein. M und M' seien die Schnittpunkte dieser Seiten mit der Böschungslinie, und O, O' die Schnittpunkte mit derjenigen Linie, welche mit der Hinterseite der Mauer den Winkel $\varphi + \varphi_1$ einschliesst. Endlich seien K und K' Punkte auf EZ und FZ, welche so bestimmt sind, dass Fläche

$$BHIEZB = \Delta BKZ = \Delta BK'Z$$

ist, sodass $KK' \nparallel BZ$ sein muss.

Wenn nun die Benutzung von EZ als Gleitlinie BZ liefert, so muss $OZ^2 = OK.OM$ sein. Das ist aber dann und nur dann erfüllt, wenn eine durch K gelegte Parallele zu BZ und eine durch Z gelegte Parallele zu BM sich auf einem Punkte z von OB treffen. Dann muss die Verlängerung von Kz die Linie ZF aber offenbar in K' treffen, sodass also die durch K' gelegte Parallele zu BZ die durch Z gelegte Parallele zu BM' in dem Punkte z der Linie O'B trifft. Es ist also auch

$$O'Z^2 = O'K'.O'M',$$

oder die Benutzung von FZ liefert unter der angegebenen Voraussetzung ebenfalls den Punkt Z als Endpunkt der Gleitlinie.

Der Hauptwert dieses Zusatzes scheint uns darin zu bestehen, dass er erlaubt, die für eine gebrochene Geländelinie gewonnenen Resultate auf den Fall zu übertragen, dass die Geländefläche auch cylindrische Bestandteile enthält. Liegt der Punkt Z in einem gekrümmten Teile der Ge-

*) de Saint-Guilhem, Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge. Annales des ponts et chaussées 1858, I p. 319—350.

ländelinie, so ist natürlich an Stelle der Polygonseite die Tangente in Z zu nehmen, die Punkte O, M und K werden auf dieser Tangente genau so bestimmt wie vorher auf der Polygonseite. Die Eigenschaft, dass sich eine durch Z gelegte Parallele zur natürlichen Böschung und eine durch K gelegte Parallele zu BZ in einem Punkte z von OM schneiden müssen, bleibt auch hier gültig.

Die eben besprochene Eigenschaft der Gleitfläche, dass, wenn Zz parallel der natürlichen Böschung ist, Kz parallel der Linie BZ, kann so ausgesprochen werden, dass das Dreieck ZBz flächengleich dem Dreieck ZBK und damit auch gleich dem zwischen BZ und der hinteren Mauerlinie BH liegenden Teile des Querschnitts durch das Erdreich ist. Man hat nur nötig, durch Z eine Parallele zu BO zu ziehen, welche BM in r schneiden möge, um folgende, von Rebhann angegebene, charakteristische Eigenschaft der Gleitfläche zu erkennen:

„Zieht man durch den oberen Endpunkt Z der Gleitlinie eine Parallele zur Stellungslinie BO, welche mit der hinteren Mauerlinie den Winkel $\varphi + \varphi_1$ einschliesst, bis die natürliche Böschungslinie BM in r getroffen wird, so ist das Dreieck BZr flächengleich demjenigen Teile des durch das Erdreich gelegten Querschnitts, welcher von der Mauerlinie BH und der Gleitlinie BZ eingeschlossen wird."

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich, wie Winkler*) gezeigt, wenigstens nach einigem Probiren auch dann die Gleitfläche bestimmen, wenn das Gesetz, nach welchem die Geländelinie gebildet ist, nicht bekannt ist.

§ 11. Poncelet hatte den Einfluss etwaiger Belastungen des Erdreichs nicht in Rechnung zu ziehen vermocht; Culmann**) zeigte, dass, falls diese Belastung in dem Teile der Begrenzung, in welchem die Gleitfläche endigt, gleichmässig ist, die Bestimmung der letzteren genau ebenso ausgeführt werden kann, als wenn die Belastung gar nicht vorhanden wäre. Im Interesse einer einfacheren Darstellung denke man sich den Ueberdruck durch eine Substanz vom specifischen Gewicht des Erdreichs hervorgebracht. Dann wird man den Druck der Belastung durch einen Streifen darstellen können, welcher wenigstens in dem Teil, in welchem die Gleitfläche endigt, durch eine Parallele zur Grenze des Erdreichs bestimmt ist. Um nun den Widerstand zu finden, welcher erforderlich ist, um ein Abgleiten längs einer in der fraglichen Polygonseite EF (Fig. 4) endigenden Linie BX zu verhindern, vereinige man die zwischen BH und

*) Winkler, Vorträge über die Theorie des Erddruckes gehalten an der K. technischen Hochschule zu Berlin. Lithographirt 1880.

**) Culmann, Graphische Statik, p. 563 u. ff.

BE liegende Fläche samt der Belastungsfläche zu einem Dreieck EBA, wo der Punkt A so gewählt ist, dass er doppelt so hoch über der Polygonseite EF liegt, als die Belastungshöhe auf EF angiebt. Dann giebt uns das Dreieck EAX die über EX ruhende Belastung, sodass ABX das ganze zu tragende Gewicht angiebt. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von EX mit AB durch K, so verhalten sich die Gewichte der beiden Dreiecke AXB und KXB offenbar wie die Seiten AB und KB, d. h. sie stehen in einem von X unabhängigen Verhältnis. Wenn sich aber die zu tragenden Gewichte verhalten wie die Dreiecke BKX, dann kann natürlich die Gleitfläche ebenso bestimmt werden, wie in dem Falle, wo keine Belastung vorhanden ist.

Culmann hat in der graphischen Behandlung der Erddrucktheorie noch darin einen weiteren Fortschritt gemacht, dass er die Cohäsion zu berücksichtigen suchte. Zieht man von einem Punkte X auf EF eine Parallele zur Ausgleichslinie BKA, welche die Böschung BM in Y schneidet, und durch Y eine Parallele zur Stellungslinie bis zum Schnittpunkt J mit BX, so ist JY die Darstellung des für die Linie BX erforderlichen Widerstandes, wenn BY das Gewicht des zu BX gehörenden Prismas samt seiner Belastung darstellt. Aus geometrischen Gründen folgt unmittelbar, dass der Punkt J einen Kegelschnitt beschreibt, wenn X sich auf einer Geraden bewegt. Und zwar ist dieser Kegelschnitt eine Hyperbel, welche die Ausgleichslinie BA im Punkte B berührt, durch den Schnittpunkt M von EF und der natürlichen Böschung hindurchgeht, und deren Asymptoten parallel der Stellungslinie und der Geländelinie EF parallel sind. Denjenigen Punkt J, zu welchem das grösste JY gehört, oder die Gleitfläche BJX findet man nun offenbar, indem man durch die Mitte der Sehne BM den conjugirten Durchmesser legt. Das Dreieck BJY kann, abgesehen von seiner Lage, als das Polygon der auf das Erdprisma BAX wirkenden Kräfte betrachtet werden. Man bringt es in die richtige Lage, wenn man es so lange dreht, bis BY vertical nach oben gerichtet ist, d. h. um einen Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varphi$. Will man nun die Cohäsion berücksichtigen, so müsste man in der richtigen Lage eine Kraft einführen, welche die Richtung von BX und eine Grösse proportional zu BX hat. Für die verschiedenen Dreiecke würden also die Endpunkte der Cohäsionskraft auf einer Parallelen zu EF liegen. Bringen wir jetzt wieder das Kräftedreieck in die Lage BJY, so wird die Linie BL, welche die Cohäsionskraft darstellt, mit BX den Winkel $90^0 - \varphi$ bilden, und auf einer Linie endigen, welche selbst mit EF denselben Winkel einschliesst. Um das Kräftepolygon für die Berücksichtigung der Cohäsion zu erhalten, hätte man durch den End-

punkt L der eben erwähnten Linie nur eine Parallele zu BX zu ziehen, welche JY in J_1 schneiden möge. Dann ist J_1Y der kleinste Widerstand, welcher ein Gleiten längs BX hindert. Es handelte sich nun noch darum, das Maximum für J_1Y zu finden. Diese Aufgabe hat sich, wie Culmann hervorhebt, bisher mit Strenge nur in Ausnahmefällen lösen lassen, nämlich in solchen Fällen, bei denen gleichzeitig JY ein Maximum und JJ_1 ein Minimum erreichen. Culmann hebt aber hervor, dass der Einfluss der Cohäsion ein verhältnismässig geringer sei, und dass man also das Maximum von J_1Y in der Nähe desjenigen von JY werde zu suchen haben.

Ein eigentümliches Verfahren, um den Erddruck auch für beliebige Belastung der Geländefläche aufzufinden, hat Saint-Guilhem*) angewendet, indem er die Frage nach der Bestimmung der Gleitfläche umkehrte. Nicht der obere Punkt der durch den Fuss der Mauer gehenden Gleitfläche wird gesucht, sondern derjenige Punkt der Mauer wird bestimmt, durch welchen die zu einem bestimmten Punkt des Geländes gehörende Gleitfläche hindurchgeht. Es hat das den Vorteil, dass diese Aufgabe stets auf eine Gleichung dritten Grades führt.

Die Bestimmung der Gleitfläche ist im Lauf der Zeit vielfach Gegenstand der Untersuchung gewesen, und manche geometrisch interessante Begründung ihrer Haupteigenschaft ist dabei aufgefunden. Das Resultat ist natürlich bei allen Bestimmungsweisen ziemlich dasselbe: es kommt immer darauf hinaus, das geometrische Mittel zweier Strecken zu finden, worauf es schon bei Poncelet's Construction ankam, z. B. bei W. Wittmann**), A. Goupil***) und anderen, die sämtlich aufzuführen hier nicht wohl der Platz ist. Zu erwähnen ist übrigens noch, was nicht allgemein bekannt zu sein scheint, dass die Hyperbel, welche in der Culmann'schen Theorie eine so wesentliche Rolle spielt, schon vor ihm vom Oberstlieutenant Ardant angegeben ist†).

---

*) de Saint Guilhem, Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge. Annales des ponts et chaussées 1858. I. Sem. p. 319—350.

**) W. Wittmann, Beitrag zur Theorie des Erddrucks auf Stützmauern und Stabilitätsbestimmung derselben. Zeitschr. des Bayerischen Architekten- und Ingenieurvereins 1877. Separatabdruck bei Th. Ackermann. München 1877.

— —, Geometrische Erddrucktheorie und Anwendung derselben auf die Stabilitätsbestimmung von Stützmauern. Zeitschr. f. Baukunde 1878. p. 53—76.

***) A. Goupil, Sur la détermination graphique de la poussée des terres. Le génie civil XII 1887/1888. p. 319—350.

†) Ardant, Nouvelles recherches sur le profil de revêtement le plus économique. Mémorial de l'officier du génie XV, p. 213—268. Paris 1848. 8°.

§ 12. Wie bestimmt sich nun die Richtung des Erddrucks? Das ist, nachdem durch Poncelet's Construction die Grösse des Erddrucks für jede Richtung gegeben ist, die wichtigste Frage.

Wir haben im Laufe unseres Berichtes schon einige Anschauungen über diesen Punkt zu besprechen und zurückzuweisen gehabt, so z. B. die Meinung, dass der Erddruck parallel der Gleitfläche sei, welche ausser den schon genannten auch Saint-Guilhem*) wenigstens für stark nach vorn geneigte Wände beibehalten wollte, oder die Meinung von Prony und Eytelwein, dass der Erddruck auch für geneigte Wände horizontale Richtung habe, welche in neuerer Zeit Planat**) wieder zu Ehren zu bringen gedachte.

Die Meinung, welche bisher den meisten Anklang gefunden hat, geht auf Coulomb zurück. Sie beruht auf der Vorstellung, dass in einem Grenzfalle des Gleichgewichts die Reibung an der Wand zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts absorbirt werde, und dass also der Erddruck mit der Normale der Wand den Reibungswinkel von Sand auf Mauerwerk einschliesse, und zwar so, dass je nach der zu erwartenden Bewegung die seitliche Componente nach unten oder nach oben gerichtet ist. Beim activen Erddruck wird das erstere, beim passiven das letztere angenommen. Man hat also zwei der Grösse und Richtung nach verschiedene Grenzwerte des Erddrucks. Dass hierbei der Begriff des Grenzfalls zu eng gefasst ist, erkennt man, wenn man die Frage stellt, welche Kraft übt denn das Erdreich auf die Mauer dann aus, wenn es sich nicht um einen Grenzfall handelt. Während man für den Fall glatter Wand zwei Grenzen gleicher Richtung hat, zwischen denen die gesuchte Kraft liegt, steht man im andern Falle ganz ratlos da, wenn man der Coulomb'schen Anschauung folgt. Denn es fehlen die vermittelnden Glieder, welche die extremen Glieder mit einander verbinden.

Um diese Lücke auszufüllen, kann man sich folgender Ueberlegung bedienen. An Stelle der Mauer denke man sich ein Brett gesetzt, welches durch eine Kraft, die grade gleich und entgegengesetzt dem activen Erddruck ist, gegen das Erdreich gedrückt wird. Es wird noch grade Gleichgewicht herrschen. Indem wir die Kraft vergrössern, wird die

---

*) de Saint-Guilhem, Mémoire sur la poussée que des terres nouvellement remuées exercent contre le parement d'un mur d'appui. Liouville Journ. IX p. 1—19. 1844.

**) P. Planat, Expériences sur la poussée des terres et la résistance des murs de soutènement. La semaine des constructeurs VIII, 169, 182 (1883/4) und IX, 577, 590 (1884/5).

Sicherheit nur vermehrt, aber bloss bis zu einer gewissen Grenze; überschreiten wir diese, so wird eine Bewegung eintreten. Ist diese Grenze nun nicht auch eine solche Kraft, welche das Erdreich in einem Grenzfalle des Gleichgewichts ausübt? Eine ähnliche Ueberlegung können wir aber für jede einzelne Richtung anstellen, deren Neigung zur Normale den Reibungswinkel von Sand auf Mauerwerk nicht überschreitet, und gelangen dann zu dem Resultat, dass es nicht nur zwei Grenzfälle des Gleichgewichts giebt, sondern unendlich viele.

Welcher von diesen Grenzfällen gerade eintritt, das hängt nun offenbar ganz wesentlich davon ab, welche Bewegung der Mauer zu befürchten ist, und insofern hat de Lafont*) sicher Recht, wenn er der Meinung widerspricht, als ob die Richtung des Erddrucks allein durch die Beschaffenheit der hinteren Seite der Mauer ein für alle Mal bestimmt sei.

§ 13. Sowohl für die Praxis als auch für die Theorie kommt es nicht allein auf die Grösse der Resultante des Erddrucks an, sondern mindestens eben soviel auf die Wirkungslinie derselben oder, anders gesprochen, auf das Moment in Bezug auf irgend eine Axe. Für die Bestimmung desselben hat man wohl schon in den ersten Stadien der Erddrucktheorie das folgende, noch heute bräuchliche, naheliegende Verfahren eingeschlagen. Nachdem man die Grösse des Erddrucks als Function der Länge z der Mauerlinie bestimmt hat, kann man nach z differentiiren und erhält in dem Differential u.dz den Zuwachs des Druckes. Indem man nun annimmt, dass dieser Zuwachs gerade auf das hinzugekommene Längenstück wirkt, gelangt man zu der Vorstellung, dass auf irgend ein Differential dz der Mauerlinie gerade der Druck u.dz wirke, und damit zu einer bestimmten Druckverteilung, mit welcher dann natürlich auch das Moment gegeben ist. Nur im einzelnen ergeben sich noch Unterschiede; so z. B. darin, ob bei Rücksicht auf die Cohäsion auch derjenige obere Teil des Erdreichs in Rechnung gezogen werden soll, welcher an und für sich, d. h. auch ohne die Stützmauer, in Ruhe bleiben würde.

Dieser Bestimmungsweise des Momentes liegt die stillschweigend als richtig angenommene Voraussetzung zu Grunde, dass, wenn das Erdreich sich im Grenzzustande des Gleichgewichts befindet, auch jeder Teil des Erdkörpers sich in einem solchen und zwar demselben Grenzzustande befindet. Dieser Annahme stehen nun aber einige Bedenken entgegen;

---

*) de Lafont, Sur la poussée des terres et sur les dimensions à donner suivant leurs profils aux murs de soutènement et des réservoirs. Annales des ponts et chaussée 1866, II. sem. p. 380—462.

man sieht zunächst gar nicht die Notwendigkeit ein, warum, falls in einer Ebene die Reibung zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erschöpft wird, dies auch in einer Schar von Ebenen der Fall sein soll.

Dazu kommt noch Folgendes. Bei ebener Begrenzung des Geländes ergiebt sich, wenn von der Cohäsion abgesehen wird, eine der hydrostatischen gleiche Druckverteilung; der Druck an einer Stelle der Mauer wird proportional der Entfernung vom oberen Ende, der Gesamtdruck wird proportional dem Quadrat der Länge der Mauerlinie, und der Angriffspunkt fällt in den oberen Endpunkt des unteren Drittels. Gerade diese Uebereinstimmung mit dem Drucke von Flüssigkeiten ist es auch wohl gewesen, welche wesentlich dazu beigetragen hat, die hier angegebene Bestimmung des Angriffspunktes vor einer Kritik zu bewahren. Wenn aber bei allen Grenzfällen der Erddruck im oberen Endpunkt des unteren Drittels angreift, so muss der Widerstand auch dann durch diesen Punkt gehen, wenn es sich nicht gerade um einen Grenzfall handelt, und es dürfte dann nicht möglich sein, eine ebene Wand durch andere Kräfte als solche von der eben beschriebenen Art gegen den Erddruck im Gleichgewicht zu halten. Dass es aber sehr wohl möglich ist, die Wand durch eine Kraft festzuhalten, welche in einem anderen Punkte angreift, das lässt sich zwar an dieser Stelle nicht beweisen, folgt aber aus der von Rankine begründeten modernen Theorie des Erddrucks, welche in ihren physikalischen Grundlagen mit der Coulomb'schen Theorie übereinstimmt.

Noch ein Umstand spricht gegen die angenommene Druckverteilung. Wenn das Prisma im Gleichgewicht sein soll, so müssen die drei Kräfte, welche auf dasselbe wirken, sich in einem Punkte schneiden. Verfügt man nun über den Angriffspunkt des Widerstandes der Mauer, so hat man, da die Wirkungslinie des Gewichtes von vorn herein gegeben ist, auch über den Angriffspunkt der Kraft verfügt, welchen das stehen bleibende Erdreich ausübt. Nun lässt sich aber beweisen, dass diese Kraft im oberen Endpunkt des unteren Drittels der Gleitlinie angreift. Zwar das Argument Mohr's*), welcher diesen Satz zuerst ausgesprochen hat, dass man ebenso wie für die Mauer, auch für die Gleitfläche schliessen könnte, ist, wie Winkler*) mit Recht hervorgehoben hat, zu schwach, um die angeführte Behauptung zu beweisen. Wohl aber liegen die Mittel des Beweises in einem Verfahren, das Winkler**) selbst und

---

*) Mohr, Beitrag zur Theorie des Erddrucks. Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieurvereines Bd. XVII p. 494. 1871.

Winkler, Bemerkungen hierzu.

**) Winkler, Neue Theorie des Erddruckes, p. 38 s.

vor ihm Weingarten*) angewendet haben, um die Lage der Gleitfläche aufzufinden.

Wir denken uns durch den Fuss der Mauer irgend eine Ebene gelegt. Auf das durch diese Ebene abgetrennte Prisma wirken dann erstlich das Eigengewicht, zweitens der Widerstand der Mauer gegen den Erddruck, drittens der Widerstand gegen den Druck, welchen das abgetrennte Prisma gegen das übrige Erdreich ausübt.

Aus der Bedingung des Gleichgewichts erhält man nun die Tangential- und Normalcomponente der letztgenannten Kraft ausgedrückt durch die beiden Componenten des Erddrucks. Beim Grenzfall des Gleichgewichts müssen aber die widerstehenden Kräfte — Reibung und Cohäsion — gerade hinreichen, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten, d. h. mindestens an einer Fläche muss die tangentiale Componente gleich dem Cohäsionswiderstande und dem durch die Normalcomponente bedingten Reibungswiderstand sein:

$$T = fN + Cl.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung erhalten wir zunächst eine Gleichung, in welcher nicht mehr die an der Gleitfläche wirkenden Kräfte auftreten, sondern der Neigungswinkel der letzteren zum Horizont, welcher vorläufig noch als unbekannt anzusehen ist. Dazu kommt noch Folgendes. An keiner Fläche darf die tangentiale Componente die Summe des Cohäsions- und Reibungswiderstandes überschreiten, sodass der Wert Eins, welchen der Quotient beider an der Gleitfläche erreicht, ein Maximalwert ist. Dieser Quotient ist nun offenbar eine Function der Neigung der betreffenden Ebene zum Horizont, weil ja T und N Functionen dieser Grösse sind. Differentiiren wir den fraglichen Bruch nach dem bezeichneten Winkel, so müssen wir nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen einen Ausdruck erhalten, welcher für die Gleitfläche gleich Null ist. So erhalten wir eine zweite Beziehung zwischen den beiden Componenten des Erddrucks und der Neigung der Gleitfläche. Wird, wie gewöhnlich, die Richtung des Erddrucks als bekannt vorausgesetzt, so erhalten wir die Grösse desselben, indem wir die eben erwähnte Neigung der Gleitfläche eliminiren. In ihren Resultaten kann natürlich diese Betrachtungsweise nicht von der Coulomb'schen abweichen, weil beide von denselben Voraussetzungen über die physikalische Beschaffenheit des

---

*) Weingarten, Vortrag über Erddruck gehalten am 20. Febr. 1869 im Architektenverein zu Berlin, Erbkam Zeitschrift f. Bauwesen XX, S. 122 bis 123. 1869.

Erdreichs und über die Gestalt der Gleitfläche ausgehen, und beide rationelle Schlüsse aus ihren Voraussetzungen ziehen.

Hat man nun die beiden Componenten des Erddrucks durch die Neigung der Gleitfläche ausgedrückt, dann muss sich natürlich auch der Druck an der Gleitfläche bestimmen lassen. Das gilt nun aber nicht nur für die ganze Gleitfläche, sondern für irgend einen Teil derselben: Es sei nämlich (Fig. 5) BH die hintere Wand einer Mauer, BG die Gleitlinie, Z irgend ein Punkt auf derselben, welcher von G die Entfernung z haben möge. Es sei γ der Winkel von BG zur Horizontalen, T_z und N_z die Componentensummen der längs GZ auf das Prisma wirkenden Kräfte, zwischen denen, weil BG Gleitlinie sein sollte, die Beziehung

$$T_z = fN_z + cz = \operatorname{tg}\varphi N_z + cz$$

besteht. Jetzt ziehe man durch Z eine Linie ZG, unter dem Winkel $d\gamma$ zu ZG, an welcher die Componenten des Druckes

$$T'_z = T_z + dT_z \quad \text{und} \quad N'_z = N_z + dN_z$$

sein mögen. Diese Kräfte T'_z und N'_z müssen nun offenbar so beschaffen sein, dass das Prisma GZG_1 unter dem Einfluss von T_z, N_z, $-T'_z$ und $-N'_z$ sowie seines eigenen Gewichtes im Gleichgewicht ist. Man erhält als Ausdruck dieser Beziehung die beiden Gleichungen

$$d(T_z\cos\gamma - N_z\sin\gamma) = 0,$$

$$d(T_z\sin\gamma + N_z\cos\gamma) + \frac{p}{2}z^2 d\gamma = 0.$$

An der Gleitfläche erreicht der Quotient $T_z:(fN_z+cz)$ den Maximalwert Eins, wir erhalten also

$$dT_z = f\,dN_z + c\,dz = \operatorname{tg}\varphi\, dN_z + c\,dz.$$

Wenn wir aus diesen drei Gleichungen die beiden Differentiale dT_z und dN_z eliminiren, erhalten wir

$$c\frac{dz}{d\gamma}\cos\varphi - (T_z\sin\varphi + N_z\cos\varphi) + \frac{p}{2}z^2\sin(\gamma-\varphi) = 0.$$

Der Quotient $\frac{dz}{d\gamma}$ ist leicht auszudrücken durch den Winkel τ, unter welchem die Linie GG_1 die Gleitlinie BG schneidet. Dann erhält man aus dieser Gleichung und der obigen Gleichung

$$T_z = N_z\operatorname{tg}\varphi + cz$$

die beiden Componenten T_z und N_z.

In dem Falle, welcher uns besonders interessirt, dass die Cohäsion

vernachlässigt werden darf, erhalten wir für den Druck

$$P_z = T_z \sin\varphi + N_z \cos\varphi = \frac{p}{2} z^2 \sin(\gamma - \varphi).$$

Man erkennt also, dass man nicht nur den an der Gleitfläche stattfindenden Gesamtdruck, sondern auch seine Verteilung längs der Gleitfläche bestimmen kann. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass auch dann, wenn die Gleitfläche gekrümmt ist, der Druck sich bestimmen lässt, sobald nur die Gestalt der Fläche als bekannt vorausgesetzt wird.

In dem Falle ebener Gleitflächen greift nun, wie die Formel unmittelbar erkennen lässt, die Resultante der an der Gleitfläche wirkenden Kräfte im oberen Endpunkt des unteren Drittels an, wie schon oben angegeben wurde. Mit den an der Gleitfläche stattfindenden Kräften ist nun aber auch zugleich der Erddruck nach Grösse und Wirkungslinie bestimmt, sodass man Grösse, Neigung und Moment durch eine Grösse ausgedrückt erhält, über welche die Verfügung noch frei steht, nämlich durch die Neigung der Gleitfläche. Verfügt man nun über eins der gesuchten Stücke, z. B., wie es gewöhnlich geschieht, über die Richtung des Erddrucks, so wird man nicht noch über ein zweites verfügen dürfen, sondern wird dieses so zu wählen haben, wie es die Gleitfläche ergiebt.

Im Hinblick auf die Verhältnisse bei den Flüssigkeiten haben diejenigen Grenzfälle ein besonderes Interesse, bei denen der Angriffspunkt des Erddrucks im oberen Endpunkt des unteren Drittels der Mauer liegt; sie sind dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen die Gleitfläche der Lage nach unabhängig wird von der Lage der hinteren Mauerwand. Es sei (Fig. 6.) BH die hintere Seite der Mauer, BG die Gleitfläche, h und g diejenigen Punkte, welche diese Linien nach dem Verhältnis 1:3 teilen. Nun denke man sich das Prisma HBG durch eine Verticale BV in zwei Teile zerlegt und die Gewichte beider zu je einer Resultante vereinigt, welche durch h bezüglich g hindurchgehen müssen. In h und g greift schon je eine Kraft an; vereinigt man diese mit den betreffenden Gewichtsresultanten, so erhält man zwei Kräfte, welche auf das Prisma wirken. Sollen dieselben im Gleichgewicht sein, so müssen sie eine gemeinschaftliche Wirkungslinie haben, und diese kann der Natur der Sache nach keine andere als die Linie hg, d. h. eine Parallele zur Geländelinie sein. Wir erhalten also als wesentliche Eigenschaft der Gleitfläche die, dass die Resultante der an ihr angreifenden Kräfte und des Gewichtes des Prismas VBG parallel der Geländelinie VG sei.

Diese Eigenschaft ist aber völlig unabhängig von der Lage der Linie BH geworden, so dass also bei den in Frage stehenden Grenz-

fällen der statische Zustand der Sandmasse für alle Mauerlagen derselbe ist. Bei weiterer Untersuchung dieser von J. Weyrauch*) begründeten Theorie würden wir erkennen, dass man bei ihr die Druckverhältnisse im Innern des Erdreichs weiter verfolgen kann, als bei jeder andern, auf der Annahme ebener Gleitflächen beruhenden Theorie. Man kann nämlich, ohne auf Widersprüche zu stossen, für jedes Linienelement einen Druck derart annehmen, dass zu jeder endlichen Länge der nach Weyrauch's Theorie bestimmte Druck sich ergiebt.

§ 14. Wir könnten also am besten an dieser Stelle übergehen zu der von Rankine und Scheffler begründeten Betrachtungsweise, wenn wir nicht der Vollständigkeit halber noch auf einen Punkt einzugehen hätten, welcher in der auf Betrachtung der Gleitfläche gegründeten Theorie des Erddrucks von je an eine wichtige Rolle gespielt hat, nämlich auf die Versuche zur Bestimmung der wirklichen Gestalt der Gleitfläche.

Coulomb selbst war weit davon entfernt, anzunehmen, dass die seiner Theorie zu Grunde gelegte Voraussetzung ebener Gestalt der Gleitflächen streng den Thatsachen entspräche. Im Gegenteil, er spricht es selbst aus, dass der Wunsch, seine Theorie einfacher und in Folge dessen auch den beteiligten Künstlern verständlicher zu machen, die Veranlassung gewesen sei, von der einfachen Hypothese auszugehen. Im Anschluss an die entwickelte Theorie macht er dann weiter den Versuch, die wirkliche Gestalt der Gleitfläche zu bestimmen.

Im engsten Anschluss an dies für ebene Gleitflächen eingeschlagene Verfahren, formulirt Coulomb die Aufgabe, um welche es sich handelt, so, dass diejenige Curve BC (Fig. 7) gefunden werde, für welche der zur Verhinderung des Abgleitens erforderliche Widerstand ein Maximum ist. Ohne weitere Begründung geht er hierbei davon aus, dass längs irgend einer Verticalen, welche einen Punkt A' des Geländes mit einem Punkte B' der Gleitlinie verbindet, normalen Druck erleidet. Er gelangt so zu einem Ausdruck für den Druck, welcher an einem Bogenelemente ds der Gleitlinie dann stattfindet, wenn gerade noch ein Abgleiten an der letzteren verhindert wird. Die Bestimmung der Linie BC, welche man heut mit den Hülfsmitteln der Variationsrechnung leicht ausführen kann, vollzieht nun Coulomb so, dass er den zwischen zwei nahe bei einander liegenden Punkten gelegenen Teil der Gleitlinie als eine einmal gebrochene

*) J. Weyrauch, Zur Theorie des Erddrucks. Zeitschrift für Baukunde 1878, p. 193.

Vergl. auch den Artikel von Almquist, Zur älteren Theorie des Erddrucks. Civilingenieur XXXI, 1885.

Linie ansieht, wo der mittlere Eckpunkt so bestimmt wird, dass der resultirende Druck ein Maximum wird. Das Resultat ist eine Differentialgleichung von folgender Form:

$$(F + F'y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(G + G'y)\frac{dy}{dx} + (H + H'y) = 0.$$

Die sechs Coefficienten F, F', G, G', H, H' sind constante Grössen.

Der bekannte Bauingenieur Scheffler*) hat später die Untersuchung wieder aufgenommen und dabei gefunden, dass bei horizontalem Gelände und verticaler Mauer die Gleitlinie gerade sein müsse. Zu demselben Resultate war schon früher Hagen**) vermittelst einer mehr geometrischen Betrachtung gelangt, die aber auf denselben Grundlagen wie die Coulomb'sche beruht. Hagen geht davon aus, dass im Grenzfalle des Gleichgewichts der Teil, welcher von der Gleitfläche, irgend einer Verticalebene und dem Gelände begrenzt wird, sich genau so verhält, als wenn die Verticalebene eine Mauer wäre, und dass also, wenn B' irgend ein Punkt der Gleitlinie BC ist, der Teil B'C ähnlich der ganzen Linie BC sein müsse. Daraus würde dann allerdings unmittelbar folgen, dass BC eine gerade Linie ist.

Die Willkür der Annahme, welche diesen Betrachtungen zu Grunde liegt, dass jede Verticale sich bezüglich des Druckes ebenso wie die Wand verhalten solle, liegt auf der Hand. Sie tritt noch mehr hervor bei dem Versuche von N. Persy***), die Gestalt der Gleitfläche zu bestimmen. Dieser Autor nimmt nämlich an, dass an der Wand Reibung und Adhäsion stattfindet, und setzt dann für jede Parallele zur Wand, so weit sie zwischen dem Gelände und der Gleitfläche liegt, voraus, dass neben dem Normaldruck p' ein tangentialer Widerstand von der Grösse $f'p' + c'z$ stattfindet, wo f' und c' die Reibungs- und Adhäsionsconstante, z die Länge der fraglichen Linie bedeuten.

---

*) H. Moseley, Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur. Aus dem Englischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von H. Scheffler, T. II p. 145 u. ff. Braunschweig 1845. 8⁰.

H. Scheffler, Ueber den Druck im Innern einer Erdmasse. Crelle's Journal der Baukunst XXX p. 185—194, 195—223. 1851.

H. Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857. 8⁰.

**) Hagen, Untersuchung über den Druck und die Reibung des Sandes. Poggendorff, Annalen der Physik und Chemie XXVIII, 17—48 u. 297—323. 1833.

***) N. Persy, Cours de stabilité des constructions à l'usage des élèves de l'école royale de l'artillerie et du génie, 2. Edition. Metz 1827. Lithographirt Fol.

Es ist leicht einzusehen, worin bei gekrümmten Flächen im Gegensatz zu ebenen Flächen die Hauptschwierigkeit beruht. Bei ebenen Flächen war mit der Annahme, dass an denselben die Reibung und Cohäsion völlig erschöpft werde, und mit der Richtung des Widerstandes der Mauer auch die zur Verhinderung des Abgleitens erforderliche Grösse des letzteren bestimmt. Bei gekrümmten Flächen genügen diese Bedingungen offenbar nicht mehr, um die Druckverteilung an dieser Fläche und damit den Widerstand zu ermitteln. Diesen Uebelstand beseitigen nun zwar die Annahmen, welche Coulomb und seine Nachfolger herangezogen haben. Da dieselben aber willkürlich, oder doch mindestens nicht hinreichend begründet sind, so müssen wir diese Versuche, die wirkliche Gestalt der Gleitfläche zu bestimmen, als gescheitert ansehen.

II.
Die Theorie des Erddrucks, begründet auf Betrachtung der Druckverteilung im Erdkörper.

§ 15. Die auf Betrachtung der Gleitflächen beruhende Theorie des Erddrucks hatte, wie wir gesehen haben, eigentlich nur so weit eine erfolgreiche Entwickelung genommen, als die Annahme ebener Gleitflächen beizubehalten war. Ihre Anwendbarkeit blieb demzufolge auch auf solche Aufgaben beschränkt, bei denen diese Annahme durch die Erfahrung wenigstens näherungsweise gerechtfertigt war, d. h. im wesenlichen auf die Bestimmung des Seitendruckes gegen Futtermauern. Wollte man andere Aufgaben lösen und auch das bezeichnete Problem genauer behandeln, so musste man den bisher betretenen Weg verlassen und die ganze Theorie auf eine andere Grundlage stellen. Da blieb denn, wollte man nicht für jede Aufgabe ein besonderes Verfahren ersinnen, nur übrig, auf den Sand und die ihm ähnlichen Substanzen das Verfahren anzuwenden, das sich bei elastischen und flüssigen Substanzen so hervorragend bewährt hatte: man musste suchen, aus allgemeinen mechanischen Prinzipien und den besonderen physikalischen Eigenschaften des Sandes die partiellen Differentialgleichungen herzuleiten, welche zwischen den Druckkräften und den äusseren Kräften bestehen.

Sieht man von einigen misslungenen Versuchen*) nach dieser Richtung

*) Garidel, Essai sur l'équilibre des demi-fluides à frottement et application à la stabilité des revêtements militaires. Paris 1839. 8⁰.

Ortmann, Die Statik des Sandes mit Anwendungen auf die Baukunst. Leipzig. 1847. 8⁰.

ab, so hat Scheffler*) das Verdienst, als der erste eine derartige Betrachtungsweise, wenn auch zunächst nur in einem sehr speciellen Fall angewendet zu haben. Einige Jahre später hat dann der berühmte englische Ingenieur J. Macquorn Rankine**) dies Verfahren allgemeiner durchgeführt. Ueber ein Jahrzehnt jedoch blieben seine schönen Untersuchungen auf dem Continent unbeachtet, bis um das Ende der sechziger und den Anfang der siebziger Jahre M. Lévy***), E. Winkler†) und Considère††) unabhängig von ihrem Vorgänger ähnliche Untersuchungen veröffentlichten.

Die neuere Theorie beschränkt sich, wie die von Coulomb begründete, auf den praktisch allerdings wichtigsten Fall, dass sich alles gleichmässig in Bezug auf eine gewisse Längsrichtung verhält. Die Erleichterung, welche diese Beschränkung mit sich bringt, liegt auf der Hand: man hat es statt mit einem Gebiet von drei Dimensionen gewissermassen nur mit einem solchen von zwei Dimensionen zu thun. Wählt man zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Innern der Sandmasse ein Coordinatensystem, dessen z-Axe jene schon erwähnte Längsrichtung hat, und bedient man sich zur Benennung der Druckcomponenten der von Kirchhoff in seiner Mechanik gewählten Bezeichnnng, so sind $X_z = Z_x$ und $Y_z = Z_y$ gleich Null; ausserdem werden alle anderen Druckcomponenten von z unabhängig.

Man hat demnach zunächst die folgenden Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} = X, \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} = Y, \end{cases} \qquad X_y = Y_x.$$

*) Scheffler, Ueber den Druck im Innern einer Erdmasse. Crelle's Journal der Baukunst. XXX. 1851.

**) Rankine, On the stability of loose earth. Phil. Transactions of the London Royal Soc. 1856/57.

— —, A Manual of applied mechanics. London 1861.

***) Berichte über die von M. Lévy 1867 zuerst eingereichte Abhandlung, Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et de ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement, finden sich in Comptes rendus de l'Académie des sciences LXVIII p. 1456—1458, 1869 und LXX p. 217—226, 1870.

Die Abhandlnng selbst ist abgedruckt in Liouville Journal de Mathématiques pures et appliquées 1873.

†) Winkler, Neue Theorie des Erddrucks. Wien 1872. 8⁰.

††) Considère, Note sur la poussée des terres. Ann. des ponts e chaussées 1870, I, 547—594.

Irgend ein Flächenelement, welches parallel der z-Axe ist und dessen Normale mit der X-Axe den Winkel α und mit der Y-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ einschliesst, erleidet dann einen Druck mit den Componenten

$$X_n = X_x \cos\alpha + X_y \sin\alpha, \quad Y_n = Y_x \cos\alpha + Y_y \sin\alpha, \quad Z_n = 0.$$

Diese Gleichungen reichen zur Bestimmung der Druckkräfte nicht, es müssen noch Beziehungen hinzutreten, welche den specifischen physikalischen Charakter der Substanz zum Ausdruck bringen.

Beim Sande geht man von der Vorstellung aus, welche auch der Coulomb'schen Theorie zu Grunde liegt, dass im Falle des Gleichgewichts an keinem Flächenelemente die Reibung überwunden wird und bei Grenzfällen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts an gewissen Elementen gerade erschöpft wird. Einzelne Autoren haben auch die Cohäsion zu berücksichtigen gesucht, so z. B. Winkler. Jedoch ist dabei zu bedenken, dass der Widerstand der Reibung sich erst geltend macht, wenn die Cohäsion überwunden ist und nicht mehr wirkt, sodass an eine gleichzeitige Wirksamkeit von Reibung und Cohäsion eigentlich nicht gedacht werden kann. In den Anwendungen der Erddrucktheorie hat man deshalb bisher sich auf den Fall cohäsionslosen Erdreichs beschränkt, wie er z. B. bei trockenem Sand dargestellt wird. Daher wollen auch wir uns im folgenden auf diesen Fall beschränken, und hier nur kurz auf die Abhandlungen von Schäffer*) verweisen, in welchen die Cohäsion derart berücksichtigt wird, dass in den oberen Schichten, wo die Cohäsion noch nicht überwunden ist, die Reibung nicht in Rechnung gezogen wird, während in den unteren Schichten lediglich die Reibung als Ursache der Tangentialcomponente angesehen wird.

Wenn nun für ein Flächenelement die Reibung nicht überwunden werden soll, so muss der Druck mit der Normale einen Winkel einschliessen, welcher eine gewisse obere Grenze φ nicht überschreitet. Diese Bedingung ist nun offenbar für alle Flächenelemente erfüllt, wenn sie für diejenigen erfüllt ist, bei denen die Druckneigung ein Maximum ist. Sind nun an einer bestimmten Stelle die beiden Hauptdrucke, deren Flächenelemente parallel der Z-Axe sind, D_1 und D_2, ferner u die grösste Druckneigung zur Normale, welche sich an dieser Stelle findet, so hat man die Beziehung

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}$$

*) Schäffer, Erddruck und Stützwände. Zeitschrift für Bauwesen XXVIII, 529—548, 1878; namentlich aber Deutsche Bauzeitung XII, 284—286.

oder

$$D_1 - D_2 = \sin u (D_1 + D_2).$$

Nun bestehen aber zwischen den oben eingeführten Druckcomponenten X_x, Y_y, $X_y = Y_x$ und den beiden Hauptdrucken die Gleichungen

$$D_1 + D_2 = X_x + Y_y, \quad D_1 . D_2 = X_x Y_y - X_y Y_x.$$

Demnach ergiebt sich zwischen den Druckcomponenten und dem Maximum der Druckneigung die Beziehung:

$$(X_x - Y_y)^2 + 4 X_y^2 = \sin^2 u (X_x + Y_y)^2.$$

Nach den obigen Ausführungen sollte nun u höchstens gleich φ sein; wir erhalten also als Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \qquad \sin^2\varphi (X_x + Y_y)^2 \geqq (X_x - Y_y)^2 + 4 X_y^2.$$

In denjenigen Teilen der Sandmasse, welche sich im Grenzzustande des Gleichgewichts befinden, erreicht u den Wert φ wirklich, und die Bedingung (2) geht dort in eine Gleichung über.

§ 16. Für die Praxis hat natürlich der Fall ein besonderes Interesse, bei welchem die wirkende Kraft die Schwere ist. Nehmen wir an, dass die Richtung der Schwere mit der X-Axe den spitzen Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ mit der Y-Axe den Winkel α bildet, und dass das specifische Gewicht der Sandmasse gleich γ ist, so erhalten wir an Stelle von (1) die specielleren Gleichungen:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = \gamma \sin\alpha, \qquad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \gamma \cos\alpha.$$

Hängen jetzt alle Druckcomponenten allein von y ab, so wird, falls die Ebene $y = 0$ eine freie Oberfläche und demnach an ihr $X_y = Y_y = 0$ sein soll:

$$X_y = Y_x = \gamma y \sin\alpha, \quad Y_y = \gamma . y \cos\alpha.$$

Setzen wir nun $X_x = h\gamma . y$ so erhalten wir aus (2) für h folgende Bedingung:

$$\sin^2\varphi (h + \cos\alpha)^2 \geqq (h - \cos\alpha)^2 + 4 \sin^2\alpha,$$

deren Auflösung liefert:

$$\frac{\cos\alpha(1 + \sin^2\varphi) - 2\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\alpha}}{\cos^2\varphi} \leqq h$$
$$\leqq \frac{\cos\alpha(1 + \sin^2\varphi) + 2\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\alpha}}{\cos^2\varphi}.$$

Die durch die vorstehenden Formeln dargestellte Druckverteilung, welche in einem Erdkörper möglich ist, welcher von einer unter dem Winkel α

zur Horizontalebene geneigten Ebene begrenzt wird, im übrigen aber unbegrenzt sich erstreckt, ist namentlich in ihren Grenzfällen Gegenstand einer eingehenden Untersuchung gewesen. Man weiss, dass sich der Druck, sobald er für zwei Linienelemente bekannt ist, unmittelbar nach ganz allgemeinen, von der speciellen Natur der Substanz unabhängigen Regeln für jedes andere Linienelement ergiebt, sodass diese zunächst nur im Interesse der Erddrucktheorie unternommenen Forschungen sich vielleicht auch auf anderen Gebieten nützlich erweisen dürften.

Rankine geht von der Thatsache aus, dass, wenn ein Linienelement von der Richtung A einen Druck von der Richtung B erleidet, umgekehrt das Linienelement mit der Richtung B einen zu A parallelen Druck erleidet, und dass, wenn $\frac{\pi}{2} - \alpha$ der Winkel zwischen zwei so conjugirten Richtungen und u das Maximum von α an einer Stelle ist, das Verhältnis der beiden Drucke den Wert

$$\frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 u}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 u}}$$

hat. Im Grenzfalle des Gleichgewichts hat u natürlich den Wert φ. Nun kann man aber leicht den Druck für ein Linienelement ds bestimmen, welches der Oberfläche parallel ist. Zieht man nämlich durch die Endpunkte eines solchen Elementes zwei Verticalen bis zur Oberfläche des Sandes, so erhält man einen Streifen, dessen Gewicht nach Grösse und Richtung gleich dem Druck für ds wird, weil ja offenbar die längs der Verticalen einwirkenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind und sich also aufheben. Ist z die Länge der Verticalen, so ist dieses Gewicht gleich $\gamma z \cos\alpha\, ds$ und also der Druck für ein der Oberfläche paralleles Element $\gamma z \cos\alpha$. Für das conjugirte verticale Element liegt nach den obigen Ausführungen der Druck zwischen den Grenzen:

$$\gamma z \cos\alpha \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}$$

und

$$\gamma z \cos\alpha \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}.$$

Bezeichnen wir die von der Neigung des Geländes und von der natürlichen Böschung abhängigen Factoren dieser Ausdrücke mit K und K′, so erhalten wir für den Druck der verticalen Linie in den Grenzfällen die Werte:

$$\tfrac{1}{2}\gamma z^2 K \quad \text{resp.} \quad \tfrac{1}{2}\gamma z^2 K',$$

und zwar greifen diese Resultanten in dem oberen Endpunkte des unteren Drittels dieser Linie an. Um nun den Druck für irgend eine andere von der Oberfläche ausgehende Linie zu finden, hat man nur durch den unteren Endpunkt eine verticale Linie zu ziehen. Für die letztere kann man nach der eben angegebenen Regel den Druck bestimmen, ebenso kennt man das Eigengewicht des Dreiecks; der gesuchte Druck ist die Resultante beider.

In neuerer Zeit hat man nun auf verschiedene Weise versucht, die Druckverteilung mit Hülfe geometrisch-graphischer Methoden darzustellen. Einige dieser Methoden sollen hier in Kürze beschrieben werden.

Mohr's*) Verfahren beruht auf folgenden Ueberlegungen. Man ziehe (Fig. 7a) von einem Punkte O aus eine Linie OJ_1, deren Länge nach Grösse gleich dem Drucke eines gewissen Linienelementes ist, und deren Neigung zu einer festen Linie OX gleich der Neigung des Druckes zur Normale des Linienelementes ist; der geometrische Ort des Punktes J_1 für die Gesamtheit der Linienelemente eines Punktes ist dann ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf OX liegt. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit OX bestimmen offenbar die beiden Hauptdrucke. Zieht man nun durch einen Punkt J_1 eine Linie parallel zu dem betreffenden Linienelement, so trifft diese den Kreis in einem festen Punkte J. Ferner ist leicht einzusehen, dass das Maximum der Druckneigung gefunden wird, indem man von O aus Tangenten an den Kreis zieht.

Es möge nun die Längeneinheit eine Kraft von der Grösse $\gamma \cos \alpha$ vorstellen, dann stellt die von dem Punkte O des Geländes ausgehende verticale Linie OJ die Grösse des Druckes für ein der Oberfläche paralleles Linienelement im Punkte J dar. Zieht man jetzt (Fig. 7b) von O aus senkrecht zum Gelände die Linie OX, fällt von J aus ein Lot JE auf OX, verlängert dieses um sich selbst bis J_1, so ist $OJ_1 = OJ$ und die Neigung von OJ_1 zu OX gleich der Druckneigung für das der Oberfläche parallele Element. Will man nun OX als Grundlinie für die Bestimmung der Druckverteilung im Punkte J benutzen, so hat man einen Kreis zu suchen, dessen Mittelpunkt auf OX liegt, und der durch J_1 hindurch geht. Dadurch ist aber der Kreis noch nicht bestimmt. In einem Grenzfalle kennen wir jedoch das Maximum der Druckneigung, da dasselbe gleich φ ist, und damit auch die von O ausgehenden Tangenten. Nun kann man aber nach bekannten geometrischen Regeln leicht zwei Kreise construiren, welche

*) Mohr, Beitrag zur Theorie des Erddrucks. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1871, p. 494.

allen Bedingungen genügen; jeder giebt die Druckverteilung für einen der beiden Grenzfälle. Beide gehen auch durch J hindurch. Da nun nach der Construction JJ_1 die Richtung des Linienelementes angiebt, zu welchem der Druck OJ_1 gehört, so erhält man den Druck für irgend ein Linienelement in J, indem man in der Richtung desselben von J aus eine Gerade zieht, welche den Kreis zum zweiten Male in F trifft und dann F mit O verbindet. Die Länge OF giebt die Grösse, der Winkel FOE die Neigung des Drucks zur Normale des Linienelementes an.

Man kann, wie leicht zu beweisen ist, die Richtung eines Linienelementes und des zugehörigen Druckes ansehen als die Richtungen conjugirter Durchmesser einer Ellipse. Ferner ist bekannt, dass die Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier so conjugirter Richtungen mit einem durch den Mittelpunkt der Ellipse gehenden festen Kreise durch einen festen Punkt gehen. Auf Grund dieser beiden Thatsachen entwickelt J. J. Weyrauch*) eine graphische Bestimmung der Druckverteilung für den Grenzfall des Gleichgewichts.

Sind (Fig. 8) oA und oB zwei conjugirte Richtungen, und schneidet man dieselbe durch einen Kreis mit dem ganz willkürlich zu wählenden Mittelpunkt c und dem Radius co in den Punkten a und b, so muss die Verbindungslinie ab durch einen von der speciellen Wahl der beiden conjugirten Richtungen unabhängigen Punkt d gehen. Dieser Punkt d ist dadurch bestimmt, dass das Maximum der Druckneigung im Grenzfalle des Gleichgewichts gleich φ ist; seine Entfernung von c verhält sich in Folge dessen zum Radius des Kreises oab wie $\sin\varphi$ zu 1. Der Punkt d giebt nun aber nicht allein ein gutes Mittel für die Construction der zu einer gegebenen Richtung gehörigen Druckrichtung, sondern er liefert auch die Grösse des Druckes, weil, wie leicht zu sehen, die Entfernung ad in einem constanten Verhältnis zu dem Druck für das Linienelement oa steht und erstere demnach als Darstellung des letzteren betrachtet werden kann. Da ferner offenbar Winkel dac gleich der Druckneigung für oa ist, so erhält man die Normal- und Tangentialcomponente von ad, indem man über cd als Durchmesser einen Kreis beschreibt, welcher ac zum zweiten Male in f schneiden möge; af und fd sind dann die beiden Componenten. Soll die Linie ad den Druck unter Zugrundelegung eines bestimmten Massstabes darstellen, so hat man natürlich den Radius des Kreises passend zu wählen.

Beim unbegrenzten Erdreich sind die Geländelinie und die Verti-

*) J. J. Weyrauch, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen. Allgemeine Bauzeitung. Wien 1881. Fol. auch separat.

cale conjugirte Richtungen, der Druck für ein Linienelement parallel der Oberfläche in der Tiefe y unter derselben ist $\gamma . y \cos \alpha$. Mit Hülfe der eben entwickelten Methode kann man dann leicht die Grösse und Richtung des Drucks für ein beliebiges Linienelement finden. Man kann übrigens, wie A. Francke*) gezeigt hat, die hier entwickelte Methode anwenden, um auf graphischem Wege die Druckverteilung in einem von zwei geneigten Ebenen begrenzten Erdkörper wenigstens angenähert zu bestimmen. Es ist das um so wesentlicher, als man meines Wissens auf analytischem Wege noch nicht zur Lösung dieser Aufgabe gelangt ist.

§ 17. Schon Rankine hat die im vorhergehenden Abschnitt behandelte Druckverteilung im unbegrenzten Erdreich dazu benutzt, um den Druck gegen Stützmauern zu bestimmen.

Man denke sich (Fig. 9) das Erdreich, welches oben durch eine Ebene begrenzt ist, deren Spur in der Zeichenebene LM sein möge, durch eine Linie AB in zwei Teile zerlegt. Die beiden Teile des Erdreichs üben dann einen gewissen Druck auf einander aus. Man denke sich nun den einen Teil des Erdreichs entfernt und durch eine Mauer ersetzt, welche den eben erwähnten Druck auszuhalten vermag, ohne zerstört oder bewegt zu werden. Es ist klar, dass das Gleichgewicht aufrecht erhalten bleibt, und dass man also haltbare Mauern erhält, indem man mit Rankine den Druck der Erde so annimmt, wie es die für das unbegrenzte Erdreich entwickelte Theorie verlangt.

Dennoch führt dieses Verfahren zu Consequenzen, die entschieden befremdlich erscheinen. Man fasse, um das zu erkennen, die beiden Fälle ins Auge, dass die Geländefläche unter dem Winkel α ansteigt und unter demselben Winkel fällt. Nach der Theorie des unbegrenzten Erdreichs muss in beiden Fällen der Druck parallel der Oberfläche sein und dieselbe Grösse haben.

Bei derselben Mauerstärke ist also bei fallendem Gelände das Moment in Bezug auf die vordere Kante des Mauerfusses grösser als bei steigendem Erdreich. Es würde sich also bei gleicher Anforderung an die Stabilität nach dieser Theorie bei einem fallenden Erdreich eine grössere Mauerstärke ergeben, als wenn das Erdreich unter demselben Winkel anstiege.

Das widerspricht nun aller Erfahrung und zeigt also, dass die für

---

*) Adolf Francke, Die inneren Kräfte eines durch Ebenen begrenzten Erdkörpers nebst Anwendung auf die Ermittelung des Druckes gegen Stütz- und Druckwände. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover XXXIV, 1888.

das unbegrenzte Erdreich ermittelte Druckverteilung höchstens innerhalb gewisser Grenzen mit derjenigen Druckverteilung übereinstimmt, welche im Grenzfalle des Gleichgewichts in dem Erdreich hinter einer Mauer herrscht. Deshalb wird in neuerer Zeit die Theorie des unbegrenzten Erdreichs nur unter gewissen Voraussetzungen bei der Bestimmung von Mauerstärken angewendet.

So will z. B. Mohr dieselbe nur so lange benutzen, als die Linie, welche man in der Richtung des grössten Hauptdrucks durch die hintere Kante des Mauerfusses ziehen kann, die Geländefläche trifft, nachdem sie durch das Innere des Erdreichs gegangen ist, bei verticaler Hinterseite der Mauer z. B. also nur dann, wenn das Gelände ansteigt, und bei horizontalem Gelände nur dann, wenn die Hinterseite der Mauer nach vorn ansteigt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so greift er auf die Coulomb'sche Theorie zurück, indem er im Interesse eines continuirlichen Ueberganges den Druck senkrecht zur Mauerfläche annimmt.

J. J. Weyrauch meint, dass die Anwendbarkeit der in Frage stehenden Theorie sich bisher nur dann streng beweisen lasse, wenn die Richtungslinien beider Hauptdrucke für jeden Punkt der Wand die Geländelinie im Innern des Erdkörpers treffen.

Winkler, M. Lévy, de Saint-Venant, Boussinesq u. a. m. wollen die moderne Erddrucktheorie nur dann anwenden, wenn die Druckneigung zur Normale der Wand gerade gleich dem Reibungswinkel von Sand auf Mauerwerk oder — bei hinreichend rauher Wand — gleich dem Böschungswinkel des Sandes ist, bei jeder Neigung des Geländes also nur für eine ganz bestimmte Neigung der hinteren Mauerseite.

Für diesen einen Fall führt aber das Coulomb'sche Princip zu demselben Resultat; deshalb wendet Winkler auch für den allgemeinen Fall die auf der Voraussetzung ebener Gleitflächen beruhende Theorie an.

De Saint-Venant*) und Boussinesq**) betrachten das Resultat

*) De Saint-Venant, Sur une détermination rationnelle par approximation de la poussée des terres dépourvus de cohésion contre un mur de soutènement. C. R. LXX, 228—235, 281—286. 1870.

— —, Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur. C. R. LXX, 717—724. 1870.

— —, Une évaluation ou exacte ou très approché de la poussée des terres sablonneuses contre un mur destiné à les soutenir. C. R. IIC, 850—852. 1884.

**) Boussinesq, Intégration de l'équation differentielle qui peut donner

der Rankine'schen Theorie als eine Annäherung an den wirklichen Sachverhalt, und suchen die wirkliche Druckverteilung zu bestimmen, indem sie zu den von dieser Theorie gelieferten Druckkräften Zusatzglieder hinzufügen. Setzt man nun die so verbesserten Ausdrücke in die Gleichungen (1) ein, so fallen alle diejenigen Glieder fort, welche von der Verbesserung unabhängig sind. Entwickelt man in der für das Erdreich charakteristischen Gleichung (2) nach Potenzen der Zusatzglieder, so fällt das von letzteren freie Glied ebenfalls fort. Unterdrückt man nun in der Voraussetzung, dass die Zusatzglieder hinreichend klein sind, die Ausdrücke zweiter Ordnung, so bleibt eine homogene lineare Gleichung zwischen den gesuchten Grössen übrig. In Folge der erst erwähnten Differentialgleichungen sind die drei gesuchten Grössen die drei zweiten Ableitungen derselben Function nach den Coordinaten, und die dritte Gleichung geht über in eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten. Grenzbedingungen liefert nun zunächst der Umstand, dass an der Oberfläche die Druckcomponenten und damit auch die Zusatzglieder gleich Null sein müssen. Es ergiebt sich hieraus, dass in dem Teil des Erdreichs zwischen der Geländelinie und der durch das obere Ende der begrenzenden Wand gezogenen Linie grösster Druckneigung die Zusatzglieder sämtlich gleich Null sind. Hieraus folgt, dass die Verbesserung nicht anzubringen ist, so lange die beiden durch einen Punkt der Wand gehenden Linien grösster Druckneigung das Gelände im Innern des Erdkörpers treffen. Wenn aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, erhält man die vollständige Bestimmung der Zusatzglieder aus der Bedingung, dass an der Wand die Druckneigung gleich dem Böschungswinkel von Sand auf Mauerwerk sein soll. Die Druckverteilung in einem oberen, von der vorerwähnten Linie begrenz-

---

une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée des terres. C. R. LXX, 751—754. 1870.

— —, Sur la poussée d'une masse de sable contre une paroi verticale ou inclinée. C. R. IIC, 667—670. 1884.

— —, Sur la poussée d'une masse de sable à surface supérieure horizontale contre un paroi vertical dans le voisinage de laquelle son angle de frottement est supposé croître légèrement d'après une certaine loi. C. R. IIC, 720—723. 1884.

— —, Calcul approché de la poussée et de la surface de rupture dans un terreplein horizontal homogène contenu par un mur vertical. C. R. IIC, 790 bis 793.

— —, Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion, p. 112 ff. Bruxelles 1876. 4°.

ten Keile bleibt auch in diesem Falle ungeändert; im unteren Teile tritt eine Aenderung der Druckverteilung ein, welche eine Krümmung der Gleitlinien bedingt.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass Herr Boussinesq untersucht, welchen Einfluss die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in der für den Sand charakteristischen Gleichung hat. Strenge genommen genügen nämlich die verbesserten Ausdrücke für die Druckcomponenten nicht mehr dieser Gleichung für den Böschungswinkel φ, sondern einer Gleichung, in welcher an Stelle des Winkels φ ein anderer vom Orte abhängiger Winkel φ' auftritt, dessen Grenzen dadurch bedingt sind, dass

$$1 < \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\delta},$$

wo δ den Winkel bezeichnet, welchen die Wandrichtung mit der Trennungslinie der beiden verschiedenen Gebiete des mit Sand erfüllten Raumes einschliesst. Ist dieser Winkel nicht zu gross, so weicht die rechte Seite nur wenig von 1 ab (bei $\delta = \frac{\pi}{8}$ z. B. wird $\sec\delta = 1{,}082$), und deshalb ist der begangene Fehler nicht zu bedeutend.

Um ein Bild von dem Effekt der hier in Frage stehenden Verbesserung zu geben, führen wir an, dass der Druck nach Rankine bei verticaler Mauer und horizontalem Gelände

$$\tfrac{1}{2}\gamma h^2 \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

ist und senkrecht zur Mauer steht, während die Theorie von Boussinesq bei einem Reibungswinkel φ_1 von Sand auf Mauerwerk unter derselben Voraussetzung ergiebt

$$\tfrac{1}{2}\gamma h^2 \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\varphi_1 + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

§ 18. Ausser der für das unbegrenzte Erdreich geltenden Druckverteilung sind bisher nur sehr wenige Lösungen der für den Grenzfall geltenden Gleichungen bekannt. Die Kenntnis einer solchen verdanken wir wiederum Boussinesq*); sie lässt sich dem Fall anpassen, dass

*) J. Boussinesq, Sur les modes d'équilibre limite les plus simples que peut présenter un massif sans cohésion fortement comprimé. C. R. LXXX, 546—549. 1875.

— —, Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, p. 150 u. ff. Bruxelles 1876. 4°.

das Erdreich zwischen zwei sich schneidenden Ebenen so stark zusammengedrückt wird, dass man von dem Einfluss der Schwere auf die Druckverteilung absehen kann. Für den Fall, dass man den Einfluss des Eigengewichts vernachlässigen darf, erhält man noch eine andre Lösung der Frage stehenden Gleichungen, indem man setzt

$$X_x = f(\lambda x)e^{\lambda y}, \quad X_y = Y_x = -f'(\lambda x)e^{\lambda y}, \quad Y_y = f''(\lambda x)e^{\lambda y}$$

und dann $f(\xi)$ aus der Gleichung

$$(f''(\xi)+f(\xi))^2 \sin^2\varphi = (f''(\xi)-f(\xi))^2 + 4f'^2(\xi)$$

bestimmt. Die in Frage stehende Druckverteilung lässt sich dem Falle anpassen, dass sich Sand in einer von zwei rauhen und zwei glatten Wänden gebildeten Röhre mit rechteckigem Querschnitt befindet, die beiderseits durch Stempel geschlossen ist, auf welche in Richtung der Röhrenaxe die Kräfte P_0 und P_1 wirken. Sie kann also dazu dienen, von der Fortpflanzung von Druck durch Sandmassen eine Vorstellung zu geben. Wir wollen noch eine dritte Lösung der in Frage stehenden Gleichungen erwähnen, welche man als Verallgemeinerung der in § 16 behandelten Druckverteilung ansehen kann. Man genügt den Gleichungen nämlich, indem man setzt:

$$Y_y = \gamma y \cos\alpha + m, \quad Y_x = X_y = \gamma y \sin\alpha,$$

$$X_x = \frac{(\gamma y \cos\alpha + m)(1+\sin^2\varphi) - 2\sqrt{(m\sin\varphi + \gamma y \sin(\alpha+\varphi))(m\sin\varphi - \gamma y \sin(\alpha-\varphi))}}{\cos^2\varphi}.$$

Hier braucht nun α nicht mehr kleiner zu sein als φ, wenn nur y in gewissen Grenzen liegt, wenn nämlich

$$\frac{m\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} > y > -\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

ist. Für $\alpha = 1R$ stellen diese Formeln also die Druckverteilung in Erdreich dar, das sich zwischen verticalen Wänden befindet und in gewisser Weise belastet ist. Der Einfluss dieser Belastung wird sich in tieferen Schichten aller Erfahrung nach sehr wenig bemerkbar machen, und so dürften sich die genannten Formeln vielleicht dazu eignen, den Druck von Erdreich gegen hohe, benachbarte Wände zu bestimmen.

Zu interessanten Betrachtungen, wenn auch nicht zu einer Lösung der Gleichungen für den Grenzfall des Gleichgewichts hat die Beschäftigung mit einer wichtigen Aufgabe der Technik geführt. Es handelt sich um die Bestimmung der Tragfähigkeit von Pfeilern, Grundmauern und ähnlichen Anlagen, die bis zu einer gewissen Tiefe in das Erdreich hinein gehen. Die ersten Untersuchungen nach dieser Richtung reichen

ziemlich weit zurück. Sie rühren von Lambert*) her und tragen einen wesentlich empirischen Charakter. Die Belastung ergiebt sich proportional der belasteten Fläche und proportional der Eintauchung. Stellt man sich, wie es neuerdings üblich geworden ist, vor, dass die Belastung durch eine Sandschicht hervorgerufen wird, so kann man sagen, die Belastungshöhe H ist proportional der Eintauchung h. Ein allerdings erst in neuester Zeit veröffentlichter Versuch, die Frage theoretisch zu behandeln, ist zu Anfang der funfziger Jahre unseres Jahrhunderts von dem russischen Obersten Pauker**) gemacht worden. Dieser Versuch beruht auf einer von grossem Geschick zeugenden Anwendung des Coulomb'schen Princips für passiven und activen Erddruck und führt zu dem Resultat, dass die Belastungshöhe

$$H = h \operatorname{tg}^4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

ist. Zu demselben Resultat gelangte wenig später Rankine***) mit Hülfe der von ihm begründeten Theorie des Erddrucks.

Den Gleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \gamma$$

genügt man offenbar, indem man setzt:

$$Y_y = \gamma(y + f(x)), \quad X_y = Y_y = 0, \quad X_x = \gamma g(y),$$

sodass also die Hauptdrucke hier überall parallel den Coordinatenaxen sind. Wenn nun nirgends die Druckneigung den natürlichen Böschungswinkel übertreffen soll, so muss überall die Beziehung:

$$(y + f(x)) \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \geqq g(y) \geqq (y + f(x)) \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}$$

gelten. Das ist dann und nur dann möglich, wenn zwischen dem Maximum H von f(x) und dem Minimum h derselben Function die Beziehung besteht

$$(y + h) \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \geqq (y + H) \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

---

*) Lambert, Sur la fluidité du sable, de la terre et d'autres corps mous relativement aux lois de l'hydrodynamique. Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin. Année 1772. p. 33—64. Berlin 1774. 4°.

**) Pauker, Erklärender Bericht zum Project einer Seebatterie zu Cronstadt. Journal des (russischen) Ministeriums der Verkehrsanstalten. Septemberheft 1889.

***) Rankine, A manual of applied mechanics. London 1861.

und das wiederum ist für alle positiven Werte y erfüllt, wenn

$$h\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right) \geqq H \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

ist. Die Function f(x) ist hier die Belastung der Linie $y = 0$; stellt man sich nun vor, dass in einem Teile diese Belastung durch eine Sandüberschüttung von der Höhe h gebildet wird, so ist die höchste zulässige Belastungshöhe für einen Pfeiler bei der hier angenommenen Druckverteilung

$$H = h\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^2 = h\,\mathrm{tg}^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ebenso erhält man unter denselben Voraussetzungen über die Form der Druckverteilung als kleinste zulässige Belastungshöhe

$$H' = h\,\mathrm{tg}^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für jede innerhalb dieser Grenzen liegende Belastungshöhe herrscht offenbar Gleichgewicht, weil sich ja sicher eine Druckverteilung finden lässt, welche allen in Frage kommenden Bedingungen genügt. Deshalb wird ein nach der Rankine'schen Formel berechneter Pfeiler, vorausgesetzt dass unsere Anschauungen über die physikalische Natur des Sandes richtig sind, unter allen Umständen im Gleichgewicht sein. Eine andre Frage ist aber die, ob nicht auch noch für Belastungen ausserhalb der in Frage stehenden Grenzen Gleichgewicht möglich ist, d. h. ob sich Druckverteilungen finden lassen, welche allen Bedingungen genügen. Ja es ist sogar im höchsten Masse wahrscheinlich, dass man zu erheblich weiteren Grenzen für die zulässigen Belastungen gelangen wird, indem man die Beschränkung fallen lässt, welche sich Rankine durch die Annahme einer speciellen Form der Druckverteilung auferlegt.

Auch die Erfahrung lehrt, dass Pfeiler erheblich stärker belastet werden dürfen, als es nach der Rankine'schen Formel für den oberen Grenzwert der Belastungshöhe scheinen möchte. Diesem der Erfahrung entsprechenden Grenzwert der Belastungshöhe suchte in neuester Zeit Jankowski*), ein russischer Ingenieur und Professor, durch ein Verfahren

---

*) Platon Jankowski, Widerstand der Gründungen. Journal d. Minist. der Verkehrsanstalten. Jan., Febr. u. Dec. 1889. (Russisch.) Vgl. F. d. M. XXI (1889), S. 888.

— —, Résistance des terrains sablonneux aux charges verticales. Rapport par M. H. Vallot. Mém. de la société des ingénieurs civils. 1892. Heft 11, p. 848—851.

— —, Étude sur la résistance des terrains sablonneux aux charges verticales. Mém. de la société des ing. civ. 1892. Heft 11, p. 937—955.

näher zu kommen, welches sich — allerdings mit wesentlichen Modificationen — eng an die vorerwähnte Methode von Pauker anschliesst.

Wenn sich der belastete Pfeiler senkt, wird der unter dem Pfeiler liegende Sand abwärts geschoben, während die dem eingetauchten Körper benachbarten unbelasteten Teile in die Höhe getrieben werden. Die Gleitlinien, oder die Linien grösster Druckneigung, werden hier also gekrümmte Linien sein, welche von einem Punkte der Pfeilerbasis aus zunächst nach unten gehen und, nachdem sie sich nach oben gekrümmt haben, die unbelastete Sandfläche treffen. Eine solche stetig gekrümmte Gleitlinie ersetzt Jankowski durch zwei gerade Linien, welche sich in der Tiefe z unter einem Endpunkte der Basis schneiden. Diese Linie z wird also seitens des unter dem Pfeiler liegenden Erdreichs einen Druck erfahren, wie ihn eine Mauer durch den activen Erddruck erfährt. Von der äusseren Seite wird hingegen ein Druck wirken, wie er sich äussert, wenn eine Mauer auf dem Sprunge steht, in das Erdreich getrieben zu werden. Während nun Pauker angenommen hatte, dass beide zu der Trennungslinie senkrecht stehen, nimmt Jankowski an, dass der Druck gegen die Normale dieser Linie unter dem Böschungswinkel φ geneigt sei, und zwar so, dass die erst bezeichnete Kraft von oben nach unten, die andere also von unten nach oben gerichtet ist. Nun wird der passive Druck R und der active Druck S nach dem Coulomb'schen Princip berechnet. Die Bedingung dafür, dass das unbelastete Erdreich nicht verdrängt werde, ist dann offenbar:

$$R - S \geqq 0.$$

Die linke Seite ist eine Function von z, welche nach dem eben Gesagten so beschaffen sein muss, dass das Minimum derselben noch positiv ist. Die Ausführung der fraglichen Rechnung führt zu folgender Grenze für die Belastungshöhe:

$$H = h\,\frac{1+\sqrt{1-k}}{k}, \quad \text{wo} \quad k = \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{45-\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{45+\varphi}{2}}\right)^2$$

ist. Die Grösse k nimmt sehr rasch von ihrem Werte 1 für $\varphi = 0$ aus ab, und man wird deshalb kürzer schreiben können:

$$H = 2h\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{45+\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{45-\varphi}{2}}\right)^2.$$

Bei der Theorie von Jankowski ergiebt sich ferner, dass nicht jede

Breite in beliebiger Weise belastet werden darf. Es muss vielmehr bei einer Belastungshöhe H′ die Breite mindestens den Wert

$$\frac{H'k-h}{1-k}\,\frac{\cos\varphi}{2\cos\frac{45-\varphi}{2}\sin\frac{45+\varphi}{2}}$$

haben. Mit Benutzung der oben angegebenen Grenze der Belastungshöhe ergiebt sich die zugehörige untere Grenze der Breite auf

$$\frac{h}{\sqrt{1-k}}\,\frac{\cos\varphi}{2\cos\frac{45-\varphi}{2}\sin\frac{45+\varphi}{2}}$$

oder kürzer

$$h\,\frac{\cos\varphi}{2\cos\frac{45-\varphi}{2}\sin\frac{45+\varphi}{2}}.$$

Schon Jankowski selbst hat auf einen Mangel der von ihm entwickelten Theorie hingewiesen, indem er hervorhebt, dass die Momentengleichung unberücksichtigt geblieben ist. Uns scheint dieser Fehler nicht der einzige zu sein, welcher seiner Entwickelung anhaftet. So ist zunächst gar nicht ohne weiteres einzusehen, warum in einem Grenzfalle des Gleichgewichts gerade eine durch den Endpunkt der Pfeilerbasis gehende Verticale eine Linie grösster Druckneigung sein soll. Es soll zugegeben werden, dass die Formel von Jankowski bei einem Winkel φ von $33^0\ 32'$ dem wahren Sachverhalt viel mehr entspricht als die Rankine-Pauker'sche Formel, von denen die erstere für H den Wert 132,6 h liefert, während die andere 12,03 h giebt. Trotzdem kann der Formel von Rankine ein Vorzug vor der neueren nicht abgestritten werden; bei der ersteren weiss man genau, auf welcher Seite der Fehler liegt, während das bei der Formel von Jankowski nicht der Fall. Da man nun bei Constructionen praktischer Natur die Beanspruchungsfähigkeit der einzelnen Teile ohnedies nicht völlig ausnützt, dürfte es sich empfehlen, die ältere Formel für praktische Zwecke beizubehalten. Ferner widerspricht die Formel von Jankowski einem ganz fundamentalen Prinzip. Es ist klar, dass ein System, welches unter Voraussetzung einer gewissen Reibung im Gleichgewicht ist, für jede stärkere Reibung erst recht im Gleichgewicht sein wird. Demzufolge müsste H eine mit φ stetig wachsende Function sein. Diese Bedingung erfüllt der Ausdruck von Pauker und Rankine. Hingegen nimmt der Ausdruck von Jankowski nur bis $\varphi = 45^0$ zu, wo er im Widerspruch zu jeder rationellen Vorstellung den Wert ∞ annimmt, und nimmt von dort aus wieder ab.

§ 19. In theoretischer Beziehung besitzt die Rankine'sche Methode, die im vorhergehenden Abschnitt besprochene Aufgabe zu behandeln, einen besonderen Wert insofern, als sie auf den Weg hinweist, auf welchem die strenge Lösung zu suchen ist. Ja indem sie dies thut, führt sie dann auch weiter zu einer von der bisherigen abweichenden Fassung der Erddruckprobleme überhaupt.

Rankine griff, wie wir gezeigt, aus der Gesamtheit derjenigen Grössensysteme, welche die Bedingungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \gamma,$$

$$(X_x + Y_y)^2 \sin^2\varphi \geqq (X_x - Y_y)^2 + 4\, X_y Y_x,$$

$$X_y = Y_x$$

mit der Massgabe befriedigen, dass an der freien Oberfläche des Sandes $Y_y = 0$ und $Y_x = 0$ sein solle, eine besondere Gruppe heraus und bestimmte dann innerhalb dieser Gruppe die beiden Wertsysteme, welche die Verticalcomponente des gegen den Pfeiler ausgeübten Druckes zu einem Maximum und zu einem Minimum machen. So gelangt er zu zwei Werten, von denen feststeht, dass Gleichgewicht herrscht, sobald die Belastung innerhalb derselben liegt. Will man nun die wirklichen Grenzen der zulässigen Belastungen haben, so darf man sich natürlich nicht auf die von Rankine herausgegriffene Gruppe von Lösungen beschränken, sondern muss aus der Gesamtheit von Grössensystemen, X_x, $X_y = Y_x$, Y_y, diejenigen herauslesen, welche mit Rücksicht auf die angeführten Bedingungen die Verticalcomponente des Druckes gegen den Pfeiler, d. h. das über den eingetauchten Rand desselben erstreckte Integral

$$\int (Y_y \cos(n\,y) + Y_x \cos(n\,x))\, ds$$

zu einem Maximum und zu einem Minimum machen. So stellt sich denn die in Frage stehende Aufgabe als eine Aufgabe der Variationsrechnung heraus.

Dass die vorliegende Aufgabe nicht die einzige ist, welche sich als Aufgabe der Variationsrechnung betrachten lässt, das erkennt man sofort, wenn man einige der Aufgaben ins Auge fasst, welche bisher sei es auf theoretischem, sei es auf experimentellem Wege in Angriff genommen wurden. Dahin gehört zum Beispiel die Aufgabe, den Druck zu bestimmen, welchen Sand auf den Verschluss in dem Boden eines Gefässes ausübt.

Man denke sich (Fig. 1c) ein kastenförmiges Gefäss $ABB'A'$, in dessen Boden sich eine spaltförmige Oeffnung CC' befindet. Von den Rändern C und

C′ dieser Oeffnung mögen zwei Ebenen CD und CD′ vertical nach unten gehen, so dass sich zwischen ihnen der Verschluss CEE′C′ der Oeffnung bewegen kann. Wenn nun der Kasten mit Sand gefüllt ist, so wird derselbe auf den Stempel einen Druck ausüben. Soll letzterer in Ruhe bleiben, so muss gegen den Stempel noch eine nach oben gerichtete Kraft P wirken. Ist diese zu klein, so giebt der Stempel nach; ist sie zu gross, so wird der Stempel in das Innere der Sandmasse getrieben. Man erhält die Grenzen offenbar, indem man die Druckverteilungen sucht, bei welchen das über die Oeffnung erstreckte Integral

$$\int Y_y \, ds$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Es muss zugegeben werden, dass diese Aufgabe ausserordentlich schwierig, wenn nicht unlösbar erscheint, und doch hat diese Fassung der Aufgabe eine gewisse Bedeutung für die Einsicht in die Druckverhältnisse. Unterzieht man nämlich, wie es Rankine in seiner Behandlung der Mauerpfeiler gethan hat, statt aller möglichen Druckverteilungen nur eine gewisse Gruppe derselben einer Betrachtung, so erhält man in dem Minimum P_0 einen Druck, welcher den Stempel gegen das Erdreich sicher in Gleichgewicht hält, und in dem Maximum P_1 einen Druck, welcher den Stempel auf keinen Fall in das Erdreich hineintreibt. Nun lässt sich aber diese Gruppe von Druckverteilung so wählen, dass P_0 sich mit wachsender Höhe der Sandschicht asymptotisch einer endlichen Grenze nähert, während P_1 viel stärker ansteigt als die erste Potenz der Sandhöhe, was dann natürlich a fortiori auch von den wirklichen Grenzwerten gilt. Dadurch sind zwei Thatsachen mit der Theorie des Erddrucks in Einklang gebracht, welche einer Erklärung bisher widerstanden haben, nämlich die beim Bau von Tunneln beobachtete Thatsache, dass der active Erddruck in tiefen Schichten lange nicht den beträchtlichen Wert hat, welchen man nach der Höhe erwarten sollte, und die bei der Anlage von Erdankern verwertete Thatsache, dass der passive Erddruck das entgegengesetzte Verhalten zeigt. Hagen*) hat zwar schon im Jahre 1833 für den Bodendruck von Sand in Röhren eine Formel abgeleitet, welche, wenn die Höhe über eine gewisse endliche Grenze steigt, einen von letzterer unabhängigen Wert liefert. Aber einmal bedient er sich gewisser Voraussetzungen und Annahmen, die nicht bewiesen werden,

*) Untersuchung über den Druck und die Reibung des Sandes § 5. Poggendorff Annalen XXVIII, 316 ff.

und zweitens begeht er einen Fehler, der den gewöhnlichsten Prinzipien der Mechanik widerspricht. Gerade diesen Fehler hat nun Forchheimer*) direct in seine Bestimmung des Bodendrucks übernommen, so dass diese Ableitung ebenfalls nicht befriedigen kann. Auch die Methode von Fr. Engesser**) für die Bestimmung des Drucks gegen innere Stützwände kann vor einer strengen Prüfung nicht bestehen. Ausser diesen Versuchen ist nur noch ein einziger gemacht worden, den Druck in tiefen Erdschichten theoretisch zu bestimmen, und zwar von Ritter***). Da jedoch dieser Autor sich gezwungen sieht, der Betrachtung ganz andere Hypothesen zu Grunde zu legen, als auch er für die Bestimmung des Seitendrucks benutzt, so kann dieser Versuch, so interessant er an sich ist, hier nicht weiter in Frage kommen.

Eine dritte Aufgabe, bei welcher man unmittelbar dazu gelangt, sie als Aufgabe der Variationsrechnung zu fassen, bietet eine Anordnung dar, welche vielfach zur experimentellen Bestimmung des Seitendrucks angewendet worden ist. Man stelle sich ein kastenförmiges Gefäss vor, dessen eine verticale Seite um eine horizontale, dieser Wand parallele Axe drehbar ist. Füllt man diesen Kasten mit Sand, so wird man auf die drehbare Wand eine Kraft ausüben müssen, damit dieselbe in Ruhe bleibe. Bestimmt man nun durch den Versuch die Grenzen dieser Kraft, bei welchen die Wand anfängt, sich in dem einen oder anderen Sinne zu drehen, so erhält man direct das auf die Drehaxe bezogene Moment des Druckes, welchen der Sand in den beiden Grenzfällen auf die Wand ausübt.

Gesetzt, man hätte wieder eine Druckverteilung gefunden, welche den mehrerwähnten für das Innere der Sandmasse gültigen Beziehungen genügt, welche ferner so beschaffen ist, dass für die Elemente der freien Oberfläche des Sandes die Componenten gleich Null sind, und dass an den starren Wänden die Druckneigung nirgends die durch die Rauhigkeit derselben bedingten Grenzen überschreitet, so könnte man durch eine Integration das Moment finden, welches bei der in Frage stehenden Verteilung der Druck des Sandes gegen die bewegliche Wand bezüglich der Drehaxe hat. Wenn nun das Moment der ausser dem Erddruck auf die Wand wirkenden Kräfte gerade gleich und entgegengesetzt dem erwähnten

---

*) Philipp Forchheimer, Ueber den Sanddruck und Bewegungserscheinungen im Innern trockenen Sandes. Tübinger Dissertation p. 18 ff. Aachen. 1883. 8⁰.

**) W. Ritter, Statik der Tunnelgewölbe. Berlin 1879. 8⁰.

***) Fr. Engesser, Ueber den Erddruck gegen innere Stützwände. Deutsche Bauztg. XVI. 1882. S. 91—93.

Integrale ist, so ist die Wand offenbar im Gleichgewicht. Lässt sich aber umgekehrt von einer Kraft nachweisen, dass es keine Druckverteilung giebt, für welche das in Frage stehende Integral gerade gleich und entgegengesetzt dem Moment der Kraft ist, so ist bei dieser Kraft Gleichgewicht nicht möglich. Damit eine Kraft die drehbare Wand gegen den Erddruck im Gleichgewicht halte, ist also erforderlich, dass das Moment derselben bezüglich der Drehaxe innerhalb zweier Grenzen liege, welche man erhält, indem man unter allen zulässigen Druckverteilungen diejenigen aufsucht, bei welchen das obige Integral ein Maximum oder ein Minimum wird.

Bei den bisher besprochenen Aufgaben war es deshalb leicht, die Maximumsaufgabe zu formuliren, weil die beweglichen Grenzen eine Freiheit ersten Grades aufwiesen und man demnach als Bedingung des Gleichgewichts der an den beweglichen Grenzen angreifenden Kräfte nur eine Gleichung hatte. Wie man zu verfahren hat, wenn mehr als eine unbekannte Grösse in Frage kommen, wollen wir an einem Beispiel zeigen, das sich von dem soeben besprochenen nur dadurch unterscheidet, dass die Wand ganz frei beweglich gedacht ist.

Wenn eine Kraft oder ein System von Kräften die Wand gegen den Erddruck im Gleichgewicht halten sollen, so muss sich offenbar eine allen Bedingungen genügende Druckverteilung finden lassen, für welche das Moment des Erddruckes nicht nur für eine Axe, sondern für alle möglichen Axen gleich und entgegengesetzt dem Moment der andern auf die Wand wirkenden Kräfte ist. Nennen wir M das Moment dieser letztern Kräfte in Bezug auf den Anfangspunkt O eines Coordinatensystemes, X und Y ihre Componentensummen in Richtung der Axen desselben, so ist für einen Punkt mit den Coordinaten (a, b) das Moment

$$M + Ya - Xb.$$

Das Moment des Erddrucks bei irgend einer beliebigen Druckverteilung wird in zwei bestimmten Grenzen liegen müssen, die nach Lösung der vorher besprochenen Aufgabe bekannte Functionen von a und b sein werden. Nennen wir die untere Grenze $-M(a, b)_1$ die obere $-M(a, b)_0$, so muss, wenn überhaupt Gleichgewicht möglich sein soll,

$$M(a, b)_0 \leqq M + Ya - Xb \leqq M(a, b)_1$$

sein. Wenn diese Bedingung nun für alle möglichen Werte (a, b) erfüllt ist, dann hält, wie gezeigt werden soll, das durch (X, Y, M) dargestellte Kraftsystem die Wand gegen den Erddruck wirklich in Gleichgewicht.

Wenn nämlich (M, X, Y) die Wand nicht gegen den Erddruck in Gleichgewicht hält, so wird eine Bewegung derselben eintreten. Diese

Bewegung wird nun in jedem Zeitpunkt betrachtet werden können als eine Drehung um irgend einen Punkt; α, β mögen die Coordinaten des Drehungsmittelpunktes für den Anfang der Bewegung sein. Für den Beginn der Bewegung wird nun nichts geändert werden, wenn man die Beweglichkeit der Wand so einschränkt, dass sie sich nur um diesen Punkt drehen kann, dass also die wirklich eintretende Bewegung auch die einzig mögliche ist. Dann erkennt man aber unmittelbar, dass, wenn bei einem Kraftsystem (M, X, Y) die in Frage stehende Bewegung eintritt, der Ausdruck $M+Y\alpha-X\beta$ ausserhalb der durch $M(\alpha, \beta)_0$ und $M(\alpha, \beta)_1$ dargestellten Grenzen liegen muss.

Wenn nun ein Kraftsystem für alle möglichen Werte (a, b) die Bedingung

$$M(a, b)_0 \leqq M+Ya-Xb \leqq M(a, b)_1$$

erfüllt, so giebt es keinen Punkt (α, β), für welchen $M+Y\alpha-X\beta$ ausserhalb der Grenzen $M(\alpha, \beta)_0$, $M(\alpha, \beta)_1$ liegt. Nach dem Gesagten kann also keine Bewegung eintreten, oder das Kraftsystem hält die Wand gegen den Erddruck im Gleichgewicht.

Die angegebene Bedingung des Gleichgewichts lässt sich nun sehr leicht interpretiren, wenn wir uns einer geometrischen Darstellung bedienen. Betrachten wir die Grössen X, Y, M als die Coordinaten eines Punktes im Raum, so wird der Gesamtheit aller Kraftsysteme der dreidimensionale Raum entsprechen. Die oben angegebene Bedingung bedeutet für ein festgehaltenes Wertepaar ab nun offenbar, dass der Punkt (X, Y, M) innerhalb eines gewissen von zwei parallelen Ebenen begrenzten Gebietes liegen muss. Wenn nun die obige Bedingung für alle möglichen Wertepaare (a, b) erfüllt sein soll, so heisst das, die geometrische Darstellung des Systems (X, Y, M) muss innerhalb desjenigen Teiles des Raumes liegen, welcher allen soeben gekennzeichneten Gebieten angehört.

Wenn es sich um einen Grenzfall handelt, so wird für ein Paar (ab)

$$M+Ya-Xb = M(a, b)_1 \quad \text{oder} \quad M+Ya-Xb = M(a, b)_0,$$

während für jedes andre Wertepaar $a+h$, $b+k$

$$M+Y(a+h)-X(b+k)-M(a+h, b+k)_1 \leqq 0,$$
$$\text{resp.} \quad M+Y(a+h)-X(b+k)-M(a+h, b+k)_0 \geqq 0$$

ist, woraus dann folgt:

$$Y = \frac{\partial M(a, b)_1}{\partial a}, \quad X = -\frac{\partial M(a, b)_1}{\partial b},$$

$$M = M(a, b)_1 - a\frac{\partial M(a, b)_1}{\partial a} - b\frac{\partial M(a, b)_1}{\partial b},$$

resp.

$$Y = \frac{\partial M(a,b)_0}{\partial a}, \quad X = -\frac{\partial M(a,b)_0}{\partial b},$$

$$M = M(a,b)_0 - a\frac{\partial M(a,b)_0}{\partial a} - b\frac{\partial M(a,b)_0}{\partial b}.$$

Eliminirt man nun a und b, so erhält man die Gleichungen

$$M = \Phi(X,Y)_0, \quad M = \Phi(X,Y)_1$$

derjenigen Oberflächen, welche den Raum der Gleichgewichtssysteme einschliessen.

Wenn nun ein Kraftsystem derart stetig geändert wird, dass seine geometrische Darstellung von einem der Oberfläche sehr nahen Punkte im Innern durch einen Punkt (X, Y, M) zu einem nahen Punkte des äusseren Raumes übergeht, so wird die Wand anfangen sich zu bewegen, und zwar wird sie sich zunächst um einen Punkt (a, b) drehen, dessen Coordinaten offenbar entweder den Bedingungen

$$X = -\frac{\partial M(a,b)_0}{\partial b}, \quad Y = \frac{\partial M(a,b)_0}{\partial a},$$

$$M = M(a,b)_0 - a\frac{\partial M(a,b)_0}{\partial a} - b\frac{\partial M(a,b)_0}{\partial b}$$

oder den Gleichungen

$$X = -\frac{\partial M(a,b)_1}{\partial b}, \quad Y = \frac{\partial M(a,b)_1}{\partial a},$$

$$M = M(a,b)_1 - a\frac{\partial M(a,b)_1}{\partial a} - b\frac{\partial M(a,b)_1}{\partial b}$$

genügen. Im ersten Fall hat man die Gleichung:

$$M + aY - bX = M(a,b)_0, \quad \text{im andern} \quad M + aY - bX = M(a,b)_1.$$

Gehen wir nun zu irgend einem benachbarten Grenzfall über, d. h. differentiiren wir, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung:

$$0 = dM + a\,dY - b\,dX + \left(Y - \frac{\partial M(a,b)_0}{\partial a}\right)da + \left(X + \frac{\partial M(a,b)_0}{\partial b}\right)db,$$

und das reducirt sich auf

$$dM + a\,dY - b\,dX = 0.$$

Dieselbe Gleichung ergiebt sich auch aus den Grenzfällen der andern Art. Demnach erhalten wir den Drehpunkt vermöge der Gleichungen:

$$a = -\frac{\partial M}{\partial Y}, \quad b = \frac{\partial M}{\partial X}.$$

§ 20. So lange sich die Erddrucktheorie auf den Fall von zwei Dimensionen beschränkt, hat man es im wesentlichen mit drei zu be-

stimmenden Druckcomponenten zu thun, zwischen denen erstlich zwei für jede Substanz gültige Gleichungen bestehen und zweitens eine für das Gleichgewicht des Sandes charakteristische Bedingung. Befindet sich die ganze Sandmasse im Grenzzustande des Gleichgewichtes, so geht auch diese letztere Bedingung in eine Gleichung über, und man hat wenigstens ebenso viel Gleichungen wie zu bestimmende Grössen. Natürlich ist die Druckverteilung dadurch noch nicht völlig bestimmt, sondern es müssen weitere Grenzbedingungen hinzutreten, welche nach der Natur des besonderen Falles zu formuliren sind. Ja es erscheint zweifelhaft, ob durch die Hinzunahme dieser Grenzbedingungen die Lösung eines solchen Problems eindeutig bestimmt ist.

Diese Schwierigkeiten steigern sich noch, wenn die Erddrucktheorie auf ein Gebiet von drei Dimensionen ausgedehnt werden soll. Im Gebiet von drei Dimensionen hat man es nämlich mit sechs zu bestimmenden Druckcomponenten

$$X_x, \qquad Y_y, \qquad Z_z,$$
$$Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y$$

zu thun, zwischen denen drei von dem physikalischen Charakter des Sandes unabhängige Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = X, \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = Y, \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = Z \end{cases}$$

bestehen. Dazu kommt nun für den Sand die Bedingung, dass für kein Flächenelement die Neigung des Druckes zur Normale den Böschungswinkel übersteigt oder, anders gesprochen, dass der grösste Hauptdruck im Verhältnis zum kleinsten nirgends grösser als $\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ ist. Selbst im Grenzfalle des Gleichgewichts giebt diese Bedingung, falls man nicht die immerhin doch willkürliche Annahme machen will, dass zwei der Hauptdrucke einander gleich werden, nur eine Gleichung oder höchstens, falls man die erwähnte Annahme zulässt, zwei Gleichungen. Man hat also auf jeden Fall mehr unbekannte Functionen der Coordinaten, als Gleichungen vorliegen, sodass hier die Lösung des Problems sicher unbestimmt bleibt, auch wenn man die für die Grenzen gültigen Beziehungen hinzunimmt.

Diese Unbestimmtheit verschwindet aber, wenn wir das Problem

wieder als ein solches der Variationsrechnung ansehen. Um das zu zeigen, wollen wir ein allgemeines Problem der Erddrucktheorie einer Betrachtung unterziehen.

Es sei gegeben eine Sandmasse, auf deren Teile gegebene äussere Kräfte wirken. Die Begrenzung derselben werde gebildet von freien Oberflächen, auf welche gegebene Druckkräfte wirken, von festen Grenzen und von beweglichen Grenzen, deren Gestalt von mehreren Parametern $p_1, p_2, \ldots, p_n$ abhängt. Es soll untersucht werden, welche Kräfte diese beweglichen Grenzen gegen den Druck der Erde im Gleichgewicht halten.

Man stelle sich vor, dass ein System von Druckkräften gefunden sei, welches erstlich den Differentialgleichungen (1) dieses Paragraphen, zweitens der für den Sand charakteristischen Bedingung bezüglich der Druckneigung genügt, welches ferner die für die freie Oberfläche gegebenen Druckkräfte liefert, und welches endlich so beschaffen ist, dass an den festen Grenzen die Neigung des Drucks gegen die Normale innerhalb der durch die Rauhigkeit bedingten Grenzen liegt. Durch ein Oberflächenintegral wird man dann die Arbeit finden können, welche die vom Sande auf die beweglichen Teile der Grenze ausgeübten Kräfte bei irgend einer virtuellen Veränderung dieser Grenzen leisten. Dieselbe möge sein

$$U_1 \delta p_1 + U_2 \delta p_2 + \cdots + U_n \delta p_n.$$

Sind nun die Kräfte, welche ausser dem Erddruck auf die beweglichen Wände wirken, so beschaffen, dass die von ihnen geleistete Arbeit für alle virtuellen Veränderungen entgegengesetzt gleich dem vorstehenden Ausdruck ist, so herrscht offenbar Gleichgewicht. Diese Arbeit möge nun sein

$$M_1 \delta p_1 + M_2 \delta p_2 + \cdots + M_n \delta p_n,$$

wo die Grössen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ offenbar von den Variationen der Parameter unabhängig sind.

Denkt man sich nun die Beweglichkeit der Grenzen so beschränkt, dass sie nur noch eine Freiheit ersten Grades behalten, und dass die Grössen δp_α sich in der Form $p'_\alpha \delta\tau$ darstellen, wo die Grössen p'_α bestimmte Grössen sind, so wird es eine Druckverteilung geben, bei welcher der Ausdruck $\Sigma U_\alpha p'_\alpha$ ein Maximum wird, und eine, bei welcher dieser Ausdruck kleiner wird als bei jeder anderen Druckverteilung. Das Maximum und das Minimum selbst werden dann Functionen der Grössen p'_1, $p'_2, \ldots, p'_n$ sein und zwar homogene, im allgemeinen nicht lineare Functionen ersten Grades; wir wollen sie $-M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_0$ und $-M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_1$ nennen. Die Bedingung, dass ein Kraftsystem die Wände bei der be-

schränkten Beweglichkeit im Gleichgewicht hält, ist dann offenbar:

$$(2)\qquad M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_0 \leqq \sum_{\alpha=1,2,\ldots,n} M_\alpha p'_\alpha \leqq M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_1.$$

Kehren wir nun zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, so erkennen wir, dass, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die eben aufgestellte Beziehung für alle möglichen Wertsysteme p'_1, p'_2, ..., p'_n erfüllt sein muss. Das ist nun für die Aufrechterhaltung des Gleichgewichts nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, kann man genau so verfahren, wie bei der am Schluss des vorhergehenden Paragraphen besprochenen Aufgabe. Wenn ein System von Kräften die beweglichen Teile der Grenzen nicht im Gleichgewicht hält, so wird irgend eine Bewegung eintreten. An dieser Bewegung wird nichts geändert, wenn wir die Beweglichkeit der Grenzen so beschränken, dass eben nur die eintretende Bewegung möglich ist. Die Variationen der p_α nach dieser Beschränkung mögen $p'_\alpha \delta\tau$ sein. Da nun das vorliegende Kraftsystem, welches durch die Grössen M_α charakterisirt ist, die beweglichen Grenzen nicht im Gleichgewicht hält, so giebt es keine Druckverteilung, für welche $-\Sigma U_\alpha p'_\alpha = \Sigma M_\alpha p'_\alpha$ ist, d. h. es liegt $\Sigma M_\alpha p'_\alpha$ ausserhalb der durch $M(p'_1, \ldots, p'_n)_0$ und $M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_1$ dargestellten Grenzen. Demnach giebt es, sobald kein Gleichgewicht stattfindet, mindestens ein Wertsystem p'_1, p'_2, ..., p'_n, für welches die Bedingung (2) nicht erfüllt ist.

Durch die Bedingung (2) wird für ein bestimmtes Wertsystem p'_1, p'_2, ..., p'_n aus der Mannigfaltigkeit n^{ter} Ordnung der Grössen M_1, ..., M_n ein von zwei parallelen ebenen Mannigfaltigkeiten $(n-1)^{ter}$ Ordnung begrenztes Gebiet ausgeschieden. Wenn nun ein System von Kräften die Sandmasse im Gleichgewicht hält, so müssen die zugehörigen Werte M_1, M_2, ..., M_n dem Bezirk angehören, welcher allen eben bezeichneten Gebieten gemeinschaftlich ist. Bei einem Grenzfalle muss es mindestens ein, bis auf einen gemeinschaftlichen Factor bestimmtes Wertsystem (p'_α) geben, für welches entweder

$$\Sigma M_\alpha p'_\alpha = M(p'_1, \ldots, p'_n)_0 \quad \text{oder} \quad \Sigma M p'_\alpha = M(p'_1, \ldots, p'_n)_1,$$

ist, während für jedes andere Wertsystem $(p'_\alpha + \pi_\alpha)$

$$M(p'_1 + \pi'_1, p'_2 + \pi'_2, \ldots, p'_n + \pi'_n)_1 \geqq \Sigma M_\alpha . (p'_\alpha + \pi'_\alpha) \geqq M(p'_1 + \pi'_1, \ldots, p'_n + \pi'_n)_1$$

ist, sodass man für die Grenzfälle erhält:

$$(3)\quad M_\alpha = \frac{\partial M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_0}{\partial p'_\alpha} \quad \text{resp.} \quad M_\alpha = \frac{\partial M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_1}{\partial p'_\alpha}.$$

Da die Functionen M_0 und M_1 homogene Functionen erster Ordnung sind,

so hängen die gewonnenen Ausdrücke nur von den Verhältnissen der p'_α ab; eliminiren wir dieselben, so erhalten wir die Gleichungen der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten, welche den Gleichgewichtsbezirk begrenzen; sie mögen sein:

$$\Psi(M_1, M_2, \ldots, M_n)_0 = 0,$$
$$\Psi(M_1, M_2, \ldots, M_n)_1 = 0.$$

Wenn das System der äusseren Kräfte ein Grenzsystem wird, so wird der Eintritt einer Bewegung zu fürchten sein. Eine solche Bewegung ist charakterisirt durch die Verhältnisse der Veränderungen, welche die Grössen p_α hierbei erfahren, d. h. durch ein System von Grössen p'_α. Das zu einem Grenzfall gehörende System dieser Grössen ist bis auf einen gemeinschaftlichen Factor bestimmt durch die Gleichungen (3), aus welchen folgt:

$$\Sigma M_\alpha p'_\alpha = M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_0$$

oder

$$\Sigma M_\alpha p'_\alpha = M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)_1.$$

Indem wir nun zu einem benachbarten Grenzfall übergehen oder, anders gesprochen, indem wir differentiiren, erhalten wir:

$$\Sigma dM_\alpha p'_\alpha = 0,$$

woraus sich dann ergiebt, dass wir setzen können:

$$p'_\alpha = \lambda \frac{\partial \Psi(M_1, M_2, \ldots, M_n)_0}{\partial M_\alpha}$$

resp.

$$p'_\alpha = \lambda \frac{\partial \Psi(M_1, M_2, \ldots, M_n)_1}{\partial M_\alpha}.$$

§ 21. Nach der in den vorhergehenden Paragraphen geschilderten Theorie ist die Druckverteilung in jedem Grenzfalle des Gleichgewichts eine bestimmte. Dagegen sind der Natur der Theorie ganz entsprechend die Druckkräfte allemal dann unbestimmt, wenn es sich nicht um einen Grenzfall des Gleichgewichts handelt. Es beruht ja diese Theorie, ebenso wie die ältere von Coulomb, auf einer Annahme, welche der gewöhnlichen Theorie der Reibung bei starren Körpern nachgebildet ist, und es ist bekannt, dass diese Theorie ebenfalls nur in den Grenzfällen des Gleichgewichts zu bestimmten Werten der Widerstände führt.

Um diesen Uebelstand zu beseitigen, hat Boussinesq*) von einem

---

*) Boussinesq, Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion. Bruxelles. 1876. 4º.

ganz anderen Gesichtspunkte aus eine neue Theorie des Erddrucks entwickelt, welche die Statik sandförmiger Substanzen in unmittelbaren Zusammenhang mit der Elasticitätstheorie und der Hydrostatik bringt. Natürlich kommt es auch bei dieser Theorie vor allem darauf an, Beziehungen für die Druckkräfte aufzustellen, welche ausser den allgemein gültigen Gleichungen (1) des vorhergehenden Paragraphen für den Sand im besonderen gelten und die specielle physikalische Constitution dieser Substanz zum Ausdruck bringen.

Boussinesq geht von der Vorstellung aus, dass durch die Druckkräfte Deformationen hervorgerufen werden, und dass man die Druckkräfte als Functionen dieser Deformationen ansehen kann. Nun ist bekanntlich jede Deformation charakterisirt durch die drei Hauptdilatationen, welche in drei bestimmten senkrecht zu einander stehenden Richtungen erfolgen. Ist die Substanz isotrop, so werden die Richtungen der Hauptspannungen mit denen der Hauptdilatationen übereinstimmen. Die Summe der Hauptspannungen wird inbezug auf die Hauptdilatationen symmetrisch sein. Nehmen wir nun an, dass sich die Hauptdrucke nach Potenzen der Dilatationen entwickeln lassen, und dass ferner die Dilatationen so klein sind, dass man Glieder der dritten und höheren Ordnung vernachlässigen kann, so erhalten wir, falls $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Hauptdilatationen sind, θ die kubische Dilatation und endlich F_1, F_2, F_3 die Hauptspannungen bezeichnen,

$$\tfrac{1}{3}(F_1+F_2+F_3)=A+B\theta+C\theta^2+D[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2].$$

Ferner erhält man

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(F_2-F_3) &= [K'+(B''+C''\theta)\delta_1](\delta_2-\delta_3),\\ \tfrac{1}{2}(F_3-F_1) &= [K'+(B''+C''\theta)\delta_2](\delta_3-\delta_1),\\ \tfrac{1}{2}(F_1-F_2) &= [K'+(B''+C''\theta)\delta_3](\delta_1-\delta_2),\end{aligned}$$

wo

$$K' = A'+B'\theta+C'\theta^2+D'[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]$$

gesetzt ist.

Bei Flüssigkeiten können nun die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ auch dann von einander verschiedene Werte haben, wenn die Unterschiede der Grössen F_1, F_2, F_3 unbemerkbar sind. Deshalb werden dort die Ausdrücke $K'+(B''+C''\theta)\delta_\alpha$ gleich Null sein. Die Hauptspannungen haben dann einen gemeinschaftlichen Wert $-p$, wo p den Druck bedeutet. Sieht man von Gliedern höherer Ordnung ab, so erhält man

$$-p=\tfrac{1}{3}(F_1+F_2+F_3)=A+B\theta.$$

Dagegen ist bei starren Körpern eine Verschiedenheit in den Grössen δ_1, δ_2 und δ_3 nur dann möglich, wenn auch die Spannungen merkbare Unterschiede aufweisen. Es werden sich also hier die Quotienten

$\frac{1}{2}(F_2-F_3):(\delta_2-\delta_3)$ auch dann nicht auf Null reduciren, wenn die Dilatationen selbst sich der Grenze Null nähern. Dann nähern sich aber die Grössen $K'+(B''+C''\theta)\delta_\alpha$ einer endlichen Grenze A', und wir werden dann mit Vernachlässigung höherer Potenzen allgemein schreiben dürfen:

$$\frac{1}{2}(F_2-F_3)=A'(\delta_2-\delta_3),\quad \frac{1}{2}(F_3-F_1)=A'(\delta_3-\delta_1),$$
$$\frac{1}{2}(F_1-F_2)=A'(\delta_1-\delta_2).$$

Behalten wir in K ebenfalls nur die Glieder erster Ordnung bei, sodass

$$\frac{1}{3}(F_1+F_2+F_3) = A+B\theta$$

wird, so ergeben sich für die Hauptspannungen Ausdrücke von der Form:

$$F_1=A+\lambda\theta+2\mu\delta_1,\quad F_2=A+\lambda\theta+2\mu\delta_2,\quad F_3=A+\lambda\theta+2\mu\delta_3.$$

Die sandförmigen Substanzen stehen nun nach Boussinesq auf der Grenze zwischen den flüssigen und den festen Körpern. Bei ihnen werden, falls der Druck, d. h. das negativ genommene arithmetische Mittel aus den drei Hauptspannungen nicht zu bedeutend ist, auch bei verhältnismässig geringen Unterschieden in den Spannungen die Dilatationen merkliche Unterschiede aufweisen können.

Nehmen wir jetzt als ursprünglichen Zustand einen solchen, bei welchem der Druck, d. h. $-\frac{1}{3}(F_1+F_2+F_3)$ gleich Null ist, so wird man bei passender Bestimmung von θ bewirken können, dass bei ganz willkürlichen Werten der Differenzen $\delta_2-\delta_3$, $\delta_3-\delta_1$ die Grössen K und $K'+(B''+C''\theta)\delta_\alpha$ gleich Null werden oder, genauer gesprochen, sich auf Glieder von höherer als der zweiten Ordnung reduciren. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$K = A+B\theta+C\theta^2+D[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]$$

und

$$K' = A'+B'\theta+C'\theta^2+D'[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2]$$

diese Eigenschaft haben, und dass $B''+C''\theta$ unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung ist. Indem man auf den Fall $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$ zurückgeht, erkennt man, dass $A=A'=B''=0$ sein müssen. Wenn nun die drei Ausdrücke

$$B\theta+C\theta^2+D[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2],$$
$$B'\theta+C'\theta^2+D'[(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2+(\delta_1-\delta_2)^2],$$
$$C''\theta$$

unendlich klein von höherer als der zweiten resp. ersten Ordnung sein sollen, so muss — abgesehen von dem Fall $B=B'=C''=0$ — offenbar θ unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung sein, und es werden also die Glieder $C\theta^2$ und $C'\theta^2$ unterdrückt werden können. Dann wird aber, damit gleichzeitig

$$B\theta + D[(\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2]$$
und $$B'\theta + D'[(\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2]$$
unendlich klein von höherer als der zweiten Ordnung seien, sich ein Factor m derart bestimmen lassen, dass:

$$B' = -mB, \quad D' = -mD$$

ist. Nimmt man nun an, dass die Substanz als incompressibel anzusehen ist, dass also θ stets vergleichweise klein gegen die Grössen δ_1, δ_2, δ_3 ist, so wird man in K das Glied $C\theta^2$ und in $K' + (B'' + C''\theta)\delta_\alpha$ die Glieder $C'\theta^2$ und $C''\theta\delta_\alpha$ gegen die übrigen unterdrücken können, und man erhält dann:

$$\tfrac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3) = -p = B\theta + D[(\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2]$$
und
$$\tfrac{1}{2}(F_2 - F_3) = -m\{B\theta + D[(\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2]\}(\delta_2 - \delta_3)$$
$$= mp(\delta_2 - \delta_3).$$

Mit Rücksicht darauf, dass θ unendlich klein gegen die Hauptdilatationen ist, wird man also folgende Bedingungen erhalten:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0,$$
$$F_1 = -p(1 - 2m\delta_1), \quad F_2 = -p(1 - 2m\delta_2), \quad F_3 = -p(1 - 2m\delta_3).$$

Nach bekannten Regeln kann man nun aus diesen Ausdrücken für die Hauptspannungen leicht die Grössen X_x, Y_y, Z_z, $X_y = Y_x$, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$ als Functionen der Ableitungen der Verrückungen u, v, w nach den Coordinaten x, y, z ableiten. Man erhält

$$X_x = p\left(1 - 2m\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad Y_y = p\left(1 - 2m\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad Z_z = p\left(1 - 2m\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$Y_z = Z_y = -pm\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad Z_x = X_z = -pm\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$X_y = Y_x = -pm\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

wo dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist. Setzt man die vorstehenden Ausdrücke für die Druckcomponenten in die Gleichungen (1) des vorhergehenden Paragraphen ein, so erhält man zusammen mit den Gleichungen, welche die Incompressibilität ausspricht, vier Gleichungen für die drei Verrückungen u, v, w und für den mittleren Druck, also gerade soviel Gleichungen, als man unbekannte Functionen hat.

Es würde sich jetzt noch darum handeln, die auszeichnende Eigenschaft der Grenzfälle des Gleichgewichts zu ermitteln. Boussinesq

gelangt zu ihr auf folgende Weise. Die sandförmigen Substanzen besitzen keine Cohäsion, und deshalb muss der kleinste Hauptdruck und damit auch das arithmetische Mittel der drei Hauptdrucke, d. h. p jedenfalls positiv sein. Ferner muss aus demselben Grunde die grösste Hauptdilatation δ_1 offenbar kleiner als $\frac{1}{2\,m}$ sein. Aber schon ehe diese Grenze wirklich erreicht ist, wird das Gleichgewicht nicht mehr möglich sein. Und deshalb wird man als obere Grenze von δ_1 einen Wert $\frac{\sin\varphi}{2\,m}$ anzusehen haben. Beschränkt man sich nun auf ebene Deformationen, so ist eine der Dilatationen $\delta_2 = 0$, und δ_3 ist gleich $-\delta_1$. Bezeichnet man nun die Hauptdrucke durch p_1, p_2, p_3 so ist, wie wir gesehen haben:

$$p_1 = p(1-2\,m\,\delta_1), \quad p_2 = p, \quad p_3 = p(1-2\,m\,\delta_3) = p(1+2\,m\,\delta_1).$$

Demnach wird

$$\frac{p_3 - p_1}{p_3 + p_1} = 2\,m\,\delta_1 \leqq \sin\varphi.$$

Die Grenzfälle sind also bei der entwickelten Theorie durch dieselbe Bedingung charakterisirt wie bei der Reibungstheorie von Rankine und seinen Nachfolgern. Handelt es sich aber nicht um den Grenzzustand des Gleichgewichts, so zeigt sich ein durchgreifender Unterschied beider, und die Theorie von Boussinesq beweist eine unbestreitbare Ueberlegenheit gegenüber den älteren Theorien. Während nämlich die letzteren ihrer ganzen Natur gemäss nur in den Grenzfällen des Gleichgewichts die Verteilung des Druckes anzugeben vermögen, in allen anderen Fällen. gezwungen sind, die Druckverteilung unbestimmt zu lassen, liefert die Theorie von Boussinesq Gleichungen, welche ähnlich denjenigen der Hydrodynamik und Elasticitätstheorie unabhängig davon gelten, ob der Grenzzustand erreicht ist oder nicht.

Wie genau die Theorie von Boussinesq den thatsächlichen Verhältnissen entspricht, das lässt sich jetzt noch nicht übersehen. Denn die Versuche, welche man bisher mit dem Sande anstellte, beziehen sich fast ausnahmslos auf die Grenzzustände des Gleichgewichts, während für eine Prüfung der in Frage stehenden Theorie gerade die Fälle in Betracht kommen, bei welchen der Grenzzustand noch nicht erreicht ist. Auf jeden Fall aber wird man in Anbetracht der präcisen Art, in welcher Boussinesq seine Formeln entwickelt hat, erwarten dürfen, dass der Unterschied von Theorie und Praxis sich nicht als allzugross herausstellen wird. Mit dem Wunsch, dass durch geeignete Versuche die geist-

volle Arbeit des französischen Gelehrten eine unzweideutige Bestätigung finden möge, schliessen wir unseren Bericht über die Entwicklung der Theorie des Erddrucks, um noch einen Blick auf die experimentelle Seite unserer Frage zu werfen.

III.

Ueber die Versuche zur Bestimmung der Gleichgewichtsverhältnisse des Sandes.

§ 22. Wenn Versuche einen Einblick in die Gleichgewichtsverhältnisse gewähren sollen, so müssen sie sich offenbar nach doppelter Richtung erstrecken. Einmal müssen die Druckkräfte gemessen werden, welche die Sandmasse gegen begrenzende Wände ausübt, zweitens muss das Verhalten der im Innern befindlichen Teile des Sandes untersucht werden. Da die erstere Frage für die Praxis von vorwiegender Bedeutung ist, so kann es nicht befremden, dass die vorliegenden Versuche über die Statik in ganz überwiegender Anzahl Druckmessungen sind, während sich mit der zweiten Frage nur äusserst wenige Forscher abgeben.

Es sind eigentlich nur zwei Untersuchungen über die Verhältnisse im Innern von Sandmassen zu nennen; beide aber verdienen besondere Beachtung sowohl wegen der Originalität der befolgten Methode als wegen der mit ihrer Hülfe gewonnenen Resultate. Forchheimer und Kurdjümoff haben versucht, sich über die Gestalt der Gleitfläche in verschiedenen Grenzfällen des Gleichgewichts Aufschluss zu verschaffen. Forchheimer's*) Verfahren besteht im wesentlichen darin, dass zunächst eine Sandschüttung aus verschiedenen Schichten gebildet wird, welche abwechselnd mit Fuchsin gefärbt und ungefärbt sind. Nun wird eine der Grenzen bewegt, sodass auch ein Teil des Sandes nachstürzt. Nachdem dann wieder Ruhe eingetreten ist, wird die Sandmasse durch darüber gegossenes, geschmolzenes Paraffin zum Erstarren gebracht. Zerschneidet man nun den gewonnenen Körper, so kann man in Folge des Unterschiedes der Schichten die bewegten Teile der Sandmasse von den in Ruhe verbliebenen unterscheiden. Die Grenze beider giebt dann offenbar die Gleitfläche. Die Versuche beweisen, dass beim activen Erddruck die Gleitfläche als Ebene angesehen werden kann, während sie beim passiven Erddruck bei weitem weniger einfach erscheint. Beim Absturz durch eine kreisförmige Bodenöffnung scheint wunderbarer Weise gerade der über der

*) Forchheimer, Ueber den Sanddruck und Bewegungserscheinungen im Innern trockenen Sandes. Tüb. Diss. Aachen 1883. 8°.

Bodenöffnung befindliche Cylinder abzusinken, sodass die Gleitfläche eine Cylinderfläche ist.

Nicht minder interessant ist das Verfahren von Kurdjümoff*), welcher sich der Photographie bedient, um die Bewegungen zu studiren, welche beim Eintreiben eines Klotzes in eine Sandmasse hervorgerufen werden. Die in Ruhe bleibenden Teile der Sandmasse müssen ein klares Bild geben, während die bewegten Teile nur ein trübes Bild liefern können. Die Grenze beider giebt auch hier die Gleitfläche. Sie hat im wesentlichen die Gestalt, wie wir sie bei Besprechung der Jankowskischen Theorie der Tragfähigkeit von Bodenpfeilern beschrieben haben.

§ 23. Was nun die Druckmessungen betrifft, so steht wieder einer grossen Zahl von Untersuchungen über den Seitendruck der Erde eine kleine Gruppe anderweitiger Untersuchungen gegenüber. Ueber den Zusammenhang zwischen Eintauchungshöhe und Belastungshöhe hat, wie schon angegeben, in älterer Zeit Lambert**) Versuche angestellt; in neuerer Zeit hat Kurdjümoff diese Untersuchung wieder aufgenommen und ist dabei zu dem Resultat gelangt, dass die zulässige Belastungshöhe erheblich grösser ist, als man nach der Formel von Rankine und Pauker erwarten sollte.

Ueber den Bodendruck von Sand in Röhren und über den Druck gegen den Verschluss von Oeffnungen im Boden von Gefässen liegen Untersuchungen von Delanges***), Hagen†), Engesser††) und Forchheimer†††) vor. Die Untersuchungsmethode ist bei allen wesentlich dieselbe. Eine Schale einer Wage wird durch ein auf die andere gelegtes Uebergewicht gegen die Bodenöffnung gedrückt. Alsdann wird das Uebergewicht der belasteten Schale so lange verringert, bis der Verschluss der Oeffnung nachgiebt. Der Druck, bei welchem die Bewegung eintritt, giebt dann offenbar den Druck im Grenzfalle des Gleichgewichts. Auch in den Resultaten stimmen die Untersuchungen gut überein. Der Druck nähert sich mit wachsender Höhe der Sandschicht einem

---

*) V. J. Kurdjümoff, Zur Frage des Widerstandes der Gründungen auf natürlichem Boden. Civilingenieur XXXVIII, 292—311. 1892.

**) Lambert, Sur la fluidité du sable. Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin. Année 1772. Berlin 1774. 4⁰.

***) Delanges, Statica e meccanica de' semifluidi. Mem. di matematica e fisica della Società italiana, t. IV. 1788.

†) Hagen, Poggendorff Annalen, XXVIII. 1833.

††) Engesser, Ueber den Erddruck gegen innere Stützwände. Deutsche Bauztg., XVI. 1882. 91—93.

†††) Forchheimer, Tüb. Diss. Aachen 1883. 8⁰.

Grenzwert; für geometrisch ähnliche Oeffnungen verhalten sich die Grenzwerte des Druckes wie die dritten Potenzen der Längsdimensionen oder wie die Kuben der Quadratwurzeln des Flächeninhaltes. Interessant ist die Beobachtung Forchheimer's, dass Belastungen der Sandschicht durch Gewichte keinen nennenswerten Einfluss auf den Bodendruck hatten.

Der Druck der Erde gegen seitliche Wände ist am häufigsten Gegenstand der experimentellen Untersuchung gewesen. Leider zeigen die Resultate dieser Messungen so beträchtliche Unterschiede, dass es bisher noch nicht gelungen ist, eine Theorie mit dem gesamten vorliegenden Versuchsmaterial zur Deckung zu bringen, und dass sich fast für alle Theorien Versuche finden lassen, welche dieselbe scheinbar bestätigen.

Gewisse Unterschiede erklären sich zwar leicht durch die Verschiedenheit der benutzten Substanzen. Einige Experimentatoren benutzten zum Beispiel cohärirende Erdarten; ihre Resultate weichen naturgemäss von den Untersuchungen ab, welche sich auf cohäsionslose Substanzen, wie es z. B. der Sand ist, beziehen. Aber selbst wenn man die in Frage stehenden Versuche von der Betrachtung ausschliesst, bleiben die Unterschiede stark genug. Auf eine mögliche Quelle dieser Differenzen hat in neuerer Zeit Darwin*) hingewiesen, indem er zeigte, dass der Druck der Erde ganz wesentlich davon abhängt, wie die Erde aufgeschüttet wurde.

Die allgemeine Versuchsanordnung Darwin's ist die von den meisten Autoren befolgte. Eine verticale Wand ist um eine horizontale, der Wand parallele Axe frei drehbar; sie wird gegen den Druck der Erde durch die Spannung einer Schnur, die an einem Punkte der Wand befestigt ist, im Gleichgewicht gehalten. Diese Spannung wird allmählich so weit vermindert, dass noch gerade Gleichgewicht möglich ist, dass aber bei der kleinsten weiteren Verminderung der Spannung die Wand anfängt sich zu bewegen. Das Moment der Fadenspannung giebt dann unmittelbar das Moment des Erddrucks im Grenzfalle des Gleichgewichts.

Was nun die Versuche Darwin's von denen anderer Autoren unterscheidet, das ist die besondere Aufmerksamkeit, welche Darwin auf die Art der Aufschüttung verwendet. Es wird ganz genau unterschieden, ob der Sand durch Bildung dünner horizontaler Schichten aufgeschüttet war, oder ob durch Bildung von Schichten, welche unter dem natürlichen Böschungswinkel von vorn nach hinten ansteigen oder fallen.

Für jede Art der Aufschüttung ergab sich nun für die Abhängigkeit

---

*) Darwin, On thrust of a mass of sand. Minutes of Proceedings of the institution of civil engineers. LXXI. 1883, 350—377. Ein französischer Bericht findet sich in Annales des ponts et chaussées. 1883, II. 478—494.

des Momentes von der Höhe der Schüttung der Ausdruck

$$\mu h^3.$$

Der Factor μ änderte sich beim Uebergang von einer Art der Schüttung zur anderen und zwar in nicht unbeträchtlicher Weise. So ergaben sich für verticale Wand und horizontales Gelände Factoren μ, die sich wie 315 : 344 : 360 verhielten, je nachdem die Schichten nach hinten fielen, horizontal waren oder nach hinten anstiegen. Aus diesen Versuchen kann man also zunächst als unzweifelhaftes Resultat ablesen, dass die Constitution des Sandes und damit auch der von ihm ausgeübte Druck ganz wesentlich von der Aufschüttungsart abhängen, und dass, wenn überhaupt brauchbare Resultate gewonnen werden sollen, diesem Punkte eine ganz besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden ist.

Zweitens zeigt sich, was schon der alte Woltmann*) beobachtet hatte, dass sich die Momente in Bezug auf die untere Kante der Wand verhalten wie die Kuben der Sandhöhe. Dieses Resultat, mit welchem übrigens auch alle bisher bekannt gewordenen Theorien übereinstimmen, kann demnach wohl trotz der gegenüberstehenden Beobachtungsresultate von Delanges**), nach denen sich die Momente wie die Quadrate der Höhen verhalten sollen, als gesichert angesehen werden.

Fragen wir uns nun, was aus gut gemessenen Werten der Momente in Bezug auf eine einzige Axe zur Beurteilung einer Theorie geschlossen werden kann. Zunächst ist klar, dass eine Theorie, die für die in Frage stehende Grösse stark abweichende Werte liefert, als unzutreffend zurückgewiesen werden muss. Andererseits kann aber aus einer Uebereinstimmung noch nicht direct auf die Unanfechtbarkeit einer Theorie geschlossen werden. Denn es können zwei gänzlich von einander abweichende Druckverteilungen doch dasselbe Moment bezüglich einer Axe liefern; ja es braucht nicht einmal die Resultante des Druckes nach Grösse, Richtung und Angriffspunkt übereinzustimmen, damit sich bezüglich einer Axe dasselbe Moment ergiebt.

Was den Angriffspunkt des Druckes betrifft, so haben einige Experimentatoren z. B. Donath***) im Hinblick auf die allgemeine Uebereinstimmung der Theorien in dieser Beziehung eine versuchsmässige Nachweisung des Gesetzes, dass der Druck im Drittel der Höhe angreift, nicht

*) Woltmann, Beyträge zur hydraulischen Architektur, III, 184.

**) Paolo Delanges, Esperienze ed osservazioni intorno alla pressione delle terre ed alla resistenza de' muri. Verona 1779.

***) A. D. Donath, Untersuchungen über den Erddruck auf Stützwände. Zeitschrift für Bauwesen XLI 1891 auch sep. Ernst und Sohn, Berlin 1891. 4⁰.

für nötig erachtet. Andere glaubten in der Thatsache, dass die Momente bezüglich der unteren Kante sich wie die Kuben der Schichthöhen verhalten, eine genügende Bestätigung des in Frage stehenden Gesetzes zu finden. Es bedarf aber nur eines Hinweises auf den Einfluss, welchen die Wahl der Längeneinheit auf die Gleichungen der Erddrucktheorie hat, um zu erkennen, dass das kubische Verhältnis der Momente gänzlich unabhängig von der Druckverteilung ist, dass sich nicht nur unter Voraussetzung der hydrostatischen Druckverteilung sondern auch unter Zugrundelegung einer beliebigen anderen Druckverteilung das in Frage stehende Verhältnis ergeben würde.

Gauthey*) hat durch einen Versuch direct nachweisen wollen, dass der Druck im Drittel der Höhe angreift, indem er die Wand erst um eine Axe drehbar machte, die in der fraglichen Höhe lag, und später die Axe tiefer und höher legte. Es zeigte sich, dass bei der ersten Lage die Wand in Ruhe blieb, ohne dass irgend welche Kräfte wirkten. Dagegen fing die Wand an sich zu drehen, wenn die Axe eine andere Lage hatte. Leider giebt Gauthey nicht genau genug an, um wie viel die Axe höher und tiefer gelegt wurde. Es erscheint daher gar nicht ausgeschlossen, dass bei engerer Wahl der Grenzen sich nicht nur eine einzige Lage sondern ein Intervall von Lagen ergeben hätte, bei denen die Wand in Ruhe bleibt, ohne dass gegen dieselbe Kräfte ausgeübt werden.

Wenn Gauthey's Versuch unanfechtbar wäre, so würde er zwar einerseits einen wesentlichen Bestandteil der gewöhnlichen Erddrucktheorien bestätigen, andererseits aber würde er doch zu viel beweisen, indem er zeigte, dass es Druckverteilungen, bei denen der Angriffspunkt nicht im Drittel der Höhe liegt, nicht geben kann. Damit wäre dann aber auch nachgewiesen, dass die Reibungshypothese, welche allen diesen Theorien zu Grunde liegt, unzutreffend wäre. Denn man kann leicht Druckverteilungen finden, welche allen aus dieser Annahme fliessenden Bedingungen genügen und doch einen anderen Angriffspunkt geben. Den Gleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \gamma$$

genügt man nämlich durch die Formeln

$$X_x = g(y), \quad X_y = Y_x = 0, \quad Y_y = \gamma . y.$$

---

*) Gauthey, Sur l'épaisseur que l'on doit donner aux murs de soutènement pour résister à la poussée des terres. Nouv. Mém. de Dijon, 1784, II, 28—66; 1785, I, 1—45.

Um nun die für die Reibungstheorie des Sandes charakteristische Bedingung zu befriedigen, muss man annehmen

$$y\gamma \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} > g(y) > y\gamma \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}.$$

Wenn nun die Function $g(y)$ so gewählt wird, dass sie im unteren Drittel der Sandschicht den unteren Grenzwert, dagegen in dem oberen Teile einen grösseren Wert hat, so liegt der Angriffspunkt offenbar in dem oberen Teile der Wand und nicht gerade im Drittel der Höhe.

Auch neuere Versuche stehen mit der von Gauthey beobachteten Erscheinung im Widerspruch. So hat Leygue*), welcher den Widerstand gegen den Erddruck durch Federn hervorbringt, die gegen die frei bewegliche Wand drücken, gefunden, dass der Angriffspunkt des Druckes nicht mit dem Drittel der Höhe zusammenfällt, sondern in dem Intervall von $\frac{2}{5}$ bis $\frac{1}{2}$ der Höhe schwankt. So scheint es denn, dass die Gauthey'schen Versuche nicht als einwandsfrei zu betrachten sind. Eine sorgfältige und eingehende Wiederholung derselben würde deshalb um so mehr am Platze sein, als es an directen Versuchen über den Angriffspunkt des Erddrucks im übrigen vollständig mangelt.

Auch in einer anderen Hinsicht würde es uns wünschenswert erscheinen, dass das Moment des Erddrucks in Bezug auf eine möglichst grosse Anzahl von verschiedenen Lagen der Axe gemessen würde. Um nämlich für die drei Bestandteile der Resultante des Erddrucks mehr als eine Gleichung zu haben, verfahren viele derjenigen, welche über den Erddruck Versuche angestellt haben, so, dass sie die Wand nicht nur um eine, sondern um mehrere, meistens zwei Axen beweglich machen. Woltmann**) misst z. B. zunächst das Moment für die untere Kante der Wand, und macht letztere alsdann um die obere Kante drehbar. Audé***) setzt, nachdem er das Moment bezüglich der unteren Axe bestimmt hat, die Wand auf Rollen, sodass er sie nur in horizontaler Richtung verschieben kann, und misst dann direct die horizontale Componente des Druckes. Woltmann schliesst aus der Thatsache, dass das Moment bezüglich der oberen Kante ungefähr doppelt so gross ist wie dasjenige für die untere Axe, dass der Angriffspunkt des Druckes in $\frac{1}{3}$ der Höhe liegt; Audé

*) L. Leygue, Nouvelle recherche sur la poussée des terres et le profil de revêtement le plus économique. Annales des ponts et chaussées (6) X, 1885, II, p. 788—1003.

**) Woltmann, Beyträge III, 175ff.

***) Audé, Nouvelles expériences sur la poussée des terres. Mémorial de l'officier du génie, XV, Paris 1848, p. 269—316.

bestimmt den Angriffspunkt, indem er das gemessene Moment durch die gemessene Horizontalcomponente dividirt.

So plausibel auf den ersten Blick dieses Verfahren scheinen möchte, beruht es doch auf einer Annahme, die bisher weder experimentell noch theoretisch bewiesen ist, nämlich auf der Voraussetzung, dass in den verschiedenen Fällen die Druckverteilung und damit die Resultante dieselbe ist. Das versteht sich nun aber keineswegs von selbst; denn die Bewegungen, welche in der Sandmasse eintreten, sobald die Wand die eine oder die andere Bewegung macht, sind offenbar gänzlich von einander verschieden, und es werden sich also an der Grenze des Gleichgewichts in den verschiedenen Fällen auch verschiedene Gleitflächen bilden. Auf jeden Fall bedarf also die in Frage stehende Voraussetzung eines Beweises. Diesen wird man unseres Erachtens nur so führen können, dass man zunächst das Moment des Erddrucks in Bezug auf mehr als drei Axen, welche nicht sämtlich in einer Ebene liegen, bestimmt und dann untersucht, ob sich diese Momente sämtlich durch dieselben beiden Componenten und denselben Angriffspunkt darstellen lassen.

Dass zunächst einmal die Abhängigkeit des Momentes von der Lage der Axe genau untersucht werde, scheint uns um so wesentlicher, als die wenigen Schritte, welche man bisher nach dieser Richtung gemacht hat, ganz entschieden darauf hinweisen, dass der Druck von der Wahl der Axen abhängt. Audé hat, um die Reibung an der Wand zu bestimmen, das Moment des Erddrucks ausser für die untere Kante auch für vier mit ihr auf gleicher Höhe liegende Axen gemessen. Er findet für die Abstände

0, 0,05, 0,10, 0,13, 0,15

die Momente

0,910, 0,650, 0,300, 0,080, —0,080.

Wenn nun die Annahme, dass der Erddruck unabhängig von der Bewegung ist, welche die Wand einschlagen kann, richtig wäre, so müsste das Moment eine lineare Function des Abstandes der Axe von der Wand sein. Das ist nun aber nicht der Fall; denn sonst müsste, wenn man die Differenz irgend zweier Momente durch die Differenz der zugehörigen Abstände dividirt, sich stets derselbe Quotient ergeben. Bilden wir aber die Differenzen der auf einander folgenden Momente und dividiren durch die zugehörigen Differenzen der Abstände, so erhalten wir die Zahlen:

—5,2, —7,0, —7,3, —8,0.

Bemerkenswert, namentlich in Bezug auf den hier in Frage stehenden

Punkt, sind auch die Versuche von Siégler*), welcher die Momente in Bezug auf acht verschiedene Axen bestimmte, von denen vier in der Nähe der oberen Kante, die andern vier in der Nähe der unteren Kante der Wand lagen. Bestimmte man nun den Angriffspunkt aus den Momenten für die oberen Kanten, so ergab sich, dass der Angriffspunkt zwischen $\frac{2}{5}$ bis $\frac{1}{2}$ der Höhe lag; dagegen ergab sich eine tiefere Lage desselben, wenn die unteren Axen benutzt wurden. Also auch aus diesen Versuchen muss geschlossen werden, dass der Druck der Erde gegen die Wand wesentlich abhängt von der Bewegung, welche die Wand annimmt.

Wir haben schon angegeben, wie Woltmann den Angriffspunkt des Erddrucks bestimmt. Eine genauere Prüfung seiner Versuche zeigt nun aber, dass sich höchstens näherungsweise ein Drittel der Höhe ergiebt. Woltmann misst sowohl für die untere als für die obere Kante der Wand das Moment, und zwar bei halb und bei ganz gefülltem Kasten.

Er fand für den Flugsand:

Axe unten			Axe oben	
Kasten halb voll	ganz voll	mal der Höhe 2h des Kastens	Kasten halb voll	ganz voll
15,5	131,5		76,5	228,5
16,5	127,5		74,5	225,5.

Wenn nun der Druck unabhängig von der Lage der Axe wäre und im Drittel der Wandhöhe angriffe, so müssten sich die Zahlen wie 1:8:6:16 verhalten. Dividiren wir die einzelnen Verticalreihen durch dieselben, so erhalten wir

15,5	16,5	12,5	14	(bis auf $\frac{1}{4}$ genau).
16,5	16	12,5	14	

Die zweite Reihe zeigt eine hinreichend genaue Uebereinstimmung mit der ersten Reihe; dagegen scheint uns die Abweichung der dritten und der vierten Reihe von den beiden ersten zu gross, um sie auf zufällige Fehler zu schieben. Aehnlich liegt die Sache bei den Versuchen mit Ackererde. Woltmann findet unter denselben Verhältnissen

8,5	79,5	41,5	130,5
9	77,5	36,5	127,5.

Wenn wir nun durch die Verhältniszahlen dividiren, so erhalten wir:

8,5	10	7	8
9	9,5	6	8.

*) Siégler, Expériences nouvelles sur la poussée des terres. Association française pour l'avancement des sciences. C. R. de la 13e Session Blois 1884 II 73. Paris 1885. 8°.

Dass hier die zweite Reihe nicht mit der ersten Reihe übereinstimmt, wie es nach den Versuchen von Darwin sein müsste, erklärt sich hinreichend durch den Umstand, dass die Ackererde Cohäsion besitzt und dass, wenn die Momente sich wie die Kuben der Höhen verhalten sollten, auch die Cohäsion mit der Höhe proportional sein müsste. Da nun aber die Cohäsion constant bleibt, so müssen die Momente stärker als die dritten Potenzen der Höhen wachsen.

Es ist schade, dass Woltmann nicht auch das Moment bei halbgefülltem Kasten für die Mitte der Wand gemessen hat. Im Hinblick darauf, dass bei unten liegender Axe das Gesetz von der Aehnlichkeit der Verhältnisse sich sehr gut bestätigt hat, glauben wir annehmen zu dürfen, dass dasselbe sehr gut mit dem achten Teil der durch die vierte Reihe gelieferten Werte übereinstimmen würde. Ausserdem hätte man alsdann die Momente für drei in der Ebene der Wand liegende Axen, und man könnte versuchen, ob sich eine Druckverteilung finden lässt, welche diese drei Momente ergiebt. Nehmen wir in Ermangelung des fehlenden Momentes einstweilen den achten Teil der durch die vierte Reihe gelieferten Zahlen, so haben wir für den halbgefüllten Kasten die Zahlen:

a) Wenn die Axe in der unteren Kante der Wand liegt:	b) Wenn die Axe in der Höhe der Sandschicht liegt:	c) Wenn die Axe in doppelter Höhe der Sandschicht liegt:	
31,0	57,1	153,0	mal der Höhe h
33,0	56,4	149,0	der Sandschicht.

Nennen wir nun Y die Normalcomponente des Druckes und xh die Höhe des Angriffspunktes, so müssten sich diese Zahlen durch

$$Yx, \quad Y - Yx \quad \text{und} \quad 2Y - Yx$$

darstellen lassen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergiebt sich

$$Yx = 33, \quad Y = 91{,}5, \quad x = 0{,}36,$$

und wir erhalten die Zahlenreihe:

$$Yx = 33, \quad Y - Yx = 58{,}5, \quad 2Y - Yx = 150{,}0,$$

welche allerdings mit den Versuchen ziemlich gut übereinstimmt. Dagegen zeigt sich, dass der Angriffspunkt eines Druckes, durch welchen alle Momente dargestellt werden sollen, höher liegt als im Drittel der Höhe der drückenden Sandschicht.

Nach alledem erscheint es mehr als zweifelhaft, dass für jede beliebige Axe im Grenzfalle des Gleichgewichts dieselbe Druckverteilung stattfindet. Wenn das aber der Fall ist, so kann man den Sanddruck und seinen Angriffspunkt nicht in der Weise bestimmen, dass man das Moment des Erddrucks für drei nicht in einer Ebene liegende Axen misst und dann

diejenige Kraft sucht, welche diese drei Momente ergiebt. Man müsste vielmehr vor allem, indem man das Moment des Erddrucks für möglichst viele Axen bestimmt, das Gesetz zu ermitteln suchen, nach welchem das Moment des Erddrucks von der Lage der Axe abhängt. Nur in dem einzigen Falle, dass sich das Moment als lineare Function der Coordinaten desjenigen Punktes ergeben sollte, in welchen ein zu den Axen senkrecht geführter Schnitt die Axe trifft, wäre man zu der Annahme berechtigt, dass die Druckverteilung von der Lage der Axe unabhängig ist, in jedem andern Falle aber nicht. Hat man nun das in Frage stehende Gesetz ermittelt, so kann man nach der am Schluss des § 19 entwickelten Methode die Componenten und den Angriffspunkt des Erddrucks finden.

Da nun aber derartige Untersuchungen bisher nicht angestellt sind, so müssen wir unseren Bericht mit dem Bekenntnis schliessen, dass wir das vorliegende Versuchsmaterial nicht für ausreichend halten, einen Einblick in die Druckverhältnisse des Sandes gegen seitliche Wände zu gewähren.

Zusätze und Anmerkungen.

1) Die älteren Theorien des Erddrucks findet man mit grosser Ausführlichkeit in Mayniel's mehrfach citirtem „Traité de la poussée des terres". Paris 1808, 4⁰. E. Winkler giebt in seinem Werke „Neue Theorie des Erddrucks" eine Geschichte der Erddrucktheorie. Dieselbe ist jedoch nicht ganz zuverlässig, da der Verfasser vielfach nicht auf die Quellen zurückgeht. Zuverlässiger ist der kurze Bericht, welchen Gaetano Crugnola in seinem Werke „Sulla spinta delle terre e delle masse liquide", Torino, A. F. Negro, 1880, 8⁰ giebt.

2) Zu § 1. Wir haben eine der eigentümlichsten Theorien des Erddrucks unerwähnt gelassen, weil sie mit den späteren Theorien in gar keinem Zusammenhang steht. Ståhlswerd sagt, das Mass der Standfestigkeit sei eine lineare Function $s+nh$ der Höhe h, und das Abfliessungsvermögen sei gleich h^2. Daraus leitet er ab, dass die Horizontalprojection einer Böschung von der Höhe h gleich $h^2/(s+nh)$ ist. Die beiden Constanten s und n bestimmt er aus zwei gegebenen Böschungen. Auf dieser abenteuerlichen Grundlage wird nun mit Hülfe von noch abenteuerlicheren Vorstellungen über Mechanik eine Bestimmung des Erddrucks aufgebaut. Vergl.

Ståhlswerd, Föreläsningar uti reguliere fortification. Stockholm 1755. Deutsch von Peter Petersen unter dem Titel Grundsätze zu Vorlesungen über reguläre Fortification. Copenhagen und Gotha 1788. 8⁰.

Samuel Heurlin, Weitere Ausführung der Ståhlswerd'schen Theorie der Abdachung der aufgeschütteten Erde und der nötigen Stärke der Futtermauern, wodurch sie senkrecht stehend erhalten werden sollen. Böhm's Mag. für Ing. und Art. IV. 145—162. Giessen 1778. 8⁰.

3) § 1, S. 79. Von Bullet's Traité d'architecture pratique giebt es eine von Seguin besorgte Ausgabe aus dem Jahre 1788, welche sich in der Königl. Bibliothek zu Berlin befindet.

4) § 4, S. 82. Von Trincano's „Elémens de fortification" giebt es, wie ich mich nachträglich überzeugte, eine ältere einbändige Ausgabe vom Jahre 1768.

Diese citirt Mayniel. In Berlin findet man die ältere einbändige Ausgabe in der Bibliothek der Königl. Generalinspection des Ingenieur- und Pionier-Corps, während die neuere zweibändige Ausgabe im Besitz der Königl. Artillerie- und Ingenieurschule ist.

5) § 8, S. 92. Man findet Prony's Theorie auch in seiner Mécanique Analytique, Paris, 1815 Band I p. 293—297.

6) § 8, S. 93. Ueber die Gestalt der freien Erdflächen haben geschrieben:

Allent, Mémoire sur les surfaces d'équilibre des fluides imparfaits tels que les sables, les terres etc. Annales des mines 1816, auch separat, Paris 1817. 8⁰.

De Sazilly, Observations sur les conditions d'équilibre des terres et sur les revêtements de talus. Annales des ponts et chaussées 1857, I, 1—157.

Airy, On the slope of cuttings. Minutes of Proceedings of the institution of civil engineers, LV, 1879, 241—251.

von Ott, Vorträge über Baumechanik, Teil I, Statik des Erdbaues, Theorie der Futtermauern, Gewölbe. Prag 1870. 8⁰.

7) § 12, S. 101. Noch weiter wie Planat geht Neville, welcher selbst für geneigtes Gelände den Druck horizontal annimmt.

John Neville, On the maximum amount of resistance required to sustain banks of earth and other materials. Proc. of the royal Irish Academy, III, 1847, p. 84—89; IV, 1850, p. 275—281.

8) § 16, S. 116. Eine graphische Construction des Erddrucks, welche auf denselben Principien wie Weyrauch's Theorie beruht, giebt Jacquier in Note sur la détermination graphique de la poussée des terres. Annales des ponts et chaussées 1882 I, 463—472.

9) § 16, S. 116. Es sei hier auf Fr. Engesser's interessante „Geometrische Erddrucktheorie“ Zeitschrift für Bauwesen, XXX, 1880, S. 189—210 verwiesen, welche mir während der Abfassung des Berichtes noch nicht bekannt war.

10) § 23. Ausser den schon erwähnten stellten zunächst Mayniel, Martony de Köszegh und Hagen Versuche in ausgedehnterem Masse über den Seitendruck der Erde an. In neuerer Zeit haben noch Winkler, Baker (The lateral pressure of earthwork. Min. of Proc. of the inst. of civ. engineers LXV, 1881 p. 140—184) und Gobin (Détermination précise de la stabilité des murs de soutènement et de la poussée des terres. Ann. des ponts et chaussées 1883 II 98) Beobachtungen über den Erddruck ausgeführt.

Autoren-Register*).

*) Die Ziffern ohne Zusatz bezeichnen die Seite unseres Berichtes; A. d. p. et ch. ist die Abkürzung von Annales des ponts et chaussées.

Inhaltsverzeichnis.

Veröffentlichungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

I. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe Berlin, Verlag von Georg Reimer.

1. Band, 1890—91. IV u. 292 S. (1892). M. 7.60*).

2. Band, 1891—92. IV u. 156 S. (1893). M. 4.50*).

Inhalt des ersten Bandes:

Chronik der Vereinigung. Nekrologe auf B. Klein und P. Günther.

Bericht über die Versammlung zu Halle (22.—26 Sept. 1891) enthaltend die Referate von Kronecker, C. Neumann, Dedekind, F. Klein, Papperitz, Simon, Finsterwalder, Rohn, H. Wiener, Schubert, Eberhard, Boltzmann, Hensel, F. Müller, Dyck, Hilbert, Schönflies, Minkowski, F. Kötter, Piltz, Stäckel, Wangerin, Wiltheiss, G. Cantor. —

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie von F. Meyer in Clausthal.

Inhalt des zweiten Bandes:

Chronik der Vereinigung. Nekrologe auf L. Kronecker (von H. Weber), H. Schröter (von Sturm), H. Gretschel (von Papperitz), J. Gierster (von Fricke).

Bericht über die für Nürnberg in Aussicht genommenen Vorträge von Bjerknes, Fricke, F. Klein, F. Meyer, Schapira, Schlegel, Schumacher, Study.

Referat: Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck, von F. Kötter in Berlin.

Zur Zeit noch nicht im Buchhandel erschienen, aber direct durch Vermittelung des Schriftführers der Vereinigung, Professor Dr. W. Dyck, München, Polytechnikum, zu beziehen sind:

---

*) Für die Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ermässigt sich bei directem Bezug durch die Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer (Berlin S.W. Anhaltstrasse 12) der Preis auf M. 6 für Bd. 1, auf M. 3.55 für Bd. 2 (incl. Porto).

II. Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung von W. Dyck. München, 1892, XVI u. 430 S. M. 9*).

Inhalt:

1. Teil. Einleitende wissenschaftliche Aufsätze von F. Klein, A. Voss, A. Brill, G. Hauck, A. v. Braunmühl, L. Boltzmann, A. Amsler, O. Henrici.

2. Teil. Beschreibungen zu den Modellen etc. I. Arithmetik, Algebra, Functionentheorie, Integralrechnung. II. Geometrie. III. Angewandte Mathematik.

III. Verzeichnis der seit 1850 an den deutschen Universitäten erschienenen Doctor-Dissertationen und Habilitationsschriften aus der reinen und angewandten Mathematik. Herausgegeben auf Grund des für die Universitäts-Ausstellung in Chicago erschienenen Verzeichnisses. München 1892. M. 1.50**).

Das vorliegende Verzeichnis wurde ursprünglich für den Specialkatalog der Mathematischen Ausstellung, welche als Glied der Deutschen Universitäts-Ausstellung in Chicago von Seiten des Königl. Preussischen Unterrichts-Ministeriums ins Leben gerufen wurde, zusammengestellt. Da das Verzeichnis indes auch für weitere Kreise von Interesse sein dürfte, hat der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit Genehmigung der K. Pr. Staatsregierung die vorliegende Separatausgabe besorgt; dabei hat es das dankenswerte Entgegenkommen der einzelnen Universitätsbibliotheken ermöglicht, die im ursprünglichen Verzeichnis vorhandenen zahlreichen Lücken zu ergänzen.

*) Hierzu kommen noch 50 Pf. für Portoauslagen im Inland, 80 Pf. im Ausland. Für Mitglieder der Vereinigung ermässigt sich der Bezugspreis excl. Porto von M. 9 auf M. 5.

**) Hierzu kommen noch 10 Pf. für Portoauslagen im Inland, 20 Pf. im Ausland. Für Mitglieder der Vereinigung ermässigt sich der Bezugspreis excl. Porto von M. 1.50 auf M. 1.





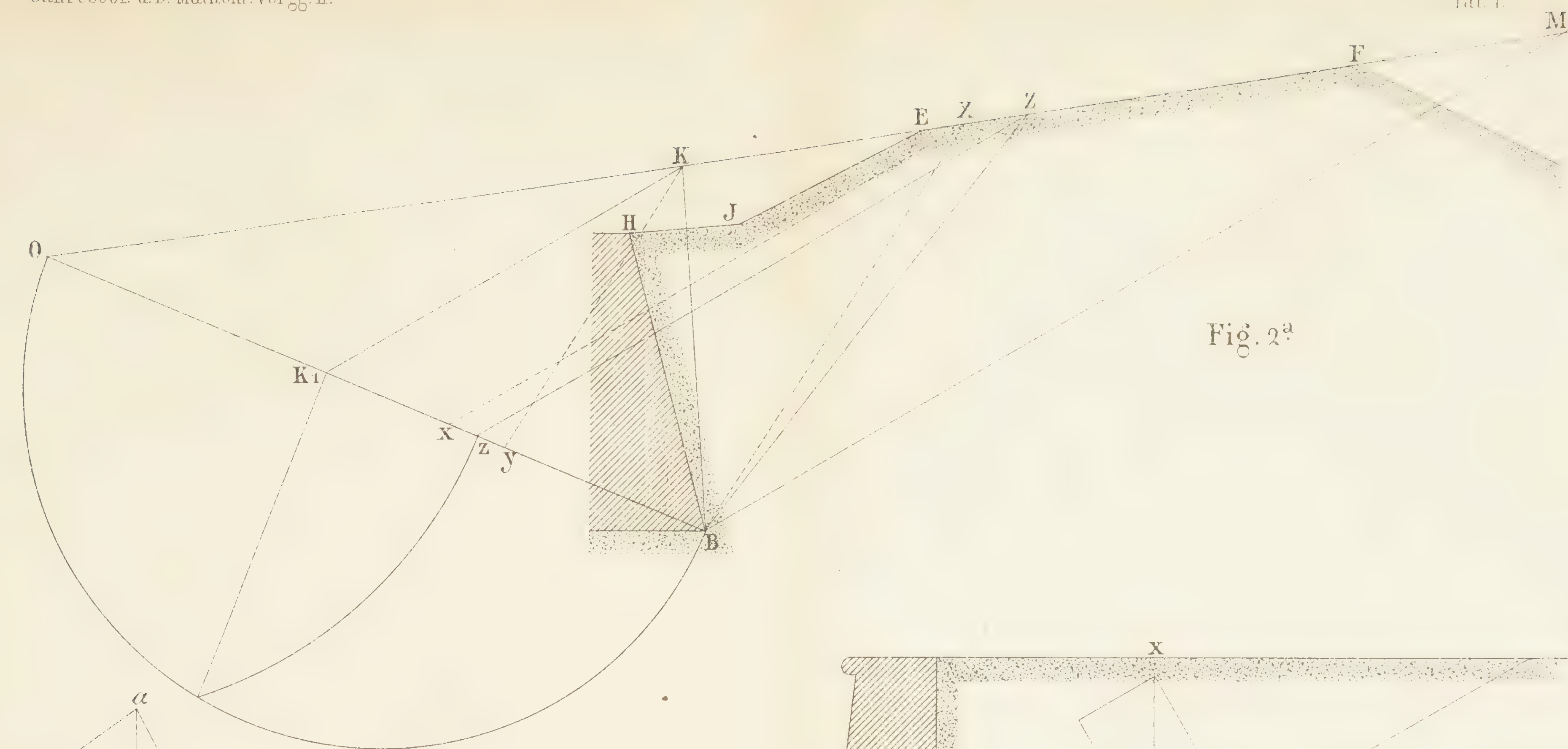


Fig. 2a

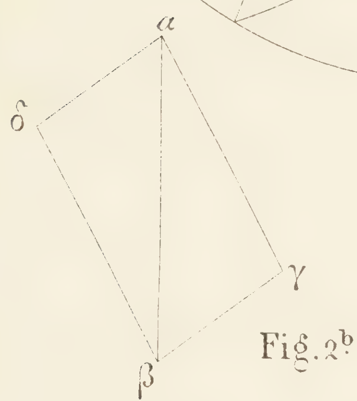


Fig. 2b

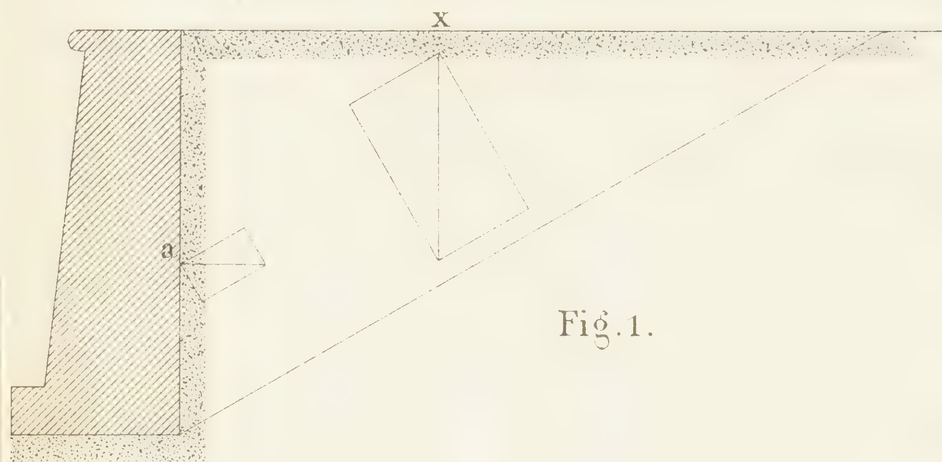


Fig. 1.

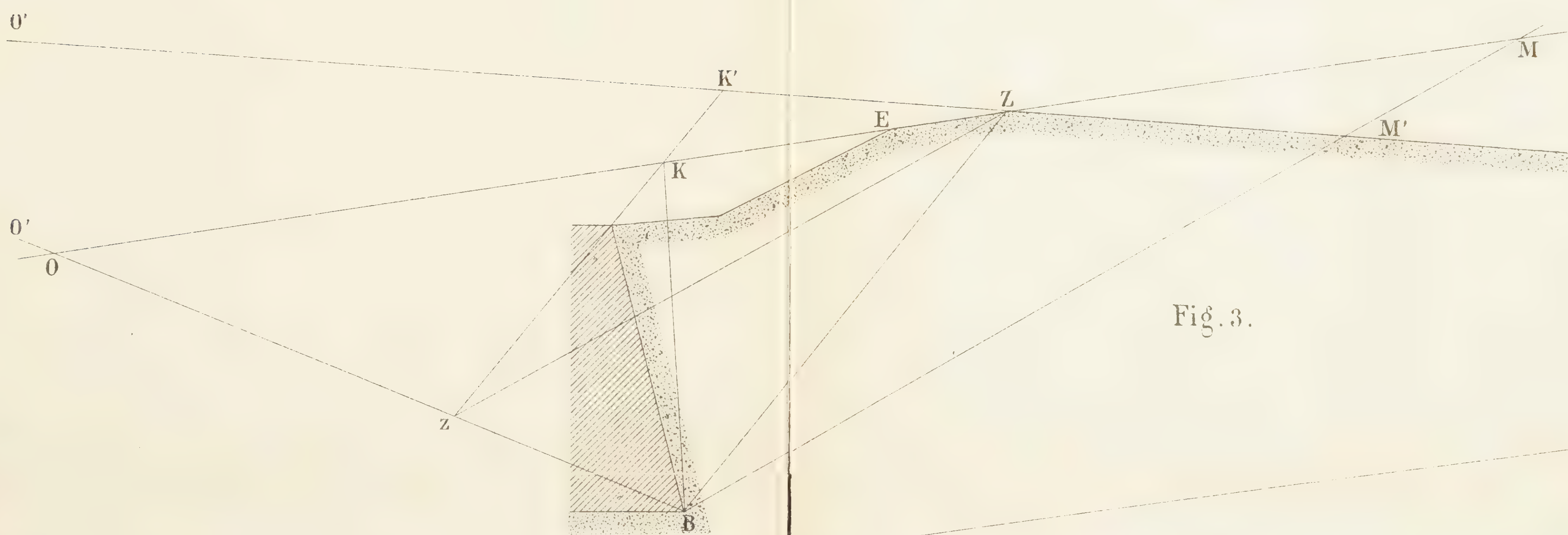


Fig. 3.

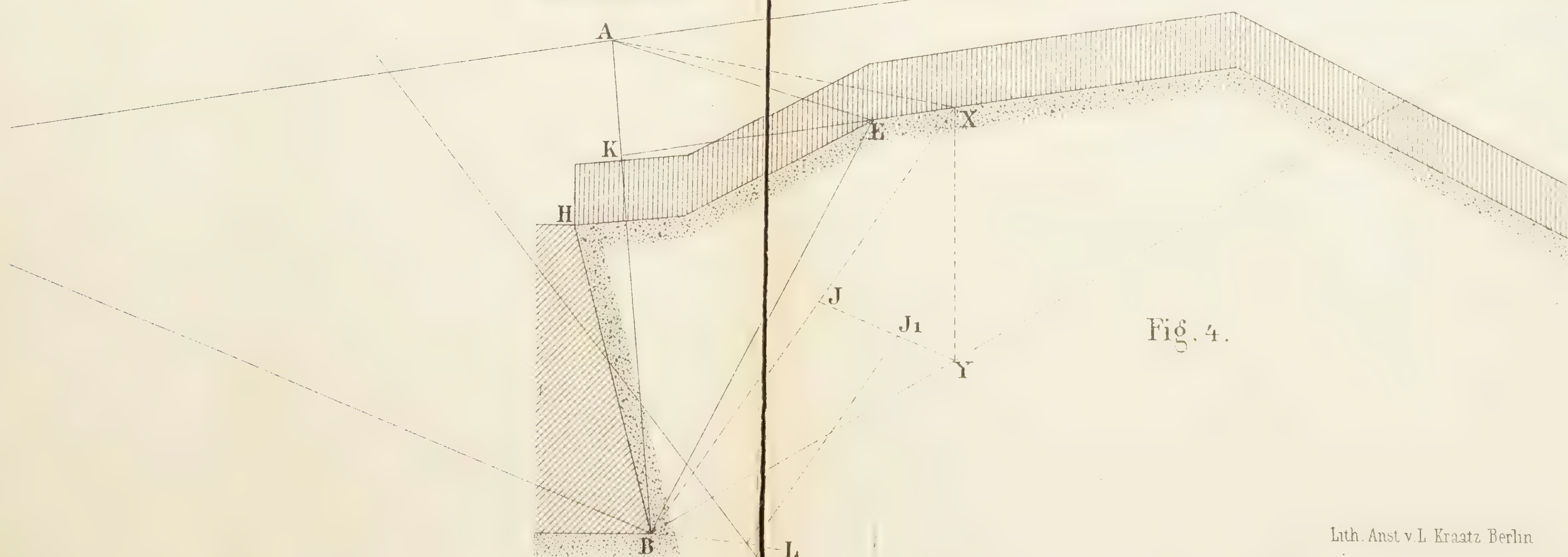


Fig. 4.

Lith. Anst. v. L. Kraatz Berlin

0

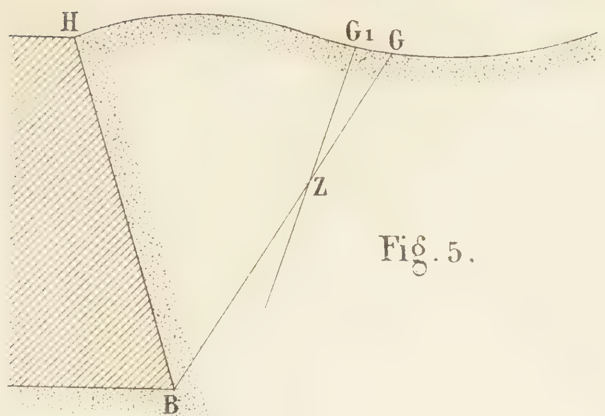


Fig. 5.

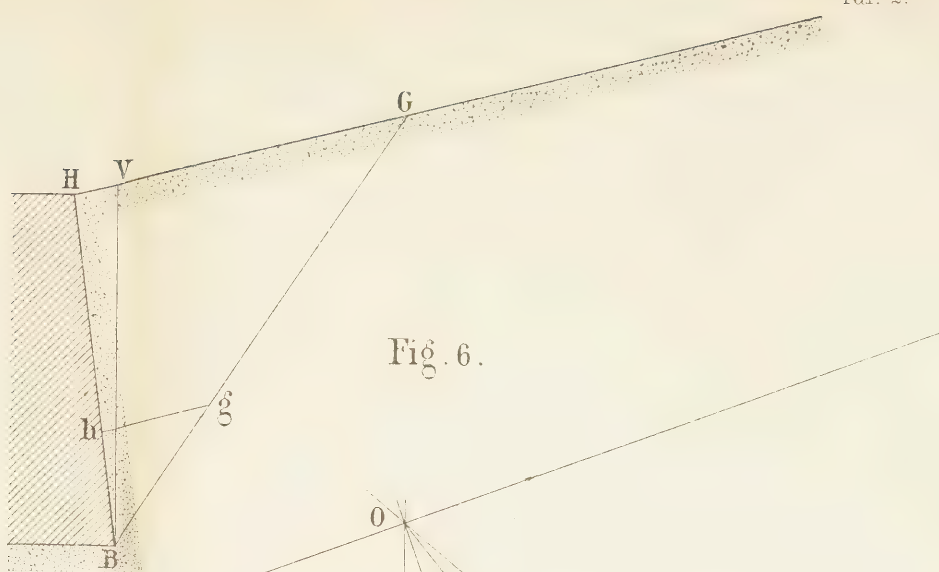


Fig. 6.

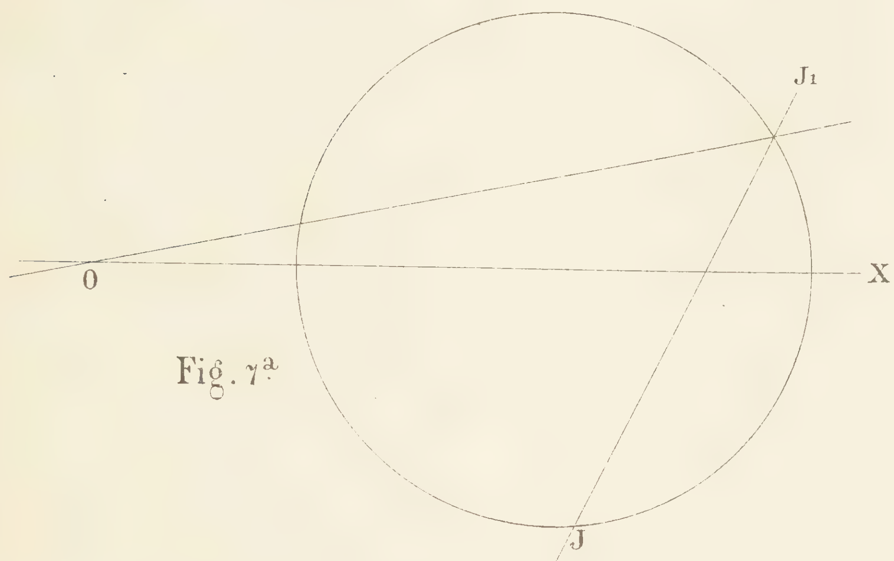


Fig. 7a.

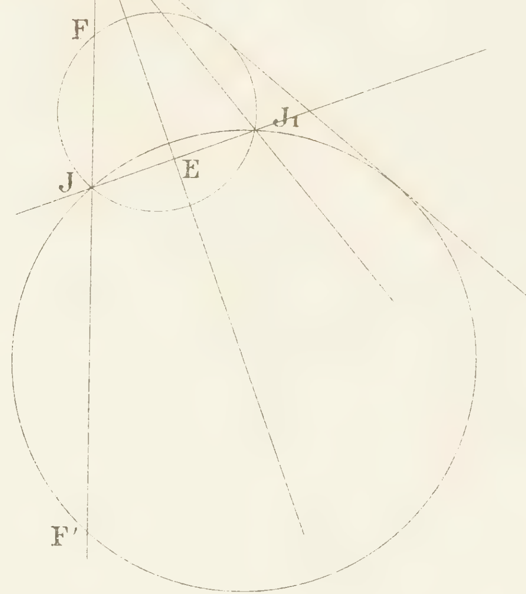


Fig. 7b.

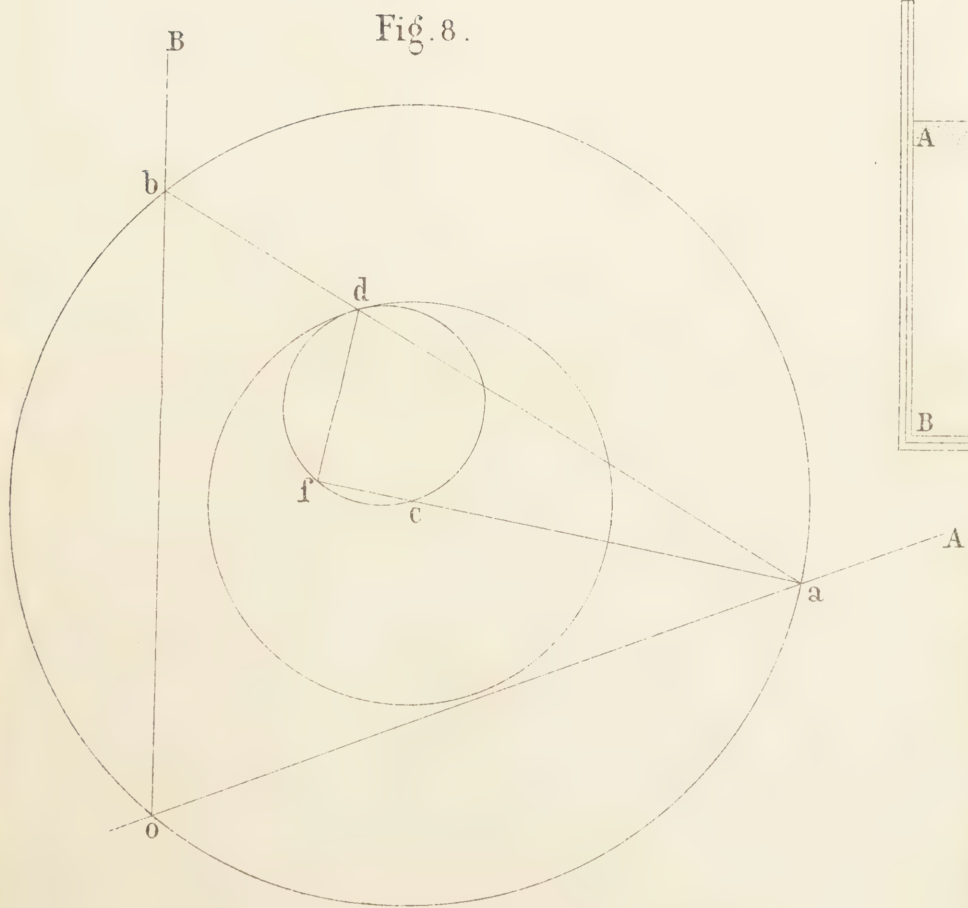


Fig. 8.



Fig. 10.

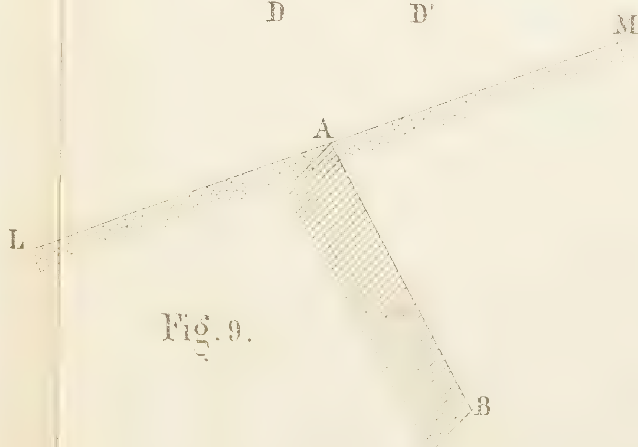


Fig. 9.

Lith. Anst. v. L. Kraus, ...






UNIVERSITY OF
ILLINOIS.




UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.6DE C001
JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER
1-2 1890-91
3 0112 016869932